Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2018 - 2019
Cours 4M059

TOPOLOGIE ALGEBRIQUE

I. Itenberg

1. Topologie générale (rappels)

1.1. **Espaces topologiques.** Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est une collection τ de sous-ensembles de X telle que

- l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble X appartiennent à τ ;
- pour toute famille d'ensembles appartenant à τ, la réunion des ensembles de la famille appartienne aussi à τ ;
- pour toute famille finie d'ensembles appartenant à τ, l'intersection des ensembles de la famille appartienne aussi à τ.

Si τ est une topologie sur X, on dit que la paire (X, τ) (ou tout simplement X) est un *espace topologique*. Les ensembles appartenant à τ sont dits *ouverts*. Les éléments de X s'appellent *points*. Un sous-ensemble de X tel que le complémentaire de ce sous-ensemble soit ouvert est dit *fermé*. La collection des sous-ensembles fermés de X vérifie les propriétés suivantes :

- l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble X sont fermés;
- pour toute famille finie de sous-ensembles fermés de X, la réunion de ces sous-ensembles est un sous-ensemble fermé ;
- pour toute famille de sous-ensembles fermés de X, l'intersection de ces sous-ensembles est un sous-ensemble fermé.

Exemples.

(1) *Topologie discrète*. Pour tout ensemble X, on peut considérer la collection τ formée par tous les sous-ensembles de X.
(2) *Topologie anti-discrète* ou *topologie grossière*. Pour tout ensemble X, on peut considérer la collection τ formée par $\varnothing$ et X.

Un grand merci à Raphaël Alexandre pour les dessins.

(3) *Topologie "flèche"* de $\mathbb{R}$. Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et la collection τ formée par $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, où a est un nombre réel.
(4) *Topologie de Zariski de* $\mathbb{R}$. On considère la collection τ formée par $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ dont le complémentaire est fini. Pour cette topologie, les sous-ensembles fermés sont $\mathbb{R}$, $\varnothing$ et tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$.
(5) *Topologie standard de* $\mathbb{R}$. On considère la collection τ formée par $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et toutes les réunions d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (un *intervalle* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $(a; b)$, où a et b sont des nombres réels tels que $a < b$).

Souvent, on décrit une topologie τ sur un ensemble X à l'aide d'une certaine sous-collection de τ. Une *base* de τ est une sous-collection β de τ telle que tout ensemble non vide appartenant à τ soit une réunion d'ensembles appartenant à β. Par exemple, les intervalles ouverts forment une base de la topologie standard de $\mathbb{R}$.

Le dernier exemple peut être généralisé. Tout espace métrique X a une topologie standard : une base de cette topologie est formée par les boules ouvertes de X. Quand on parle d'un espace métrique, on suppose qu'il est muni de la topologie standard (si une autre topologie n'est pas précisée).

Comme nous avons vu, sur le même ensemble, on peut considérer des topologies différentes (si l'ensemble en question a au moins deux éléments). Soit X un ensemble sur lequel on a choisi deux topologies τ_1 et τ_2. On dit la topologie τ_1 est *plus fine* que la topologie τ_2 (ou bien que τ_2 est *moins fine* que τ_1) si tout sous-ensemble appartenant à τ_2 appartient aussi à τ_1. La topologie la plus fine sur un ensemble quelconque est la topologie discrète. La topologie la moins fine sur un ensemble quelconque est la topologie anti-discrète.

Soit (X, τ) un espace topologique, et soit $x \in X$ un point. Un sous-ensemble $U \subset X$ contenant x est un *voisinage* de x s'il existe un sous-ensemble ouvert $V \subset X$ tel que $x \in V \subset U$. Un sous-ensemble $A \subset X$ est ouvert si et seulement si, pour tout point $x \in A$, le sous-ensemble A est un voisinage de x.

Soit (X, τ) un espace topologique, et soit $A \subset X$ un sous-ensemble. Notons par τ_A la collection des sous-ensembles de A de la forme $V \cap A$, où V est un sous-ensemble ouvert de X. La collection τ_A est une topologie sur A ; on dit que τ_A est la *topologie induite* sur A par τ. Remarquons que si $F \subset A$ est un sous-ensemble fermé (par rapport à la topologie τ_A), alors il existe un sous-ensemble $E \subset X$ qui est fermé (par rapport à la topologie τ) et tel que $F = E \cap A$.

Soient (X, τ) un espace topologique, $A \subset X$ un sous-ensemble et $x \in X$ un point. On dit que x est

- un *point intérieur* de A si A est un voisinage de x ;
- un *point extérieur* de A s'il existe un voisinage U de x tel que $U \cap A = \varnothing$ (autrement dit, si $X \setminus A$ est un voisinage de x) ;
- un *point adhérent* à A si tout voisinage de x a une intersection non vide avec A.

L'*intérieur* $\mathrm{int}(A)$ de A est la réunion de tous les sous-ensembles ouverts de X qui sont contenus dans A. L'intérier $\mathrm{int}(A)$ est un sous-ensemble ouvert de X. De plus, $\mathrm{int}(A)$ coïncide avec l'ensemble des points intérieurs de A. Un sous-ensemble de X est ouvert si et seulement si ce sous-ensemble coïncide avec son intérieur.

L'*adhérence* $\overline{A}$ de A est l'intersection de tous les sous-ensembles fermés de X qui contiennent A. L'adhérence $\overline{A}$ est un sous-ensemble fermé de X. De plus, $\overline{A}$ coïncide avec l'ensemble des points adhérents à A. Un sous-ensemble de X est fermé si et seulement si ce sous-ensemble coïncide avec son adhérence.

La *frontière* $\mathrm{Fr}(A)$ de A est $\overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$.

Soient $A \subset X$ et $B \subset X$ deux sous-ensembles. On dit que A est *dense* dans B si $\overline{A} \supset B$. On dit que A est *partout dense* si A est dense dans X.

1.2. **Applications continues.** Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *continue* si l'image inverse de tout sous-ensemble ouvert de Y est un sous-ensemble ouvert de X.

Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si l'image inverse de tout sous-ensemble fermé de Y est un sous-ensemble fermé de X. Si $A \subset X$ est un *sous-espace topologique*, c'est-à-dire, un sous-ensemble muni de la topologie induite, alors l'application d'inclusion $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ est continue.

Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications contunues, alors l'application composée $g \circ f : X \to Z$ est continue.

Pour tout sous-espace topologique A d'un espace topologique X et pour toute application $f : X \to Y$ de X dans un espace topologique Y, la restriction de f sur A est l'application composée $f \circ \mathrm{in}$, où $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ est l'inclusion de A dans X. Par conséquent, si f est continue, alors sa restriction sur A est aussi continue.

Soit $x \in X$ un point. Une application $f : X \to Y$ est *continue en x* si l'image inverse de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x. Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si f est continue en tout point de X.

Une application $f : X \to Y$ est un *homéomorphisme* si f est continue, bijective, et si son application réciproque f^{-1} est continue.

Remarquons qu'une application $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si et seulement si f est bijective et elle établie une bijection entre les topologies sur X et Y.

Deux espaces topologiques sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre. L'un des problèmes en topologie est le suivant : étant donnés deux espaces topologiques X et Y, déterminer si X et Y sont homéomorphes.

1.3. **Propriétés topologiques.** Un espace topologique X est dit *connexe* si, pour tout sous-ensemble $A \subset X$ qui est ouvert et fermé au même temps, on a soit $A = \varnothing$, soit $A = X$.

Un espace topologique X est connexe si et seulement si on ne peut représenter X sous la forme $X = A_1 \cup A_2$, où $A_1 \subset X$ et $A_2 \subset X$ sont deux sous-ensembles ouverts non vides tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

On dit qu'un sous-ensemble $A \subset X$ est connexe si A est connexe pour la topologie induite. Une *composante connexe* d'un espace topologique X est un sous-ensemble connexe $C \subset X$ tel que C ne soit pas contenu dans un sous-ensemble connexe strictement plus grand. Deux composantes connexes de X qui ne coïncident pas sont disjointes.

L'adhérence d'un sous-ensemble connexe $A \subset X$ est connexe. Par conséquent, toute composante connexe de X est un sous-ensemble fermé de X.

Soient X et Y sont deux espaces topologiques tels que X soit connexe. Si $f : X \to Y$ est une application continue, alors $f(X) \subset Y$ est un sous-ensemble connexe. Par conséquent, on obtient que la connexité est une *propriété topologique*. Cela signifie que la connexité est un invariant par homéomorphisme : si deux espaces topologiques X et Y sont homéomorphes, alors X est connexe si et seulement si Y est connexe. Dans cette section, on rappelle un certain nombre d'autres propriétés topologiques.

Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue de l'interavalle $I = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ dans X (ici $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard et I est muni de la topologie induite). Si $\gamma : I \to X$ est un chemin, le point $\gamma(0)$ s'appelle le *point de départ* de γ et le point $\gamma(1)$ s'appelle le *point d'arrivée* de γ. Une application constante $\gamma : I \to X$ s'appelle *chemin constant* et est noté e_x, où $x = \gamma(I)$. Si $\gamma : I \to X$ est un chemin, on note γ^{-1} le *chemin inverse* $\gamma^{-1} : I \to X$ défini par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ pour tout $t \in [0; 1]$. (Attention : la

notation γ^{-1} peut mener à une confusion, car ce type de notations est aussi utilisé pour les images inverses et les applications réciproques).

Soient $\gamma_1 : I \to X$ et $\gamma_2 : I \to X$ deux chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Posons

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } \ t \in [0; 1/2], \\ \gamma_2(2t-1), & \text{si } \ t \in [1/2; 1], \end{cases}$$

L'application obtenue $\gamma_1\gamma_2 : I \to X$ est continue. Ce chemin s'appelle le *produit* des chemins γ_1 et γ_2.

Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques de X peuvent toujours être reliés par un chemin (c'est-à-dire, pour deux points quelconques p et q de X, il existe un chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$). Par exemple, $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard est connexe par arcs.

On dit qu'un sous-ensemble $A \subset X$ est connexe par arcs si A est connexe par arcs pour la topologie induite.

Pour toute famille de sous-ensembles connexes par arcs de X telle que deux sous-ensembles quelconques de la famille ont une intersection non vide, la réunion des sous-ensembles de la famille est connexe par arcs.

Une *composante connexe par arcs* d'un espace topologique X est un sous-ensemble connexe par arcs $C \subset X$ tel que C ne soit pas contenu dans un sous-ensemble connexe par arcs strictement plus grand. Deux composantes connexes par arcs de X qui ne coïncident pas sont disjointes.

Soient X et Y sont deux espaces topologiques tels que X soit connexe par arcs. Si $f : X \to Y$ est une application continue, alors $f(X) \subset Y$ est un sous-ensemble connexe par arcs. Par conséquent, on obtient que la connexité par arcs est une propriété topologique.

Tout espace topologique connexe par arcs est connexe. L'énoncé réciproque est faux ; essayez de trouver un exemple d'un espace topologique connexe qui n'est pas connexe par arcs.

Soit X un espace topologique tel que tout point de X ait un voisinage connexe par arcs. Alors,

- toute composante connexe par arcs de X est un sous-ensemble ouvert de X ;
- X est connexe par arcs si et seulement si X est connexe.

En effet, soit $C \subset X$ une composante connexe par arcs, et soit $x \in C$ un point. Il existe un voisinage U connexe par arcs de x. Donc, $U \subset C$ et C est un voisinage de x. Pour démontrer la deuxième affirmation, remarquons que $C \subset X$ est un sous-ensemble qui est ouvert et fermé au même temps. Donc, si X est connexe, alors C coïncide avec X.

Un espace topologique X est dit *séparé* (où *Hausdorff*) si, pour deux points distincts quelconques p et q de X, on a des voisinages $V(p)$ et $V(q)$ de p et q, respectivement, tels que $V(p) \cap V(q) = \varnothing$.

Remarquons que tout espace métrique est séparé.

On dit qu'un sous-ensemble $A \subset X$ est séparé si A est séparé pour la topologie induite. Tout sous-ensemble dans un espace topologique séparé est séparé.

Soit $\{p_n\}$ une suite de points d'un espace topologique X. Un point $a \in X$ s'appelle une *limite* de la suite $\{p_n\}$ si, pour tout voisinage U de a, il existe un nombre N tel que $p_n \in U$ pour tout $n > N$. Si a est une limite de $\{p_n\}$, on dit que la suite $\{p_n\}$ *converge* vers a.

Si X est un espace topologique séparé, alors toute suite de points de X a au plus une limite.

Si $f : X \to Y$ est une application continue et X est un espace topologique séparé, l'image $f(X)$ de X n'est pas forcement séparé.

La propriété d'être séparé porte aussi le nom du *deuxième axiome de séparation*. Il y a d'autres axiomes de séparation. On liste ici quelques uns de ces axiomes.

