

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Partiel

Jeudi 23 octobre 2025

Durée 2 heures

Téléphones portables sont interdits.

L'usage du photocopie du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Dans tous les exercices, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux.

- (a) Dans un espace affine de dimension 3, un plan et une droite ont toujours au moins un point commun.
- (b) Dans un espace affine de dimension 3, trois plans ont toujours au moins un point commun.
- (c) Tout repère affine d'un espace affine de dimension 3 a exactement quatre points.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine défini sur $\mathbb{R}$. Soient A_1 , A_2 et A_3 trois points non alignés de $\mathcal{E}$. Notons

- G le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$ (c'est-à-dire, l'isobarycentre des points A_1 , A_2 , A_3),
 - B_1 le milieu du segment $[A_2A_3]$,
 - B_2 le milieu du segment $[A_1A_3]$,
 - B_3 le milieu du segment $[A_1A_2]$,
 - C_1 l'isobarycentre des points G , B_1 , A_2 ,
 - D_1 l'isobarycentre des points G , B_1 , A_3 ,
 - C_2 l'isobarycentre des points G , B_2 , A_3 ,
 - D_2 l'isobarycentre des points G , B_2 , A_1 ,
 - C_3 l'isobarycentre des points G , B_3 , A_1 ,
 - D_3 l'isobarycentre des points G , B_3 , A_2 .
- (a) Justifier le fait que les points C_1 et D_1 sont distincts. Montrer que les droites (A_2A_3) et (C_1D_1) sont parallèles. Trouver le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{C_1D_1} = \lambda \overrightarrow{A_2A_3}$.
 - (b) Justifier le fait que les points C_3 et D_2 sont distincts. Montrer que les droites (A_2A_3) et (C_3D_2) sont parallèles. Trouver le nombre réel μ tel que $\overrightarrow{C_3D_2} = \mu \overrightarrow{A_2A_3}$.
 - (c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_2D_2} + \overrightarrow{C_3D_3}$ est nul.
 - (d) Montrer que l'isobarycentre des points C_1 , C_2 , C_3 coïncide avec l'isobarycentre des points D_1 , D_2 , D_3 . Montrer que ces isobarycentres coïncident avec G .

Exercice 3

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines définis sur $\mathbb{R}$, et soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. Soit $n \geq 1$ un entier, et soient $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)$ l'enveloppe convexe des points $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{E}$, et on note $\mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$ l'enveloppe convexe des points $\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)$ dans $\mathcal{F}$.

- (a) Montrer l'inclusion $\mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)) \subset \varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n))$.
- (b) Montrer l'inclusion $\varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)) \subset \mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Dans $\mathcal{E}$, on considère trois hyperplans parallèles et deux à deux distincts $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, ainsi que deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont aucune n'est contenue dans un hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$.

- (a) Pour chaque indice $i = 1, 2, 3$, justifier le fait que $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}'$) se coupent en exactement un point. Pour chaque indice $i = 1, 2, 3$, notons A_i (respectivement, A'_i) le point d'intersection de $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{D}'$).
- (b) Justifier le fait que les expressions $\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}}$ et $\frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}$ ont un sens et montrer que

$$\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}.$$

- (c) Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$. Supposons que

$$\frac{\overrightarrow{A_1 M}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}.$$

Montrer que M coïncide avec A_3 .

- (d) Supposons maintenant, en plus, que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient sécantes et que leur point d'intersection A n'appartienne pas à $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. Justifier le fait que les expressions $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}}$, $\frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}}$ et $\frac{\overrightarrow{A_1 A'_1}}{\overrightarrow{A_2 A'_2}}$ ont un sens et montrer que

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1 A'_1}}{\overrightarrow{A_2 A'_2}}.$$