- **Séparation** T_0. On dit qu'un espace topologique X est *de Kolmogorov*, ou vérifie la *propriété* T_0 si, pour deux points distincts quelconques de X, l'un (au moins) des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point.
- **Séparation** T_1. On dit qu'un espace topologique X vérifie la *propriété* T_1 si, pour deux points distincts quelconques de X, chacun des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point. Autrement dit, un espace topologique X vérifie la propriété T_1 si et seulement si tout point de X constitue un sous-ensemble fermé.
- **Séparation** T_3. On dit qu'un espace topologique X vérifie la *propriété* T_3 si, pour tout point $x \in X$ et tout sous-ensemble fermé $F \subset X$ disjoint de x, il existe deux sous-ensembles ouverts disjoints de X dont l'un contient x et l'autre contient F.
- **Séparation** T_4. On dit qu'un espace topologique X vérifie la *propriété* T_4 si, pour deux sous-ensembles fermés disjoints quelconques $F_1 \subset X$ et $F_2 \subset X$, il existe deux sous-ensembles ouverts disjoints de X dont l'un contient F_1 et l'autre contient F_2.

On dit qu'un espace topologique est *régulier* (respectivement, *normal*) s'il vérifie les axiomes T_1 et T_3 (respectivement, T_1 et T_4). Tout espace topologique normal est régulier et séparé. Tout espace métrique est normal.

On dit qu'un espace topologique X est

- *à base dénombrable* si X admet une base dénombrable ;
- *séparable* si X admet un sous-ensemble partout dense et dénombrable ;
- *à bases dénombrables de voisinages* si tout point $x \in X$ possède une base de voisinages dénombrable, c'est-à-dire, si, pour tout point $x \in X$, il existe une suite V_0, V_1, V_2, ... de voisinages de x telle que tout voisinage de x contienne au moins un des voisinages V_n.

Si X est à base dénombrable, alors X est séparable. L'énoncé réciproque est faux (essayez de trouver un exemple d'un espace topologique séparable qui n'est pas à base dénombrable). D'autre part, un espace métrique séparable est à base dénombrable. Si X est à base dénombrable, alors X est à bases dénombrables de voisinages. L'énoncé réciproque est faux.

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. Si X est séparable, alors $f(X)$ est aussi séparable. Par contre, il n'est pas suffisant de supposer que X est à base dénombrable pour affirmer que $f(X)$ est à base dénombrable.

Soit X un espace topologique. Un *recouvrement ouvert* de X est une collection de sous-ensembles ouverts $\{V_j\}_{j\in J}$ de X telle que $X = \cup_{j\in J} V_j$. Le théorème de Lindelöf affirme que, pour tout espace topologique X à base dénombrable, tout recouvrement ouvert de X possède un sous-recouvrement dénombrable.

Un espace topologique X est dit *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert de X possède un sous-recouvrement fini. Un sous-ensemble $A \subset X$ d'un espace topologique X est dit quasi-compact si A est quasi-compact pour la topologie induite.

Exemples.

- Tout ensemble fini muni d'une topologie arbitraire est quasi-compact.
- Tout ensemble X muni de la topologie anti-discrète est quasi-compact.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard n'est pas quasi-compact. Par contre, tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ de la forme $[a; b]$ (où a et b sont des nombres réels tels que $a < b$) est quasi-compact.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie "flèche" n'est pas quasi-compact. Par contre, le sous-ensemble $[0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie induite par la topologie "flèche".

- L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Zariski est quasi-compact.

Si X est un espace topologique quasi-compact et $A \subset X$ est un sous-ensemble fermé, alors A est quasi-compact.

Si X est un espace topologique séparé et $A \subset X$ est sous-espace topologique quasi-compact, alors A est un sous-ensemble fermé de X.

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. Si X est quasi-compact, alors $f(X)$ est aussi quasi-compact.

Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y est dite *fermée* (respectivement, *ouverte*) si l'image par f de tout sous-ensemble fermé (respectivement, ouvert) de X est un sous-ensemble fermé (respectivement, ouvert) de Y.

Une application continue et bijective est un homéomorphisme si et seulement si elle est fermée. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre un espace topologique quasi-compact X et un espace topologique séparé Y ; alors, l'application f est fermée. Par conséquent, une application continue et bijective entre un espace topologique quasi-compact et un espace topologique séparé est un homéomorphisme.

Un espace topologique quasi-compact et séparé est dit *compact*. Tout espace topologique compact est normal.

1.4. **Constructions topologiques.** A partir d'un espace topologique (ou à partir de plusieurs espaces topologiques), on peut construire d'autres espaces topologiques. Par exemple, si on a un espace topologique X, on peut considérer tous les sous-ensembles de X munis de la topologie induite. Dans cette section, nous allons mentionner deux autres constructions d'espaces topologiques.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Considérons le produit cartésien $X \times Y$ de X et Y et munissons ce produit de la topologie (dite *topologie produit*) dont une base β est formée par tous les sous-ensembles $D \subset X \times Y$ de la forme $D = A \times B$, où $A \subset X$ et $B \subset Y$ sont des sous-ensembles ouverts (vérifiez que cette collection β est, effectivement, une base d'une topologie sur $X \times Y$). Cette définition se généralise immédiatement au cas d'un nombre fini arbitraire de facteurs.

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ des sous-ensembles (munis de la topologie induite). Alors, la topologie produit de $A \times B$ coïncide avec la topologie induite de $A \times B \subset X \times Y$.

Pour deux espaces topologiques quelconques X et Y, l'application $f : X \times Y \to Y \times X$ définie par $f(x, y) = (y, x)$ est un homéomorphisme entre les espaces topologiques $X \times Y$ et $Y \times X$. Pour trois espaces

topologiques quelconques X, Y et Z, les espaces topologiques

$$(X \times Y) \times Z,\ X \times (Y \times Z),\ X \times Y \times Z$$

sont naturellement homéomorphes deux à deux.

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ des sous-ensembles fermés. Alors, $A \times B$ est un sous-ensemble fermé de $X \times Y$.

Si X et Y sont deux espaces topologiques, alors les deux projections $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ et $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sont des applications continues. La topologie produit sur $X \times Y$ est la topologie la moins fine pour laquelle les projections pr_X et pr_Y sont continues.

Pour tout point $x \in X$, la fibre $\mathrm{pr}_X^{-1}(x)$ de pr_X au-dessus de x (c'est-à-dire, le sous-espace topologique $\{x\} \times Y \subset X \times Y$) est homéomorphe à Y ; un homéomorphisme est donné par la restriction de pr_Y sur $\{x\} \times Y$. De façon similaire, pour tout point $y \in Y$, la fibre $\mathrm{pr}_Y^{-1}(y)$ de pr_Y au-dessus de y (c'est-à-dire, le sous-espace topologique $X \times \{y\} \subset X \times Y$) est homéomorphe à X ; un homéomorphisme est donné par la restriction de pr_X sur $X \times \{y\}$.

Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et soit $f : Z \to X \times Y$ une application. Les applications $f_1 = \mathrm{pr}_X \circ f$ et $f_2 = \mathrm{pr}_Y \circ f$ s'appellent *applications coordonnées* de f. Pour deux applications quelconques $f_1 : Z \to X$ et $f_2 : Z \to Y$, il existe une unique application $f : Z \to X \times Y$ telle que $f_1 = \mathrm{pr}_X \circ f$ et $f_2 = \mathrm{pr}_Y \circ f$. L'application f est continue si et seulement si les applications f_1 et f_2 sont continues.

Pour deux applications quelconques $g_1 : X_1 \to Y_1$ et $g_1 : X_1 \to Y_1$, on peut considérer l'application

$$g_1 \times g_2\ :\ X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

définie par $(x_1, x_2) \mapsto (g_1(x_1), g_2(x_2))$. L'application $g_1 \times g_2$ s'appelle le *produit* des applications g_1 et g_2. Si les applications g_1 et g_2 sont continues (respectivement, ouvertes), alors l'application $g_1 \times g_2$ est aussi continue (respectivement, ouverte) ; essayez de trouver un exemple d'applications fermées g_1 et g_2 telles que l'application $g_1 \times g_2$ ne soit pas fermée.

L'espace topologique $X \times Y$ est

- séparé si X et Y sont séparés,
- régulier si X et Y sont réguliers,
- séparable si X et Y sont séparables,
- à base dénombrable si X et Y sont à bases dénombrables,
- à bases dénombrables de voisinages si X et Y sont à bases dénombrables de voisinages,
- connexe si X et Y sont connexes,

- connexe par arcs si X et Y sont connexes par arcs,
- quasi-compact si X et Y sont quasi-compacts.

Introduisons maintenant la notion de topologie quotient. Soit (X, τ) un espace topologique. Une *partition* de X est un recouvrement de X par des sous-ensembles non vides (pas forcement ouverts) qui sont deux à deux disjoints. Une partition de X fournit une relation d'équivalence sur X : deux éléments quelconques de X sont declarés équivalents s'ils appartiennent au même sous-ensemble de la partition. Inversement, toute relation d'équivalence sur X produit une partition de X : les sous-ensembles de la partition sont les classes d'équivalence par rapport à la relation d'équivalence choisie.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $X/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$, et on note $\mathrm{pr}\colon X \to X/\sim$ l'application canonique (qui associe à tout point sa classe d'équivalence). On définit une topologie τ' sur $X/\sim$ par la condition suivante : $V \in \tau'$ si et seulement si $\mathrm{pr}^{-1}(V) \in \tau$ (vérifiez que cette condition définit, effectivement, une topologie sur $X/\sim$). La topologie τ' sur $X/\sim$ s'appelle *topologie quotient*. Pour la topologie quotient, l'application $\mathrm{pr}\colon X \to X/\sim$ est continue. En fait, la topologie τ' est la topologie la plus fine sur $X/\sim$ pour laquelle l'application $\mathrm{pr}\colon X \to X/\sim$ est continue. On dit que pr est l'*application quotient*.

Un sous-ensemble $F \subset X/\sim$ est fermé (pour la topologie quotient) si et seulement si $\mathrm{pr}^{-1}(F)$ est un sous-ensemble fermé de X.

Pour toute application $f\colon X \to Y$ continue et constante sur les classes d'équivalence de $\sim$, il existe une unique application continue $\widetilde{f}\colon X/\sim \longrightarrow Y$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \mathrm{pr}$. A homéomorphisme près, $(X/\sim, \tau')$ est l'unique espace topologique qui satisfait cette propriété.

Pour toute relation d'équivalence sur un espace topologique X, on considère l'ensemble des classes d'équivalence comme espace topologique (muni de la topologie quotient). On l'appelle *espace quotient*. Si X est un espace topologique et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors l'espace quotient $X/\sim$ est

- connexe, si X est connexe,
- connexe par arcs, si X est connexe par arcs,
- séparable, si X est séparable,
- quasi-compact, si X est quasi-compact.

Si X est séparé, l'espace quotient $X/\sim$ n'est pas forcement séparé. Par exemple, l'espace quotient de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie standard) pour la partition formée par deux sous-ensembles $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\mathbb{R}_{<0}$ n'est pas séparé.

Soit X un espace topologique pour lequel on fixe une partition (donc, une relation d'équivalence $\sim$). Pour tout sous-ensemble $A \subset X$, on appelle *saturé* de A le sous-ensemble $\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr}(A))$, où $\mathrm{pr} : X \to X/\sim$ est l'application quotient. On dit que la relation d'équivalence est *ouverte* (respectivement, *fermée*) si, pour tout sous-ensemble $A \subset X$ qui est ouvert (respectivement, fermé), le saturé de A est ouvert (respectivement, fermé). Une relation d'équivalence est ouverte (respectivement, fermée) si et seulement si l'application quotient est ouverte (respectivement, fermée).

L'espace quotient d'un espace topologique normal par rapport à une relation d'équivalence fermée est normal. L'espace quotient d'un espace topologique à base dénombrable (respectivement, à bases dénombrables de voisinages) par rapport à une relation d'équivalence ouverte est à base dénombrable (respectivement, à bases dénombrables de voisinages).

1.5. **Groupes topologiques et opérations continues de groupes topologiques.** Un *groupe topologique* est un espace topologique muni d'une structure de groupe compatible avec la structure topologique, c'est-à-dire, un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que les deux applications

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

soient continues.

Un espace topologique X est muni d'une *opération continue* d'un groupe topologique G par la donnée d'une application continue

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ pour tous g, h dans G et tout x dans X,
- et $e \cdot x = x$ pour tout x dans X (ici, $e \in G$ est l'élément neutre du groupe topologique G).

Dans ce cas, on dit aussi que G *opère continûment* sur X.

Soit X un espace topologique muni d'une opération continue d'un groupe topologique G. Tout élément g de G définit un homéomorphisme de X dans X.

Pour tout point $x \in X$, on note $G \cdot x$ l'*orbite* de x (c'est-à-dire, le sous-ensemble de X formé par les points de la forme $g \cdot x$, où $g \in G$), et on note G_x le *stabilisateur* de x (c'est-à-dire, le sous-groupe de G formé par les éléments g tels que $g \cdot x$ coïncide avec x).

On note X/G l'ensemble des orbites de l'opération de G sur X. La relation "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence ouverte dans X. En effet, si $V \subset X$ est un sous-ensemble ouvert, alors, pour tout $g \in G$, le sous-ensemble $g \cdot V \subset X$ est aussi ouvert (puisque g définit un homéomorphisme de X dans X). Le saturé de V est la réunion des sous-ensembles de la forme $g \cdot V$, où $g \in G$. Par conséquent, le saturé de V est ouvert. En particulier, l'application quotient $\mathrm{pr} : X \to X/G$ est une application ouverte.

Une opération de G sur X est dite *libre* si les stabilisateurs de tous les points de X sont triviaux (dans ce cas, on dit aussi que G opère *librement* sur X). Une opération de G sur X est dite *propre* si, pour tout sous-ensemble quasi-compact $K \subset X$, l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $(g \cdot K) \cap K \neq \varnothing$ est fini (dans ce cas, on dit aussi que G opère *proprement* sur X). Une opération d'un groupe discret G sur X est dite *totalement discontinue* si tout point de X possède un voisinage ouvert V tel que $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout élément $g \in G$ différent de l'élément neutre.

Si un groupe fini discret G opère librement sur un espace topologique séparé, alors l'opération de G est totalement discontinue. Plus généralement, si un groupe discret G opère librement et proprement sur un espace topologique X que l'on suppose localement compact (c'est-à-dire, un espace topologique séparé dont tout point admet un voisinage compact), alors l'opération de G est totalement discontinue. De plus, sous ces hypothèses, l'espace quotient X/G est séparé.

2. Homotopie

2.1. **Définitions.** La notion d'homotopie formalise une conception intuitive de déformation continue d'applications.

Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues entre des espaces topologiques X et Y. Comme d'habitude, on pose $I = [0; 1]$. Une *homotopie* entre f et g est une application continue $H : X \times I \to Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout point $x \in X$. S'il existe une homotopie entre f et g, on dit que f et g sont *homotopes*. Dans ce cas, on écrit $f \sim g$.

Soit H une homotopie entre $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$. Pour tout point $x \in X$ et pour tout $t \in I$, on pose $H(x, t) = h_t(x)$. Cette notation symbolise un point de vue important sur H : pour chaque $t \in I$ fixé,

on a une application $x \mapsto h_t(x)$, et l'homotopie H peut être considérée comme famille d'applications $h_t : X \to Y$ indexées par $t \in I$. Chaque application h_t, $t \in I$, est continue (h_t est une restriction de l'homotopie H sur la fibre $X \times \{t\} \subset X \times I$).

L'application h_0 coïncide avec f et l'application h_1 coïncide avec g. Donc, une homotopie entre f et g peut être vue comme famille continue d'applications qui relie f et g.

La relation **être homotope** est une relation d'équivalence. En effet,

- pour toute application continue $f : X \to Y$, l'application $H : X \times I \to Y$ définie par $H(x,t) = x$ est une homotopie entre f et f ;
- si H est une homotopie entre des applications $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$, alors l'application $H' : X \times I \to Y$ définie par $H'(x,t) = H(x, 1-t)$ est une homotopie entre g et f ;
- si H est une homotopie entre des applications $f : X \to Y$ et $f' : X \to Y$, et H' est une homotopie entre des applications $f' : X \to Y$ et $f'' : X \to Y$, alors l'application $H'' : X \times I \to Y$ définie par

$$H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & \text{si } \ t \in [0;1/2], \\ H'(x,2t-1), & \text{si } \ t \in [1/2;1], \end{cases}$$

  est une homotopie entre f et f''.

Par conséquent, on a une partition de l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des applications continues entre X et Y en classes d'équivalence. Ces classes s'appellent les *classes d'homotopie* des applications de X dans Y. L'ensemble des classes d'homotopie des applications entre X et Y est noté $\pi(X,Y)$. Si une application $f : X \to Y$ est homotope à une application constante, on dit que f est *homotope à zéro*.

Soit n un nombre entier positif ou nul. Pour tout espace topologique X, deux applications continues $f : X \to \mathbb{R}^n$ et $g : X \to \mathbb{R}^n$ quelconques sont homotopes. En effet, l'application $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

est une homotopie entre f et g.

Donnons maintenant un exemple de deux applications continues qui ne sont pas homotopes. Soit X un espace topologique quelconque, et soit Y un espace topologique ayant au moins deux composantes connexes par arcs. Considérons deux points y_1 et y_2 de Y tels que ces points appartiennent à des composantes connexes par arcs différentes de Y. Posons $f_1(x) = y_1$ et $f_2(x) = y_2$ pour tout point $x \in X$. Alors, les deux applications constantes $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : X \to Y$ ne sont

pas homotopes. En effet, si $H : X \times I \to Y$ est une homotopie entre f_1 et f_2, alors, pour tout point $x \in X$, on a un chemin $\gamma_x : I \to Y$, défini par $\gamma_x(t) = H(x,t)$, qui relie y_1 et y_2. Par contre, si les points y_1 et y_2 appartiennent à la même composante connexe par arcs de Y, alors les applications constantes f_1 et f_2 sont homotopes.

Proposition 1. *Soient M, N, X et Y des espaces topologiques, et soient $g : M \to X$, $f : X \to Y$, $f' : X \to Y$ et $h : Y \to N$ des applications continues telles que $f \sim f'$. Soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et f'. Alors, $h \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I)$ est une homotopie entre $h \circ f \circ g : M \to N$ et $h \circ f' \circ g : M \to N$ (ici $\mathrm{id}_I : I \to I$ est l'application identité).*

Démonstration. L'application $G = h \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I) : M \times I \to N$ est continue. De plus, pour tout point $x \in M$, on a

$$G(x,0) = h(H(g(x),0)) = h(f(g(x))),$$
$$G(x,1) = h(H(g(x),1)) = h(f'(g(x))).$$

Donc, G est une homotopie entre $h \circ f \circ g$ et $h \circ f' \circ g$. □

Proposition 2. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et soient $f : Z \to X \times Y$ et $g : Z \to X \times Y$ deux applications continues. Alors, les applications f et g sont homotopes si et seulement si $pr_X \circ f : Z \to X$ est homotope à $pr_X \circ g : Z \to X$ et $pr_Y \circ f : Z \to Y$ est homotope à $pr_Y \circ g : Z \to Y$ (ici $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ et $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sont les projections).*

Démonstration. Supposons que les applications f et g sont homotopes. Soit $H : Z \times I \to X \times Y$ une homotopie entre f et g. Alors, $\mathrm{pr}_X \circ H$ est une homotopie entre $pr_X \circ f$ et $pr_X \circ g$, et $\mathrm{pr}_Y \circ H$ est une homotopie entre $pr_Y \circ f$ et $pr_Y \circ g$.

Supposons maintenant que $pr_X \circ f$ et $pr_X \circ g$ sont homotopes et que $pr_Y \circ f$ et $pr_Y \circ g$ sont homotopes. Soit $H_X : Z \times I \to X$ une homotopie entre $pr_X \circ f$ et $pr_X \circ g$, et soit $H_Y : Z \times I \to Y$ une homotopie entre $pr_Y \circ f$ et $pr_Y \circ g$. Alors, l'application $H : Z \times I \to X \times Y$ définie par $(z,t) \mapsto (H_X(z,t), H_Y(z,t))$ est une homotopie entre f et g. □

Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $A \subset X$ un sous-espace topologique. Une homotopie $H : X \times I \to Y$ est dite *relative à A* si $H(a,t) = H(a,0)$ pour tout $a \in A$ et tout $t \in I$. Si deux applications $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont reliées par une homotopie relative à A, on dit que f et g sont *homotopes relativement à A* et on écrit $f \sim g$ rel A. Bien sûr, deux applications homotopes relativement à A coïncident sur A. La relation **être homotope relativement à** A est

une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation s'appellent *classes de A-homotopie* des applications de X dans Y.

Les démonstrations des deux propositions suivantes sont complètement similaires à celles des Propositions 1 et 2.

Proposition 3. *Soient M, N, X et Y des espaces topologiques, et soit $A \subset X$ un sous-espace topologique. Soient $g : M \to X$, $f : X \to Y$, $f' : X \to Y$ et $h : Y \to N$ des applications continues telles que $f \sim f'\mathrm{rel}\ A$. Soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et f' relative à A. Alors, $h \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I)$ est une homotopie entre $h \circ f \circ g : M \to N$ et $h \circ f' \circ g : M \to N$ relative à $g^{-1}(A)$.* □

Proposition 4. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et soit $A \subset Z$ un sous-espace topologique. Soient $f : Z \to X \times Y$ et $g : Z \to X \times Y$ deux applications continues. Alors, les applications f et g sont homotopes relativement à A si et seulement si $\mathrm{pr}_X \circ f : Z \to X$ est homotope à $\mathrm{pr}_X \circ g : Z \to X$ relativement à A et $\mathrm{pr}_Y \circ f : Z \to Y$ est homotope à $\mathrm{pr}_Y \circ g : Z \to Y$ relativement à A.* □

2.2. **Propriétés homotopiques de la multiplication de chemins.** Soit X un espace topologique, et soient $\gamma : I \to X$ et $\gamma' : I \to X$ deux chemins. Il est facile de vérifier que deux applications γ et γ' sont homotopes si et seulement si $\gamma(I)$ et $\gamma'(I)$ sont dans la même composante connexe par arcs de X. On obtient une notion plus intéressante si on considère les homotopies relatives aux extrémités de I, c'est-à-dire, relatives au sous-ensemble $\{0, 1\} \subset I$.

On dit que deux **chemins** $\gamma : I \to X$ et $\gamma' : I \to X$ sont homotopes si les applications γ et γ' sont homotopes relativement à $\{0, 1\}$. Les classes de $\{0, 1\}$-homotopie des applications de I dans X s'appellent *classes d'homotopie des chemins* dans X. Si γ est un chemin dans X, on note $[\gamma]$ la classe d'homotopie de γ.

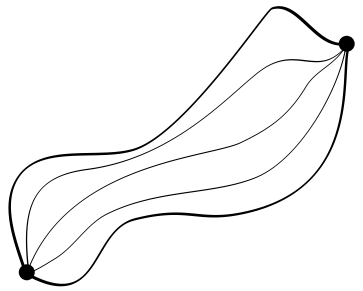

FIGURE 1. Chemins homotopes

Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins dans X tels que le point d'arrivée de γ_1 coïncide avec le point de départ de γ_2, on peut considérer le produit $\gamma_1\gamma_2$ de γ_1 et γ_2.

Proposition 5. *Soit X un espace topologique, et soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans X tels que le point d'arrivée de γ_1 coïncide avec le point de départ de γ_2. Considérons deux chemins γ_1' et γ_2' dans X tels que les chemins γ_1 et γ_1' soient homotopes et les chemins γ_2 et γ_2' soient aussi homotopes. Alors, le point d'arrivée de γ_1' coïncide avec le point de départ de γ_2', et on a $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1'\gamma_2']$.*

Démonstration. L'affirmation sur le point d'arrivée de γ_1' et le point de départ de γ_2' est immédiate. Soit $H_1 : I \times I \to X$ (respectivement, $H_2 : I \times I \to X$) une homotopie entre les chemins γ_1 et γ_1' (respectivement, les chemins γ_2 et γ_2'). Une homotopie $H : I \times I \to X$ entre les chemins $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_1'\gamma_2'$ est donnée par

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s,t), & \text{si } \ s \in [0;1/2], \\ H_2(2s-1,t), & \text{si } \ s \in [1/2;1]. \end{cases}$$

Donc, $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1'\gamma_2']$. □

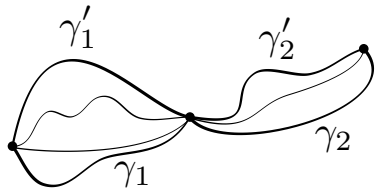

FIGURE 2. Homotopie entre $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_1'\gamma_2'$

La Proposition 5 permet de définir une opération de multiplication sur les classes d'homotopie des chemins dans X : pour deux classes c_1 et c_2 qui sont représentées, respectivement, par des chemins γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on peut définir le produit c_1c_2 qui est la classe du chemin $\gamma_1\gamma_2$.

Considérons des chemins γ_1, γ_2 et γ_3 dans X tels que les produits $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_2\gamma_3$ soient définis (c'est-à-dire, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$). L'égalité $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 = \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ n'est pas forcement vraie, autrement dit, la multiplication de chemins n'est pas, en général, associative. Par contre, pour la multiplication de classes d'homotopie de chemins, on a l'associativité.

Proposition 6. *Considérons des chemins γ_1, γ_2 et γ_3 dans X tels que les produits $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_2\gamma_3$ soient définis. Alors,*

$$([\gamma_1][\gamma_2])[\gamma_3] = [\gamma_1]([\gamma_2][\gamma_3]).$$

Démonstration. Considérons l'application $\psi : I \to I$ définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ t - \frac{1}{4}, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}], \\ 2t - 1, & \text{si } \ t \in [\frac{3}{4}; 1]. \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'application ψ est continue et que, pour tout $t \in I$, on a

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3(\psi(t)) = \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)(t).$$

D'autre part, on a $\psi \sim \mathrm{id}_I$ rel $\{0, 1\}$. Une homotopie $H : I \times I \to I$ relative à $\{0, 1\}$ entre ψ et id_I est donnée par

$$H(s, t) = (1 - t)\psi(s) + ts.$$

Il reste à appliquer la Proposition 3. □

La construction de l'homotopie H dans la démonstration de la Proposition 6 se généralise et donne l'énoncé suivant.

Lemma 7. *Soit $\psi : I \to I$ un chemin dont le point de départ coïncide avec 0 et le point d'arrivée coïncide avec 1. Alors, le chemin ψ est homotope au chemin $\mathrm{id}_I : I \to I$.* □

Rappelons que, pour tout point $x \in X$, on note e_x le chemin constant $I \to X$ défini par $e_x : t \mapsto x$, $t \in I$.

Proposition 8. *Soit X un espace topologique, et soit $x \in X$ un point. Considérons des chemins γ_1 et γ_2 dans X tels que $\gamma_1(1) = x = \gamma_2(0)$. Alors,*

$$[\gamma_1][e_x] = [\gamma_1], \quad [e_x][\gamma_2] = [\gamma_2].$$

Démonstration. Considérons l'application $\psi_1 : I \to I$ définie par

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

et l'application $\psi_2 : I \to I$ définie par

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2t - 1, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Les applications ψ_1 et ψ_2 sont continues et, pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma_1 e_x(t) = \gamma_1(\psi_1(t)),$$

$$e_x\gamma_2(t) = \gamma_2(\psi_2(t)).$$

Il reste à appliquer le Lemme 7 et la Proposition 3. □

L'énoncé suivant est similaire au Lemme 7.

Lemma 9. *Soit $\psi : I \to I$ un chemin dont le point de départ et le point d'arrivée coïncident avec 0. Alors, le chemin ψ est homotope au chemin constant $e_0 : I \to I$.* □

Proposition 10. *Soit X un espace topologique, et soit γ un chemin dans X. On pose $p = \gamma(0)$ et $q = \gamma(1)$. Alors,*

$$[\gamma][\gamma^{-1}] = [e_p], \quad [\gamma^{-1}][\gamma] = [e_q],$$

où γ^{-1} est le chemin inverse de γ.

Démonstration. Considérons l'application $\psi : I \to I$ définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2 - 2t, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

L'application ψ est continue et, pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma\gamma^{-1}(t) = \gamma(\psi(t)),$$
$$\gamma^{-1}\gamma(t) = \gamma^{-1}(\psi(t)).$$

Il reste à appliquer le Lemme 9 et la Proposition 3. □

3. Groupe fondamental

3.1. **Définition et premières propriétés.** Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Un *lacet* de base x_0 est un chemin $\gamma : I \to X$ tel que le point de départ et le point d'arrivée de γ coïncident avec x_0. Notons $\Omega_1(X, x_0)$ l'ensemble des lacets de base x_0 dans X, et notons $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie des lacets de base x_0. La multiplication de chemins munit chacun des deux ensembles $\Omega_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_0)$ d'une opération de multiplication.

Proposition 11. *Pour tout espace topologique non vide X et pour tout point $x_0 \in X$, l'ensemble $\pi_1(X, x)$ muni de l'opération de multiplication (provenant de la multiplication de chemins) est un groupe.*

Démonstration. D'après la Proposition 6, l'opération de multiplication sur $\pi_1(X, x_0)$ est associative.

Notons e_{x_0} le lacet constant de base x_0, c'est-à-dire, le chemin $e_{x_0} : I \to X$ tel que $e(t) = x_0$ pour tout $t \in I$. La Proposition 8 implique

que la classe d'homotopie $\varepsilon = [e_{x_0}]$ de e_{x_0} vérifie les relations suivantes pour tout $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$:

$$\varepsilon\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon.$$

De plus, pour toute classe $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, on peut choisir un répresentant γ de α et considérer la classe d'homotopie $[\gamma^{-1}]$ du lacet inverse γ^{-1}. On pose $\alpha^{-1} = [\gamma^{-1}]$. D'après la Proposition 10, on a $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ et $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$. □

Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le *groupe fondamental* de X de base x_0.

Exemple. Soit n un nombre entier positif ou nul. Le groupe $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ est trivial. (Ici $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard.) En effet, tout lacet de base 0 dans $\mathbb{R}^n$ est homotope au lacet constant e_0.

Exercice. Soit X un ensemble non vide muni de la topologie anti-discrète, et soit $x_0 \in X$ un point. Trouver le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition 12. *Soit X un espace topologique non vide, et soit $\gamma : I \to X$ un chemin. On pose $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$. Alors, l'application $\varphi_\gamma : \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$ définie par*

$$\alpha \mapsto [\gamma]\alpha[\gamma^{-1}]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons que φ_γ est un morphisme de groupes. Pour deux éléments quelconques α_1 et α_2 de $\pi_1(X, y)$, on a

$$\varphi_\gamma(\alpha_1\alpha_2) = [\gamma](\alpha_1\alpha_2)[\gamma^{-1}] = [\gamma]\alpha_1[\gamma^{-1}][\gamma]\alpha_2[\gamma^{-1}] = \varphi_\gamma(\alpha_1)\varphi_\gamma(\alpha_2).$$

De plus, l'application φ_γ est bijective, son inverse est l'application $\varphi_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$. En effet,

$$(\varphi_{\gamma^{-1}} \circ \varphi_\gamma)(\alpha) = [\gamma^{-1}][\gamma]\alpha[\gamma^{-1}][\gamma] = \alpha$$

pour tout $\alpha \in \pi_1(X, y)$. De façon similaire, $\varphi_\gamma \circ \varphi_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ est l'identité. □

L'isomorphisme φ_γ, introduit ci-dessus, s'appelle *isomorphisme de changement de point de base* le long du chemin γ. L'isomorphisme φ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

Corollaire 13. *Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soient x et y deux points de X. Alors, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes.* □

Pour les espaces connexes par arcs, on parle souvent de groupe fondamental sans préciser le point base.

On dit qu'un espace topologique non vide est *simplement connexe* si cet espace est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial. Comme nous avons vu ci-dessus, $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe pour tout entier n positif ou nul.

Proposition 14. *Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. Alors, X est simplement connexe si et seulement si deux chemins quelconques dans X qui ont le même point de départ et le même point d'arrivée sont homotopes.*

Démonstration. Supposons que X est simplement connexe. Soient x et y deux points de X, et soient γ_1 et γ_2 deux chemins reliant x et y. Alors, les lacets $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ et $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ sont homotopes aux lacets constants e_x et e_y, respectivement. Donc,

$$[\gamma_1] = [\gamma_1][\gamma_1^{-1}][\gamma_2] = [\gamma_2].$$

L'implication réciproque est immédiate. □

3.2. **Applications continues et groupe fondamental.** Soient X et Y deux espaces topologiques non vides, et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des points. A toute application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = y_0$, nous allons associer un morphisme $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ des groupes fondamentaux $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$.

La construction est la suivante. A tout lacet γ de base x_0 dans X, on associe le lacet $f \circ \gamma$ de base y_0 dans Y. Si deux lacets γ_1 et γ_2 de base x_0 sont homotopes, alors les lacets $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ de base y_0 sont aussi homotopes. En effet, une homotopie H entre les lacets γ_1 et γ_2 produit une homotopie $f \circ H$ entre les lacets $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$. Par conséquent, on obtient une application f_* de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(Y, y_0)$.

Proposition 15. *L'application $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. Soient α et α' deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$, et soient γ et γ' des représentants de α et α', respectivement. Alors,

$$f_*(\alpha\alpha') = [f \circ (\gamma\gamma')] = [(f \circ \gamma)(f \circ \gamma')] = f_*(\alpha)f_*(\alpha').$$

□

On dit que f_* est le *morphisme induit* par f. L'énoncé suivant est immédiat.

Proposition 16. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques non vides, soit $x_0 \in X$ un point, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications continues. Alors,*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, g(f(x_0))).$$

De plus, si $\mathrm{id} : X \to X$ *est l'identité, alors* $\mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *est aussi l'identité.* □

Corollaire 17. *Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors, pour tout point $x_0 \in X$, le morphisme induit $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme de groupes ayant $(f^{-1})_*$ pour inverse.*

Démonstration. L'application $f^{-1} \circ f$ est l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$. Donc, le morphisme $(f^{-1})_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est l'identité. De façon similaire, $f_* \circ (f^{-1})_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ est aussi l'identité. □

Proposition 18. *Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Notons C la composante connexe par arcs de X telle que $x_0 \in C$. Alors, le morphisme*

$$\mathrm{in}_* : \pi_1(C, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

induit par l'inclusion $\mathrm{in} : C \hookrightarrow X$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Tout lacet de base x_0 dans X est entièrement contenu dans C. Donc, le morphisme in_* est surjectif. Pour montrer que in_* est injectif, considérons un lacet γ de base x_0 dans X tel que γ soit homotope au lacet constant e_{x_0}. Notons $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ une homotopie reliant γ et e_{x_0}. L'image de H est entièrement contenue dans C, donc H fournit une homotopie entre C et e_{x_0} vus comme lacets dans C. □

Proposition 19. *Soient X et Y des espaces topologiques non vides, soit $x_0 \in X$ un point, et soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ des applications continues qui sont homotopes relativement à $\{x_0\} \subset X$. Alors,$f_* = g_*$.*

Démonstration. Si $H : X \times I \to Y$ est une homotopie relative à $\{x_0\}$ entre f et g, alors, pour tout lacet γ de base x_0 dans X, l'homotopie $H \circ (\gamma \times Id_I)$ certifie que les lacets $f \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$ de base $f(x_0) = g(x_0)$ sont homotopes (voir la Proposition 3). □

Proposition 20. *Soient X et Y des espaces topologiques non vides, et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des points. Alors, l'application*

$$P : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

définie par $P(\alpha) = ((\mathrm{pr}_X)_*(\alpha), (\mathrm{pr}_Y)_*(\alpha))$, *est un isomorphisme.*

Démonstration. L'application P est clairement un morphisme de groupes. Si $\gamma_X : I \to X$ est un lacet de base x_0 et si $\gamma_Y : I \to Y$ est un lacet de base y_0, alors $\gamma : I \to X \times Y$ définie par $\gamma(t) = (\gamma_X(t), \gamma_Y(t))$ est un lacet de base (x_0, y_0). Donc, l'application P est surjective.

L'injectivité de P se démontre par les arguments complètement similaires à ceux de la démonstration de la Proposition 4. En effet, considérons un lacet $\gamma : I \to X \times Y$ de base (x_0, y_0) tel que les lacets $\gamma_X = \mathrm{pr}_X \circ \gamma$ et $\gamma_Y = \mathrm{pr}_Y \circ \gamma$ soient homotopes aux lacets constants e_{x_0} et e_{y_0}, respectivement. Soit $H_X : I \times I \to X$ (respectivement, $H_Y : I \times I \to Y$) une homotopie entre les lacets γ_X et e_{x_0} (respectivement, les lacets γ_Y et e_{y_0}). Alors, l'application $H : I \times I \to X \times Y$ définie par $H(s,t) = (H_X(s,t), H_Y(s,t))$ est une homotopie entre γ et le lacet constant $e_{(x_0,y_0)}$. $\square$

3.3. **Types d'homotopie.** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. On dit que f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à $\mathrm{id}_X : X \to X$ et $f \circ g$ soit homotope à $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$.

On dit que deux espaces topologiques X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$. La relation "avoir le même type d'homotopie" est une relation d'équivalence.

Exemples.

- Deux espaces topologiques homéomorphes ont toujours le même type d'homotopie.
- Soit n un nombre entier positif ou nul. L'espace $\mathbb{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un point. Pour vérifier cette affirmation, considérons l'application constante $f : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ et l'inclusion $g : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. L'application composée $f \circ g : \{0\} \to \{0\}$ est l'identité. L'application composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est homotope à $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: une homotopie $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ est donnée par $H(x,t) = tx$.
- Soit n un nombre entier strictement positif. L'espace topologique $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la sphère S^{n-1} de dimension $n-1$ ont le même type d'homotopie. On représente S^{n-1} comme sphère unité dans $\mathbb{R}^n$. Pour f, on utilise l'inclusion de S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour g, on utilise la projection radiale de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur S^{n-1} : $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La composée $g \circ f$ est l'identité sur S^{n-1}. La composée $f \circ g$ est homotope à l'idéntité sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ce qui est certifié par l'homotopie
$$H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

définie par

$$H(x,t) = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx.$$

On dit qu'un espace topologique est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point. Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est contractile pour tout entier n positif ou nul. De façon similaire, la boule unité

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

est contractile pour tout entier n positif ou nul.

Proposition 21. *Soient X et Y deux espaces topologiques non vides et connexes par arcs qui ont le même type d'homotopie. Alors, leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.*

Démonstration. Considérons deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ soit homotope à l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ et $f \circ g$ soit homotope à l'identité $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$. Soit $H : X \times I \to X$ une homotopie entre $g \circ f$ et $\mathrm{id}_X : X \to X$. Soit $x_0 \in X$ un point. On a deux morphismes

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \text{ et } g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(x, g(f(x_0))).$$

Nous allons montrer que la composée

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$$

est un isomorphisme. Plus précisement, nous allons montrer que $g_* \circ f_*$ coïncide avec l'isomorphisme φ_c de changement de point de base le long du chemin $c : I \to X$ défini par $c(t) = H(x_0, t)$ pour tout $t \in I$.

Soit $\gamma : I \to X$ un lacet de base x_0 dans X. Une homotopie $F : I \times I \to X$ entre les lacets $g \circ f \circ \gamma$ et $c\gamma c^{-1}$ est donnée par

$$F(s,t) = \begin{cases} c(3s), & \text{si } \ s \in [0; \frac{t}{3}], \\ H(\gamma(\frac{3}{3-2t}s - \frac{t}{3-2t}), t), & \text{si } \ s \in [\frac{t}{3}; 1 - \frac{t}{3}], \\ c(3-3s), & \text{si } \ s \in [1 - \frac{t}{3}; 1]. \end{cases}$$

Donc, $(g_* \circ f_*)([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma] = [c\gamma c^{-1}] = \varphi_c(\gamma)$. De façon similaire, on montre que la composée $f_* \circ g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$ est aussi un isomorphisme. □

Corollaire 22. *Tout espace topologique contractile est simplement connexe.* □

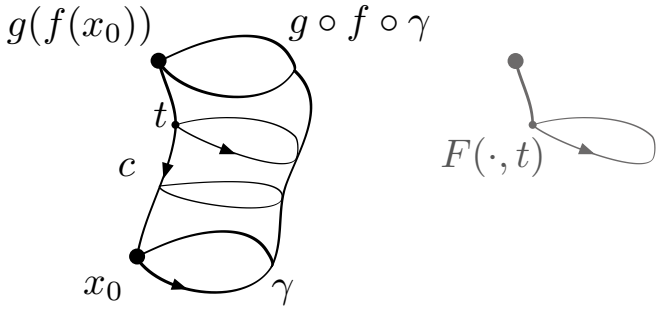

FIGURE 3. Homotopie F

3.4. **Rétractes.** Soit X un espace topologique, et soit $A \subset X$ un sous-espace. On dit que A est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que $r(a) = a$ pour tout point $a \in A$. Une telle application r s'appelle une *rétraction*.

Exemples.

- Pour tout espace topologique X, tout point de X est un rétracte de X.
- Pour deux nombres réels quelconques a et b tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est un rétracte de $\mathbb{R}$.
- La 0-sphère $S^0 = \{-1, 1\}$ n'est pas un rétracte de l'intervalle $D^1 = [-1, 1]$. En effet, l'existence d'une rétraction $r : D^1 \to S^0$ contredit le fait que $S^0 = r(D^1)$ n'est pas connexe.

Proposition 23. *Soit $r : X \to A$ une rétraction, et soit $x_0 \in A$ un point. Notons* $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ *l'inclusion de A dans X. Alors, le morphisme $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ est surjectif et le morphisme* $\mathrm{in}_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *est injectif.*

Démonstration. L'application $r \circ \mathrm{in}$ coïncide avec $\mathrm{id}_A : A \to A$. Donc, $r_* \circ \mathrm{in}_*$ est l'identité $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$. Par conséquent, r_* est surjectif et in_* est injectif. □

On dit que $A \subset X$ est un *rétracte par déformation* de X s'il existe une rétraction $r : X \to A$ telle que la composition $\mathrm{in} \circ r$ de r et de l'inclusion $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ soit homotope à l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$. Une telle application r s'appelle une *rétraction par déformation*. On dit que $r : X \to A$ est une *rétraction forte par déformation* si $\mathrm{in} \circ r$ est homotope à l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ relativement à A.

Une rétraction par déformation est une équivalence d'homotopie. Par conséquent, on a l'énoncé suivant.

Proposition 24. *Soit $r : X \to A$ une rétraction par déformation, et soit $x_0 \in A$ un point. Alors, le morphisme* $\mathrm{in}_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *induit par l'inclusion* $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ *est un isomorpisme.* □

3.5. **Groupe fondamental du cercle.** Le but de cette section est de calculer le groupe fondamental du cercle S^1 (on représente S^1 comme cercle unité dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$).

Notons $\gamma^{(1)} : I \to S^1$ l'application définie par $\gamma^{(1)}(t) = \exp(2\pi i t)$. C'est un lacet de base 1 dans S^1. On pose aussi $\gamma^{(n)}(t) = \exp(2\pi i n t)$ pour tout $t \in I$ et tout entier n. On a $[\gamma^{(n)}] = [\gamma^{(1)}]^n$. Nous allons montrer que l'application $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ définie par $n \mapsto [\gamma^{(n)}]$ est un isomorphisme de groupes.

Proposition 25. *Soit $\gamma : I \to S^1$ un lacet de base 1 dans S^1, et soit $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ un point. Il existe un unique chemin $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ tel que* $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ *et* $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$*, où* $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ *est l'application définie par* $t \mapsto \exp(2\pi i t)$.

Démonstration. L'unicité de $\widetilde{\gamma}$ est immédiate : la différence entre deux tels chemins est une application continue de I dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ (muni de la topologie discrète) ; cette différence est, donc, constante (égale à 0, car les points de départ des deux chemins coïncident).

Pour construire $\widetilde{\gamma}$, considérons un recouvrement ouvert

$$S^1 = (S^1 \setminus \{i\}) \cup (S^1 \setminus \{-i\})$$

de S^1. L'image inverse $\mathrm{Exp}^{-1}(S^1 \setminus \{i\})$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints, tels que la restriction de Exp sur chaque intervalle soit un homéomorphisme entre l'intervalle et $S^1 \setminus \{i\}$; l'application inverse peut être décrite à l'aide de la branche appropriée du logarithme complexe. L'affirmation similaire est vraie aussi pour $S^1 \setminus \{-i\}$.

Puisque l'intervalle I est compact, il peut être divisé en sous-intevalles par une collection finie de points $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$ tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit entirement contenue dans (au moins) un des ensembles $S^1 \setminus \{i\}$ et $S^1 \setminus \{-i\}$.

On définit l'application $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_j]$ par récurrence sur j. Pour $j = 0$, on a $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$. Supposons que $\widetilde{\gamma}$ est déjà défini sur $[0, a_j]$, où $j = 0$, $\ldots$, $k-1$. On a $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{i\}$ ou $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{-i\}$. Supposons, par exemple, que $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{i\}$ (le deuxième cas est complètement similaire). Soit $V \subset \mathbb{R}$ la composante connexe de $\mathrm{Exp}^{-1}(S^1 \setminus \{i\})$ telle que $\widetilde{\gamma}(a_j) \in V$. La restriction ρ de Exp sur V est un homéomorphisme entre V et $S^1 \setminus \{i\}$. Sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$,

on considère la composée $\rho^{-1} \circ (\gamma|_{[a_j;a_{j+1}]})$, cette application se recolle avec l'application $\widetilde{\gamma}$ déjà définie sur $[0, a_j]$ pour donner une application continue $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_{j+1}]$. $\square$

Le chemin $\widetilde{\gamma}$ de la Proposition 25 s'appelle *relèvement* de γ.

Proposition 26. *Soit $\gamma : I \to S^1$ un lacet de base 1 dans S^1, et soit $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ un relèvement de γ. Alors, $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ est un nombre entier qui ne dépend pas du choix de point de départ de $\widetilde{\gamma}$.*

Démonstration. Le nombre $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ est entier, car γ est un lacet et $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Deux relèvements quelconques de γ diffèrent par une translation. $\square$

La différence $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ s'appelle le *degré* de γ. Par exemple, pour tout entier n, le degré de $\gamma^{(n)}$ est égal à n.

Proposition 27. *Soient $\gamma_1 : I \to S^1$ et $\gamma_2 : I \to S^1$ deux lacets homotopes de base 1 dans S^1. Alors, γ_1 et γ_2 ont le même degré.*

Démontration. Les arguments sont très similaires à ceux de la démonstration de la Proposition 25.

Soient $\widetilde{\gamma}_1 : I \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{\gamma}_2 : I \to \mathbb{R}$ les relèvements de γ_1 et γ_2, respectivement, tels que $\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(0) = 0$. Soit $H : I \times I \to S^1$ une homotopie entre les lacets γ_1 et γ_2.

Puisque le carré $I \times I$ est compact, il peut être divisé en rectangles

$$R_{ij} = \{(s,t) \in I \times I \mid a_i \leq s \leq a_{i+1},\ b_j \leq t \leq b_{j+1}\},$$
$$i = 0, \ldots, k-1, \quad j = 0, \ldots, \ell - 1,$$

donnés par deux collections finies de points

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1,$$
$$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{\ell-1} < b_\ell = 1,$$

tels que l'image par H de tout rectangle R_{ij} soit entirement contenue dans (au moins) un des ensembles $S^1 \setminus \{i\}$ et $S^1 \setminus \{-i\}$. Un relèvement de H, c'est-à-dire, une application continue $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{H} = H$ et $\widetilde{H}(0,0) = 0$, peut être construit par une procédure récursive similaire à celle de la démonstration de la Proposition 25.

L'application $t \mapsto \widetilde{H}(0,t)$ est à valeurs entières, donc, constante sur l'intervalle I. De même façon, l'application $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ est constante sur I. De plus, l'unicité de relèvement de chemins implique que $\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{\gamma}_1(s)$ et $\widetilde{H}(s,1) = \widetilde{\gamma}_2(s)$ pour tout $s \in I$. Par conséquent, les chemins $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ sont homotopes, et les lacets γ_1 et γ_2 ont le même degré. $\square$

La proposition 27 implique que, à tout élément $\alpha \in \pi_1(S^1, 1)$ on peut associer un degré $d(\alpha)$: c'est le degré de tout représentant de α.

Proposition 28. *L'application $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, qui associe à tout élément $\alpha \in \pi_1(S^1, 1)$ son degré $d(\alpha)$, est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. Montrons d'abord que $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est une bijection. L' application d est clairement surjective : pour tout nombre entier n, on peut choisir un chemin $\delta : I \to \mathbb{R}$ qui relie 0 et n, et $\mathrm{Exp} \circ \delta$ est un lacet de base 1 et de degré n (on peut aussi prendre $\gamma^{(n)}$, c'est un lacet de degré n).

L'application $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est injective. En effet, soit n un nombre entier, et soient α_1 et α_2 des éléments de degré n de $\pi_1(S^1, 1)$. Considérons des lacets γ_1 et γ_2 représentant α_1 et α_2, respectivement. Soient $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ les relèvements de γ_1 et γ_2, respectivement, reliant 0 et n. Alors, $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ sont homotopes (*cf.* Lemme 7) : une homotopie est donnée par

$$H(s, t) = (1 - t)\widetilde{\gamma}_1(s) + t\widetilde{\gamma}_2(s).$$

Par consésquent, l'application $\mathrm{Exp} \circ H$ certifie que les lacets γ_1 et γ_2 sont homotopes.

Montrons maintenant que $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes. Considérons des lacets γ_1 et γ_2 de base 1 dans S^1. Soit $\widetilde{\gamma}_1 : I \to \mathbb{R}$ le relèvement de γ_1 tel que $\widetilde{\gamma}_1(0) = 0$, et soit $\widetilde{\gamma}_2 : I \to \mathbb{R}$ le relèvement de γ_2 tel que $\widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}_1(1)$. Le degré $d(\gamma_1\gamma_2)$ est égal à $\widetilde{\gamma}_2(1)$. D'autre part, $d(\gamma_1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$ et $d(\gamma_2) = \widetilde{\gamma}_2(1) - \widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}_2(1) - \widetilde{\gamma}_1(1)$. Donc, $d(\gamma_1\gamma_2) = d(\gamma_1) + d(\gamma_2)$. □

Nous avons montré que le groupe fondamental $\pi_1(S^1, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Corollaire 29. *Pour tout entier m strictement positif, le groupe fondamental de $(S^1)^m$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$.* □

3.6. **Quelques applications.** La première application de résultats présentés ci-dessus est l'énoncé suivant.

Proposition 30. *Le cercle $S^1 \subset D^2$ n'est pas un rétracte de la boule $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

Démonstration. La boule D^2 est simplement connexe, et le groupe fondamental de S^1 est isomorphe $\mathbb{Z}$. Puisqu'il n'y a pas de morphisme surjective du groupe trivial dans $\mathbb{Z}$, la Proposition 23 implique que S^1 n'est pas un rétracte de D^2. □

Corollaire 31 (Théorème de Brouwer)**.** *Toute application continue $f : D^2 \to D^2$ a au moins un point fixe.*

Démonstration. Supposons que $f : D^2 \to D^2$ est une application continue qui n'admet aucun point fixe. Pour tout point $x \in D^2$, il existe un nombre réel $\lambda_x \geq 0$ tel que $\|f(x) + \lambda_x(x - f(x))\| = 1$: le vecteur $f(x)+\lambda_x(x-f(x))$ correspond au point d'intersection du cercle S^1 et la demi-droite ayant le point $f(x)$ pour extremité et passant par le point x.

L'application qui à tout point $x \in D^2$ associe $f(x)+\lambda_x(x-f(x))$ est continue. (Vérifiez cette affirmation !) De plus, la restriction de cette application sur S^1 est l'identité $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$. Donc, cette application est une rétraction de D^2 sur S^1. Contradiction. □

3.7. **Version faible du théorème de van Kampen.** Le théorème de van Kampen est un outil important qui, dans certains cas, permet de calculer le groupe fondamental. Dans cette section, nous considérons une version faible du théorème de van Kampen.

Proposition 32 (Théorème de van Kampen faible)**.** *Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. Soit $X = U_1 \cup U_2$ un recouvrement ouvert de X tel que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ soient non vides et connexes par arcs. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$ un point. Alors, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images des groupes $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ par les morphismes induits par les inclusions $U_1 \hookrightarrow X$ et $U_2 \hookrightarrow X$, respectivement.*

Démonstration. Soit $\gamma : I \to X$ un lacet de base x_0. Comme dans la démonstration de la Proposition 25, on divise l'intervalle I en sous-intevalles par une collection finie de points

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$$

tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des ensembles U_1 et U_2, et les images par γ de tous les points a_j, $j = 0, \ldots, k$, appartiennent à $U_1 \cap U_2$.

Pour tout entier j entre 0 et $k-1$, soit $\gamma_j : I \to X$ le chemin obtenu de la restriction de γ sur $[a_j, a_{j+1}]$ par un changement affine de paramètre :

$$\gamma_j(t) = \gamma((a_{j+1} - a_j)t + a_j).$$

De plus, pour tout entier j entre 1 et $k-1$, choisissons un chemin $\delta_j : I \to U_1 \cap U_2$ qui relie x_0 et $\gamma(a_j)$. Il reste à remarquer que

$$[\gamma] = [\gamma_0\delta_1^{-1}\delta_1\gamma_1\delta_2^{-1}\delta_2\gamma_2 \ldots \delta_{k-1}^{-1}\delta_{k-1}\gamma_k],$$

et l'image de chaque chemin $\gamma_0\delta_1^{-1}$, $\delta_1\gamma_1\delta_2^{-1}$, $\ldots$, $\delta_{k-2}\gamma_{k-1}\delta_{k-1}^{-1}$, $\delta_{k-1}\gamma_k$ est entièrement contenue dans U_1 ou U_2. □

Corollaire 33. *Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. Supposons que X possède un recouvrement ouvert $X = U_1 \cup U_2$ tel que U_1 et U_2 soient simplement connexes et $U_1 \cap U_2$ soit non vide et connexe par arcs. Alors, X est simplement connexe.* □

Corollaire 34. *Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Alors, la sphère S^n est simplement connexe.*

Démonstration. On identifie S^n avec la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On a un recouvrement ouvert $S^n = U_1 \cup U_2$ de S^n, où $U_1 = S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}$. Par projection stéréographique, chacun des ouverts U_1 et U_2 est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. De plus, par projection stéréographique, $U_1 \cap U_2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, c'est-à-dire, homéomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Donc, $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, et on peut utiliser le Corollaire 33. □

Proposition 35.
(1) *Soit $n \geq 0$ un nombre entier différent de 1. Alors, $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^1$.*
(2) *Soit $m \geq 0$ un nombre entier différent de 2. Alors, $\mathbb{R}^m$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. La première affirmation est très simple. Si $n = 0$, alors $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^1$. Si $n > 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ est un homéomorphisme, on obtient un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^1 \setminus \{f(0)\}$, ce qui est impossible car $\mathbb{R}^1 \setminus \{f(0)\}$ n'est pas connexe, mais $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe.

Pour démontrer la deuxième affirmation, remarquons d'abord que $\mathbb{R}^0$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Si $m > 2$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, on obtient un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$, ce qui est impossible car $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ a le type d'homotopie de S^1 (donc, le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$) et $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a le type d'homotopie de S^{m-1} (donc, $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ est simplement connexe). Contradiction. □

3.8. **Groupes d'homotopie supérieurs.** Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est le premier dans la suite de groupes $\pi_k(X, x_0)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Fixons un nombre entier $k \geq 2$. Pour définir le groupe $\pi_k(X, x_0)$, considérons le cube $I^k \subset \mathbb{R}^k$ et les applications continues $f : I^k \to X$ telles que $f(t) = x_0$ pour tout point t appartenant à la frontière ∂I^k de I^k. (Rappelons que la frontière ∂I^k de I^k est formée des points $t = (t_1, \ldots, t_k) \in I^k$ tels que, pour au moins un indice i, on ait $t_i = 0$ ou $t_i = 1$.) Notons $\Omega_k(X, x_0)$ l'ensemble des applications considérées, et notons $\pi_k(X, x_0)$ l'ensemble des classes de ∂I^k-homotopie de ces

applications. Sur l'ensemble $\Omega_k(X, x_0)$, on peut définir une opération de multiplication en posant

$$(f_1 f_2)(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \ldots, t_k), & \text{si } \ t_1 \in [0; \frac{1}{2}], \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k), & \text{si } \ t_1 \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Cette opération induit une opération de multiplication sur $\pi_k(X, x_0)$. On peut vérifier que $\pi_k(X, x_0)$ muni de cette opération de multiplication est un groupe. Ce groupe s'appelle *k-ième groupe d'homotopie* de X de base x_0.

Exemple. Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout entier $k \geq 1$, le groupe $\pi_k(\mathbb{R}^n, 0)$ est trivial.

Exercices.

(1) Soit $k \geq 1$ un nombre entier. Soient X et Y des espaces topologiques, et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des points. Montrer que

$$\pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0).$$

(2) Soit $k \geq 2$ un nombre entier. Montrer que, pour tout espace topologique X et pour tout point $x_0 \in X$, le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est abélien.

Nous allons voir plus tard, que le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ n'est pas forcement abélien.

4. Revêtements

4.1. **Définition.** Soient E et B des espaces topologiques, et soit $p : E \to B$ une application continue. Supposons que l'application p est surjective et que, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de b tel que l'image inverse $p^{-1}(U)$ de U soit une réunion d'ouverts $U_i \subset E$ (où les indices i parcourent un certain ensemble F), deux à deux disjoints, et la restriction de p sur chaque ouvert U_i soit un homéomorphisme entre U_i et U. Dans ce cas, on dit que $p : E \to B$ est un *revêtement* de B. L'espace B s'appelle la *base* du revêtement p, l'espace E s'appelle l'*espace total* de p. Pour tout point $b \in B$, l'image inverse $p^{-1}(b)$ de b s'appelle la *fibre* de b. L'ensemble F peut être identifié avec la fibre de b. Un voisinage U qui apparaît dans la définition est dit *trivialisant* le revêtement p (cette terminologie peut être expliquée par la Proposition 36 ci-dessous).

Si $p : E \to B$ est un revêtement et $A \subset B$ est un sous-espace, une *section* de p au-dessus de A est une application continue $s : A \to E$

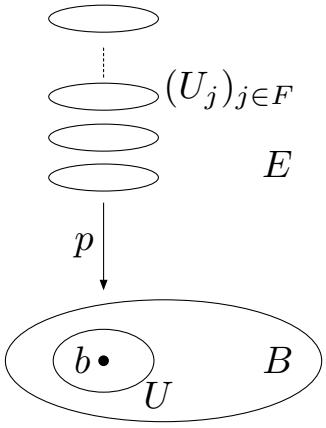

FIGURE 4. Voisinage trivialisant

telle que $p \circ s$ coïncide avec l'identité sur A. Soit $b \in B$ un point, et soit x un point de $p^{-1}(b)$. Considérons un voisinage $U \ni b$ trivialisant le revêtement p. Le point x appartient à U_i pour un certain indice $i \in F$. Il existe une section $s_i : U \to E$ de p au-dessus de U telle que $U_i = s_i(U)$ (en particulier, $x \in s_i(U)$). Une telle section est unique.

Proposition 36. *Une application continue $p : E \to B$ est un revêtement si et seulement si, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage $U \subset B$ de b, un espace discret non vide F et un homéomorphsime $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ & p \searrow \quad \swarrow \mathrm{pr} & \\ & U & \end{array}$$

(*Ici* $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}_U$ *est la projection de $U \times F$ sur U.*)

Démonstration. Supposons que $p : E \to B$ est un revêtement. Soit $b \in B$ un point. Considérons un voisinage ouvert U de b tel que U soit trivialisant le revêtement p. On a $p^{-1}(U) = \cup_{i\in F} U_i$, où F est un ensemble, les ouverts $U_i \subset E$ sont deux à deux disjoints et, pour tout $i \in F$, la restriction de p sur U_i est un homéomorphisme entre U_i et U. Munissons F de la topologie discrète et définissons une application $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ par $x \mapsto (p(x), i)$, où $i \in F$ est tel que $x \in U_i$. Cette application est un homéomorphisme qui vérifie $(\mathrm{pr} \circ \Psi)(x) = p(x)$ pour tout $x \in p^{-1}(U)$: son inverse est $(b', i) \mapsto s_i(b')$.

Pour démontrer l'implication réciproque, remarquons qu'un voisinage U vérifiant la condition imposée contient un voisinage ouvert trivialisant le revêtement. $\square$

L'application Ψ de la Proposition 36 s'appelle *trivialisation locale* de p au-dessus de U.

Exemples.

(1) Pour tout espace topologique B et pour tout espace discret non vide F, le *revêtement trivial standard* de B ayant F pour fibre est l'application de projection $\mathrm{pr} : B \times F \to B$.
(2) L'application $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ est un revêtement (pour des voisinages trivialisants, on peut prendre, par exemple, $S^1 \setminus \{i\}$ et $S^1 \setminus \{-i\}$; *cf.* Section 3.5).

Question. La projection $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $(x, y) \mapsto x$, est-elle un revêtement de $\mathbb{R}$?

Si $p : E \to B$ est un revêtement, $b \in B$ est un point, et $U \ni b$ est un voisinage trivialisant le revêtement p, alors la restriction de p sur $p^{-1}(U)$, vue comme application $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$, s'identifie avec le revêtement trivial de U ayant $p^{-1}(b)$ pour fibre. Les ouverts $U_i \subset E$ pour lesquels $p|_{p^{-1}(U)}$ fournit un homéomorphsime avec U s'appellent les *feuillets* de p au-dessus de U.

4.2. **Premières propriétés.** Dans cette section, on démontre quelques propriétés des revêtements.

Proposition 37. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Alors, $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est aussi un revêtement.*

Démonstration. Soit $(b, b') \in B \times B'$ un point. On pose $F = p^{-1}(b)$ et $F' = (p')^{-1}(b')$. Considérons un voisinage ouvert $U \subset B$ de b trivialisant le revêtement p et un voisinage ouvert $U' \subset B'$ de b' trivialisant le revêtement p'. Alors, $U \times U' \subset B \times B'$ est un voisinage ouvert de (b, b'). De plus, on a des homéomorphismes

$$\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F,$$
$$\Psi' : (p')^{-1}(U') \to U' \times F'$$

tels que $\mathrm{pr} \circ \Psi = p|_{p^{-1}(U)}$ et $\mathrm{pr}' \circ \Psi' = p'|_{(p')^{-1}(U')}$, où

$$\mathrm{pr} : U \times F \to U \text{ et } \mathrm{pr}' : U' \times F' \to U'$$

sont les projections. Donc,

$$\Psi \times \Psi' : p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') = (p \times p')^{-1}(U \times U') \to (U \times U') \times (F \times F')$$

est un homéomorphisme tel que

$$(\mathrm{pr} \times \mathrm{pr}') \circ (\Psi \times \Psi') = (p \times p')|_{(p\times p')^{-1}(U\times U')} \ .$$

Par conséquent, $p \times p'$ est un revêtement. □

Proposition 38. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. On a les affirmations suivantes.*

(1) *Si $A \subset B$ est un sous-espace topologique, alors*

$$p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$$

est un revêtement.

(2) *Si B est séparé, alors E est aussi séparé.*

(3) *Si B est connexe, alors toutes les fibres de p ont le même cardinal.*

(4) *Si E et B sont compacts, alors les fibres de p sont finies.*

Démonstration. L'affirmation (1) est immédiate.

Pour démontrer l'affirmation (2), considérons deux points x et y de E. Si $p(x) = p(y)$, alors posons $b = p(x) = p(y)$ et considérons un voisinage ouvert $U \ni b$ trivialisant le revêtement p. Parmi les feuillets U_i au-dessus de U, il y deux ouverts disjoints U_x et U_y tels que $x \in U_x$ et $y \in U_y$. Si les points $b^{(1)} = p(x)$ et $b^{(2)} = p(y)$ sont distincts, on peut trouver des voisinages trivialisants $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ de $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$, respectivement, tels que $U^{(1)} \cap U^{(2)} = \varnothing$. Ceci donne deux voisinages disjoints $U_x^{(1)}$ et $U_y^{(2)}$ de x et y, respectivement.

(3) Soit $b \in B$ un point, et soit $U \ni b$ un voisinage trivialisant le revêtement p. Pour chaque point de U, la fibre de ce point est un bijection avec l'ensemble $F = p^{-1}(b)$. On en déduit que l'application $b' \mapsto \mathrm{card}\, p^{-1}(b')$, qui associe à tout point $b' \in B$ le cardinal $\mathrm{card}\, p^{-1}(b')$ de $p^{-1}(b')$, est localement constante sur B. Puisque B est connexe, on obtient que l'application $b' \mapsto \mathrm{card}\, p^{-1}(b')$ est constante sur B.

(4) Soit $b \in B$ un point. Le sous-ensemble $F = p^{-1}(b) \subset E$ est fermé. Puisque E est compact, le fermé F est aussi compact. Puisque F est discret, on obtient que F est fini. □

Soit $p : E \to B$ un revêtement tel que B soit connexe. Si les fibres de p sont finies, le nombre de points de chaque fibre s'appelle le *nombre de feuillets* du revêtement p. Sinon, on dit que le nombre de feuillets de p est infini.

Une application $f : X \to Y$ est un *homéomorphisme local* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $f(U) \subset Y$ soit un ouvert et la restriction $f|_U$ de f sur U, vue comme application de U dans $f(U)$, soit un homéomorphisme.

Proposition 39. *Tout revêtement est un homéomorphisme local.*

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $x \in E$ un point. Posons $F = p^{-1}(p(x))$ et considérons un voisinage ouvert $U \ni p(x)$ trivialisant le revêtement p. On a un homéomorphisme $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ & p \searrow \quad \swarrow \mathrm{pr} & \\ & U & \end{array}$$

Le point x appartient à l'ouvert $U_x = \Psi^{-1}(U \times \{x\})$. La section $s : U \to E$ définie par $b \mapsto \Psi^{-1}(b, x)$ est l'inverse de $p|_{U_x}$ (vue comme application de U_x dans U). Donc, $p|_{U_x}$ fournit un homéomorphisme entre U_x et U. □

L'énoncé reciproque à celui de la Proposition 39 est faux : il existe des homéomorphismes locaux qui ne sont pas des revêtements (essayez de trouver un exemple).

Proposition 40. *Soit E un espace topologique muni d'une opération totalement discontinue d'un groupe topologique discret G. Alors, l'application quotient*

$$p : E \to E/G$$

est un revêtement.

Démonstration. Par définition d'une opération de groupe totalement discontinue, tout point $x \in E$ admet un voisinage ouvert $V \subset E$ tel que $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout élément $g \in G$ différent de l'élément neutre. De plus, la projection p est ouverte (voir la Section 1.5). Donc, $p|_V : V \to U$, où $U = p(V)$, est un homéomorphisme. L'application

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\to U \times G \\ x &\mapsto (p(x), g_x), \end{aligned}$$

où g_x est l'unique élément de G tel que $(g_x)^{-1} \cdot x \in V$, est une trivialisation locale de p au-dessus de U. □

4.3. **Relèvement de chemins et d'homotopies.** Soient $p : E \to B$ et $f : X \to B$ des applications continues. On appelle *relèvement* de f (par rapport à p) toute application continue $\widetilde{f} : X \to E$ telle que $p \circ \widetilde{f} = f$. Plusieurs problèmes topologiques peuvent être formulés comme *questions de relèvements*, c'est -à-dire, des questions concernant l'existence d'un relèvement d'une application continue donnée.

Dans cette section, nous allons considérer la situation où $p : E \to B$ est un revêtement, et nous allons étudier les relèvements de chemins et d'homotopies.

Proposition 41 (Relèvement des chemins)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soient $x_0 \in E$ et $b_0 \in B$ des points tels que $p(x_0) = b_0$. Alors, pour tout chemin $\gamma : I \to B$ tel que $\gamma(0) = b_0$, il existe un unique relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ (par rapport à p) tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$, autrement dit, un unique chemin $\widetilde{\gamma} : I \to E$ tel que $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$.*

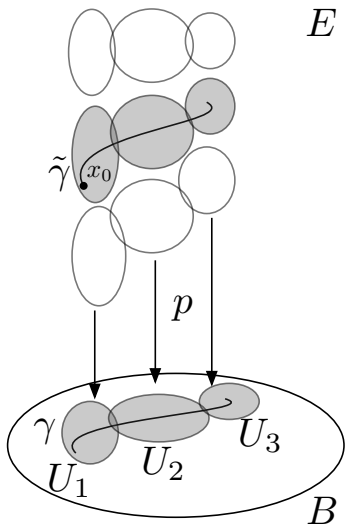

FIGURE 5. Relèvement d'un chemin

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la Proposition 25. Considérons un recouvrement ouvert de B par des voisinages ouverts trivialisant le revêtement p.

Puisque l'intervalle I est compact, il peut être divisé en sous-intevalles par une collection finie de points $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$ tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des éléments du recouvrement.

On démontre l'existence et l'unicité de relèvement $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_j]$ par récurrence sur j. Pour $j = 0$, on a $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$. Supposons que $\widetilde{\gamma}$ est déjà défini sur $[0, a_j]$, où $j = 0, \ldots, k-1$. L'image $\gamma([a_j, a_{j+1}])$ est entièrement contenu dans un élément $U^{(j)}$ du recouvrement. Soit $U_i^{(j)} \subset E$ le feuillet au-dessus de $U^{(j)}$ tel que $\widetilde{\gamma}(a_j) \in U_i^{(j)}$. Sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, on considère la composée $s_j \circ (\gamma|_{[a_j;a_{j+1}]})$, où $s_j : U^{(j)} \to U_i^{(j)}$ est la section de p ayant $U_i^{(j)}$ pour image. Cette application

se recolle avec l'application $\widetilde{\gamma}$ déjà définie sur $[0, a_j]$ pour donner une application continue $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_{j+1}]$. L'unicité est garantie par l'unicité de section de p au-dessus de $U^{(j)}$ telle que l'image de la section contienne $\widetilde{\gamma}(a_j)$. $\square$

Si, dans la Proposition 41, on remplace l'hypothèse "$p : E \to B$ un revêtement" par "$p : E \to B$ est un homéomorphisme local", l'énoncé devient faux (essayez de trouver un contre-exemple).

Si $\gamma : I \to B$ est un lacet de base $b_0 \in B$ et $x_0 \in E$ est un point tel que $p(x_0) = b_0$, le relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$ n'est pas forcement un lacet. Par exemple, dans le cas du revêtement $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ (voir la Section 3.5), un relèvement d'un lacet γ de base $1 \in S^1$ est un lacet si et seulement si γ est de degré 0.

Proposition 42 (Relèvement d'homotopies)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soient $x_0 \in E$ et $b_0 \in B$ des points tels que $p(x_0) = b_0$. Soient $\gamma : I \to B$ et $\delta : I \to B$ des chemins homotopes tels que $\gamma(0) = b_0$, et soient $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ les relèvements de γ et δ, respectivement, tels que $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\delta}(0) = x_0$. Alors, $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ sont aussi homotopes. En particulier, $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\delta}(1)$.*

Démonstration. A nouveau, la démonstration est similaire à celle de la Proposition 25. Considérons un recouvrement ouvert de B par des voisinages ouverts trivialisant le revêtement p. Soit $H : I \times I \to B$ une homotopie entre les chemins γ et δ.

Puisque le carré $I \times I$ est compact, il peut être divisé en rectangles

$$R_{ij} = \{(s,t) \in I \times I \mid a_i \leq s \leq a_{i+1},\ b_j \leq t \leq b_{j+1}\},$$
$$i = 0, \ldots, k-1, \quad j = 0, \ldots, \ell - 1,$$

donnés par deux collections finies de points

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1,$$
$$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{\ell-1} < b_\ell = 1,$$

tels que l'image par H de tout rectangle R_{ij} soit entièrement contenue dans (au moins) un des éléments du recouvrement de B. Un relèvement $\widetilde{H}$ de H tel que $\widetilde{H}(0,0) = x_0$ peut être construit par une procédure récursive similaire à celle de la démonstration de la Proposition 41 (par la même procédure récursive, on démontre l'unicité d'un tel relèvement). Il reste à vérifier que $\widetilde{H}$ est une homotopie entre les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$.

Considérons le chemin $\iota_0 : t \mapsto \widetilde{H}(0,t)$. Ce chemin est un relèvement du chemin constant e_{b_0}. Donc, ι_0 est le chemin constant e_{x_0}. De même

façon, le chemin $\iota_1 : t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ est aussi constant. De plus, l'unicité de relèvement de chemins implique que $\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{\gamma}(s)$ et $\widetilde{H}(s,1) = \widetilde{\delta}(s)$ pour tout $s \in I$. Par conséquent, $\widetilde{H}$ est une homotopie entre les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$. □

Corollaire 43. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b_0 \in B$ un point. Si un lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0 admet un relèvement qui n'est pas un lacet, alors γ n'est pas homotope au lacet constant e_{b_0}.* □

Le Corollaire 43 implique l'énoncé suivant.

Corollaire 44. *Soit B un espace topologique non vide et connexe par arcs. Supposons qu'il existe un revêtement $p : E \to B$ tel que p ne soit pas un homéomorphisme et E soit connexe par arcs. Alors, B n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. Soit $b_0 \in B$ un point. Si $p^{-1}(b_0)$ ne contient qu'un seul point, alors le nombre de feuillets du revêtement p est égal à 1, et p est un homéomorphisme, ce qui est impossible.

Donc, $p^{-1}(b_0)$ contient des points distincts x et y. Considérons un chemin $\eta : I \to E$ qui relie x et y. On obtient que le lacet $p \circ \eta$ de base b_0 n'est pas homotope au lacet constant e_{b_0}. Par conséquent, B n'est pas simplement connexe. □

5. Revêtements et groupe fondamental

5.1. **Sous-groupe déteminé par un point.** Le calcul du groupe fondamental du cercle (voir la Section 3.5) indique qu'il y a des relations importantes entre revêtements et groupe fondamental. Dans ce chapitre, nous allons étudier ces relations.

Proposition 45. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $x_0 \in E$ un point. Posons $b_0 = p(x_0)$. Alors, le morphisme*

$$p_* : \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

induit par p est injectif.

Démonstration. Soit γ un lacet de base x_0 dans E tel que la classe $[\gamma] \in \pi_1(E, x_0)$ de γ soit dans le noyau de p_*. Le lacet $p \circ \gamma$ est homotope au lacet constant e_{b_0}. Soit $H : I \times I \to B$ une homotopie des lacets $p \circ \gamma$ et e_{b_0}. Le lacet γ est l'unique relèvement de $p \circ \gamma$ tel que le point de départ de relèvement soit x_0. Le relevé $\widetilde{H}$ de H tel que $\widetilde{H}(0,0) = x_0$ est une homotopie du relevé γ de $p \circ \gamma$ à celui de e_{b_0}, c'est-à-dire, au lacet constant e_{x_0}. Donc, les lacets γ et e_{x_0} sont homotopes. □

On dit que le sous-groupe $p_*(\pi_1(E,x_0)) \subset \pi_1(B,b_0)$ est le *sous-groupe déterminé* par x_0. Remarquons que si on choisit un point $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ différent de x_0, le sous-groupe déterminé par x_1 ne coïncide pas forcement avec celui déterminé par x_0.

Proposition 46. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soient x_0 et x_1 des points de E qui appartiennent à une composante connexe par arcs de E et tels que $p(x_0) = p(x_1)$. Posons $b_0 = p(x_0)$. Alors, les sous-groupes $p_*(\pi_1(E,x_0))$ et $p_*(\pi_1(E,x_1))$ sont conjugués dans $\pi_1(B,b_0)$: il existe un élément $\alpha \in \pi_1(B,b_0)$ tel que*

$$p_*(\pi_1(E,x_1)) = \alpha\, p_*(\pi_1(E,x_0))\, \alpha^{-1}.$$

Réciproquement, pour tout élément $\alpha' \in \pi_1(B,b_0)$, il existe un point $x_1' \in p^{-1}(b_0)$ tel que

$$p_*(\pi_1(E,x_1')) = \alpha'\, p_*(\pi_1(E,x_0))\, \alpha'^{-1}.$$

Démonstration. Soit $\gamma : I \to E$ un chemin dont le point de départ coïncide avec x_1 et le point d'arrivée coïncide avec x_0. Soit

$$\varphi_\gamma : \pi_1(E,x_0) \to \pi_1(E,x_1)$$

l'isomorphisme de changement de point de base le long du chemin γ.

Le chemin $p \circ \gamma$ est un lacet de base b_0, et on pose $\alpha = [p \circ \gamma]$. L'élément $\alpha \in \pi_1(B,b_0)$ définit un automorphisme intérieur

$$T_\alpha : \pi_1(B,b_0) \to \pi_1(B,b_0), \quad \beta \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E,x_0) & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & \pi_1(E,x_1) \\ \Big\downarrow p_* & & \Big\downarrow p_* \\ \pi_1(B,b_0) & \xrightarrow{T_\alpha} & \pi_1(B,b_0) \end{array}$$

En effet, soit $\delta : I \to E$ un lacet de base x_0. On a

$$\begin{aligned}(p_* \circ \varphi_\gamma)([\delta]) &= p_*([\gamma\delta\gamma^{-1}]) = [p \circ \gamma][p \circ \delta][p \circ \gamma^{-1}] \\ &= \alpha\, p_*([\delta])\, \alpha^{-1} = (T_\alpha \circ p_*)([\delta]).\end{aligned}$$

Puisque φ_γ est un isomorphisme, on obtient que

$$T_\alpha(p_*(\pi_1(E,x_0))) = p_*(\pi_1(E,x_1)).$$

Réciproquement, choisissons un élément $\alpha' \in \pi_1(B,b_0)$. Soit $\overline{\gamma}' : I \to B$ un lacet qui représente la classe $(\alpha')^{-1}$, et soit $\gamma' : I \to E$ le

relèvement de $\overline{\gamma}'$ tel que $\gamma'(0) = x_0$. Posons $x'_1 = \gamma'(1)$. Les arguments présentés ci-dessus montrent que

$$p_*(\pi_1(E, x'_1)) = \alpha' \, p_*(\pi_1(E, x_0)) \, \alpha'^{-1}.$$

□

Corollaire 47. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point, et soit $G \subset \pi_1(B, b_0)$ le sous-groupe déterminé par un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Alors, un sous-groupe $G' \subset \pi_1(B, b_0)$ est déterminé par un des points de $p^{-1}(b_0)$ si et seulement si les sous-groupes G et G' sont conjugués.* □

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b_0 \in B$ un point. Notons $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre au-dessus de b_0. Considérons un point $x \in F$ et un élément $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$. Soit $\gamma : I \to B$ un lacet qui représente la classe α. On note $x\alpha = \widetilde{\gamma}(1) \in F$ le point d'arrivée du relèvement $\widetilde{\gamma} : I \to E$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$ (la Proposition 42 implique que le point d'arrivée du relèvement ne dépend pas du choix de représentant de la classe α).

Proposition 48. *L'application $(\alpha, x) \mapsto x\alpha$ est une action à droite du groupe $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre F.*

Démonstration. Soient $\gamma : I \to B$ et $\gamma' : I \to B$ deux lacets de base b_0. Le relèvement $\widetilde{\gamma\gamma'}$ de $\gamma\gamma'$ tel que $\widetilde{\gamma\gamma'}(0) = x$ est le produit du relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$ et du relèvement $\widetilde{\gamma}'$ de γ' tel que $\widetilde{\gamma}'(0) = \widetilde{\gamma}(1)$. Par conséquent,

$$x([\gamma][\gamma']) = (x[\gamma])[\gamma'].$$

De plus, le relèvement d'origine x du lacet constant e_{b_0} est le lacet constant e_x. Donc,

$$x\varepsilon = x$$

pour tout $x \in F$ (ici, ε est l 'élément neutre de $\pi_1(B, b_0)$). □

Proposition 49. *Le stabilisateur d'un point $x \in F$ par l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur F est le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, b_0)$ déterminé par le point x.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ un élément tel que $x\alpha = x$. Considérons un lacet $\gamma : I \to B$ qui représente α. Soit $\widetilde{\gamma} : I \to E$ le relèvement d'origine x de γ. Puisque $x\alpha = x$, le chemin $\widetilde{\gamma}$ est un lacet de base x. Donc, $\alpha \in p_*(\pi_1(E, x))$.

Réciproquement, soit $\beta \in \pi_1(E, x)$, et soit $\delta : I \to E$ un lacet qui représente la classe β. Alors, δ est le relèvement d'origine x de $p \circ \delta$, d'où $xp_*(\beta) = x$. □

Proposition 50. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont la base B est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. On pose $F = p^{-1}(b_0)$, et on note $\pi_0(E)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de E. Alors, l'application $F \to \pi_0(E)$ qui à tout point $x \in F$ associe la composante connexe qui contient x induit une bijection*

$$F/\pi_1(B, b_0) \simeq \pi_0(E)$$

entre $\pi_0(E)$ et l'ensemble des orbites de $\pi_1(B, b_0)$ dans F.

Démonstration. L'application $F \to \pi_0(E)$ est surjective. En effet, si $y \in E$ est un point, on peut relier $p(y)$ et b_0 par un chemin $\gamma : I \to B$. Le relèvement $\widetilde{\gamma} : I \to E$ d'origine y de γ a un point de F comme point d'arrivée. Donc, toute composante connexe par arcs de E contient au moins un point de F.

Considérons deux points x et x' de F. S'il existe un chemin $\delta : I \to E$ qui relie x et x', on a $x' = x[p \circ \delta]$. Réciproquement, s'il existe un élément $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ tel que $x' = x\alpha$, le relèvement d'origine x d'un représentant quelconque de α fournit un chemin entre x et x'. □

Corollaire 51. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont la base B est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. L'espace total E de p est connexe par arcs si et seulement si l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$ est transitive.* □

Proposition 52. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. On pose $F = p^{-1}(b_0)$. Alors, pour tout point $x \in F$, l'application de $\pi_1(B, b_0)$ dans F définie par $\alpha \mapsto x\alpha$ induit une bijection*

$$p_*(\pi_1(E, x))\backslash\pi_1(B, b_0) \simeq F$$

entre F et l'ensemble des classes à droite de $\pi_1(B, b_0)$ modulo $p_*(\pi_1(E, x))$.

Démonstration. L'énoncé est un corollaire immédiat de la Proposition 49 et du Corollaire 51. □

Corollaire 53. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. Soit n un nombre entier strictement positif. Alors, p est un revêtement à n feuillets si et seulement si, pour tout point $x \in p^{-1}(b_0)$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x))$ est d'indice n dans $\pi_1(B, b_0)$.* □

5.2. **Revêtements reguliers.** Dans cette section, nous allons nous intéresser aux revêtements dont l'espace total est connexe par arcs et qui sont liés aux sous-groupes distingués du groupe fondamental de la base.

Proposition 54. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point, et soit $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ est distingué ;*
(2) *pour tout point $x \in p^{-1}(b_0)$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x))$ coïncide avec $p_*(\pi_1(E, x_0))$;*
(3) *pour tout point $x \in E$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, p(x))$ est distingué ;*
(4) *pour tout lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0, soit tout relêvement (par rapport à p) de γ est un lacet, soit tout relèvement de γ n'est pas un lacet.*

Démonstration. Le Corollaire 47 implique que les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

La Proposition 49 implique que les conditions (2) et (4) sont équivalentes.

Clairement, la condition (3) implique la condition (1). Réciproquement, supposons que le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ est distingué, considérons un point $x \in E$, et posons $b = p(x)$. Soit $\gamma : I \to B$ un chemin qui relie b et b_0. Considérons le relèvement $\widetilde{\gamma}$ d'origine x de γ. On pose $x'_0 = \widetilde{\gamma}(1)$. On note $\varphi_\gamma : \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(B, b)$ (respectivement, $\varphi_{\widetilde{\gamma}} : \pi_1(E, x'_0) \to \pi_1(E, x)$) l'isomorphisme de changement de point de base le long du chemin γ (respectivement, $\widetilde{\gamma}$). Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, x'_0) & \xrightarrow{\varphi_{\widetilde{\gamma}}} & \pi_1(E, x) \\ \Big\downarrow p_* & & \Big\downarrow p_* \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & \pi_1(B, b) \end{array}$$

En effet, soit $\delta : I \to E$ un lacet de base x'_0. On a

$$\begin{aligned} (p_* \circ \varphi_{\widetilde{\gamma}})([\delta]) &= p_*([\widetilde{\gamma}\delta\widetilde{\gamma}^{-1}]) = [p \circ \widetilde{\gamma}][p \circ \delta][p \circ \widetilde{\gamma}^{-1}] \\ &= [\gamma]\, p_*([\delta])\, [\gamma^{-1}] = (\varphi_\gamma \circ p_*)([\delta]). \end{aligned}$$

Puisque $\varphi_{\widetilde{\gamma}}$ est un isomorphisme, on obtient que

$$\varphi_\gamma(p_*(\pi_1(E, x'_0))) = p_*(\pi_1(E, x)).$$

On a $p_*(\pi_1(E, x'_0)) = p_*(\pi_1(E, x_0))$. Donc, $p_*(\pi_1(E, x))$ ne dépend pas du choix de point x de la fibre $p^{-1}(b)$. □

Un revêtement $p : E \to B$ est dit *régulier* si E est connexe par arcs et si l'une des conditions (1) - (4) de la proposition précédente est

vérifiée. Dans le cas d'un revêtement régulier $p : E \to B$, pour tout point $x_0 \in E$, la fibre $p^{-1}(b_0)$ au-dessus du point $b_0 = p(x_0)$ s'identifie avec le groupe quotient $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0))$.

Par exemple, si $p : E \to B$ est un revêtement tel que E est connexe par arcs et le groupe fondamental de B est abélien, alors p est régulier.

5.3. **Morphismes de revêtements.** Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base. Un *morphisme modéré de revêtements* de p sur p' est une application continue $\xi : E \to E'$ telle que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\xi} & E' \\ & p \searrow \quad \swarrow p' & \\ & B & \end{array}$$

Pour tout revêtement $p : E \to B$, l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ est un morphisme modéré de revêtements, dit *identité*, de p sur p. Si ξ est un morphisme modéré de revêtements de $p : E \to B$ sur $p' : E' \to B$ et si ξ' est un morphisme modéré de revêtements de $p' : E' \to B$ sur $p'' : E'' \to B$, alors $\xi' \circ \xi$ est un morphisme modéré de revêtements, dit *composé*, de p sur p''.

Un *isomorphisme modéré* de revêtements $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ est un morphsime modéré de revêtements ξ de p sur p' tel qu'il existe un morphisme modéré de revêtements ζ de p' sur p vérifiant $\zeta \circ \xi = \mathrm{id}_E$ et $\xi \circ \zeta = \mathrm{id}_{E'}$. Si $E = E'$ et $p = p'$, on parle d'*automorphisme* du revêtement $p : E \to B$. Deux revêtements de même base sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme modéré de revêtements de l'un sur l'autre.

On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est trivial s'il est isomorphe à un revêtement de la forme

$$pr_B : B \times F \to B,$$

où F est un espace topologique discret non vide.

La notion de morphisme modéré de revêtements, introduite ci-dessus, peut être généralisée de la façon suivante. Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux revêtements (dont les bases ne coïncident pas forcement). Un *morphisme de revêtements* de p sur p' est un couple (ξ, η)

d'applications continues $\xi : E \to E'$ et $\eta : B \to B'$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\xi} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{\eta} & B' \end{array}$$

Si les bases de revêtements coïncident et l'application η est l'identité, le morphisme (ξ, η) de revêtements est dit "*au-dessus de l'identité*". Dans ce cas, $\xi : E \to E'$ est un morphisme modéré de revêtements.

Si (ξ, η) est un morphisme de revêtements de $p : E \to B$ sur $p' : E' \to B'$ et si $b \in B$ est un point, alors l'application ξ envoie la fibre $p^{-1}(b)$ dans la fibre $(p')^{-1}(\eta(b))$.

Un espace topologique est dit *localement connexe* si chacun de ses points admet une base de voisinages connexes.

Proposition 55. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base. Supposons que E' est connexe par arcs et localement connexe. Supposons en plus qu'il existe un morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p'. Alors, ξ est un revêtement.*

Démonstration. Soit $x' \in E'$ un point. On pose $b' = p'(x')$. Montrons d'abord que $x' \in \xi(E)$. Soit $x_0 \in E$ un point. On pose $x'_0 = \xi(x_0)$. Puisque E' est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : I \to E'$ qui relie x'_0 et x'. Considérons le relèvement $\widetilde{\gamma} : I \to E$ (par rapport à p) d'origine x_0 de $p' \circ \gamma$. Le chemin $\xi \circ \widetilde{\gamma}$ est un relèvement (par rapport à p') d'origine x'_0 de $p' \circ \gamma$. Donc, $\xi \circ \widetilde{\gamma}$ coïncide avec γ. En particulier, $x' \in \xi(E)$.

Puisque E' est localement connexe, les espaces topologiques B et E sont localement connexes aussi. Considérons un voisinage connexe $U \subset B$ de b' tel que U soit trivialisant pour les deux revêtements p et p'. On note $U_{x'}$ le feuillet de p' au-dessus de U tel que $x' \in U_{x'}$, et on note $\{V_x\}$ la collection des feuillets de p au-dessus de U. Pour tout V_x, l'image $\xi(V_x)$ est connexe ; donc, soit $\xi(V_x) = U_{x'}$, soit $\xi(V_x) \cap U_{x'} = \varnothing$. Par consequent, $\xi^{-1}(U_{x'})$ est une réunion disjointe d'ouverts de la forme V_x, et la restriction de ξ sur chacun de ces ouverts fournit un homéomorphisme avec $U_{x'}$: pour un tel ouvert V, on a $\xi|_V = (p'|_{U_{x'}})^{-1} \circ p|_V$. $\square$

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base. Supposons que les espaces totaux E et E' de ces revêtements

sont connexes par arcs. Soient $x_0 \in E$ et $x'_0 \in E'$ des points. On dit que la paire (p, x_0) *domine* la paire (p', x'_0) s'il existe un morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$.

Proposition 56. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base et des espaces totaux connexes par arcs. Soient $x_0 \in E$ et $x'_0 \in E'$ des points tels que $p(x_0) = p'(x'_0)$. Si la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0), alors*

$$p_*(E, x_0) \subset (p')_*(E', x'_0).$$

Démonstration. Il existe un morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$. On a $p = p' \circ \xi$. Donc,

$$p_*(\pi_1(E, x_0)) = (p')_*(\xi_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0)).$$

□

5.4. **Relèvement d'applications.** Dans cette section, nous allons étudier l'existence de relèvements d'applications à valeur dans la base d'un revêtement.

Proposition 57. *Soient $p : E \to B$ un revêtement, X un espace topologique connexe, et $f : X \to B$ une application continue. Alors, deux relèvements de f par rapport à p qui coïncident en un point sont égaux.*

Démonstration. Soient $\widetilde{f} : X \to E$ et $\widetilde{f'} : X \to E$ deux relèvements de f qui coïncident en un point $x_0 \in X$. On a $X = X_1 \cup X_2$, où $X_1 = \{x \in X \mid \widetilde{f}(x) = \widetilde{f'}(x)\}$ et $X_2 = \{x \in X \mid \widetilde{f}(x) \neq \widetilde{f'}(x)\}$ sont deux sous-ensembles disjoints de X.

Soient $x \in X$ un point, $U \subset B$ un voisinage ouvert de $f(x)$ tel que U soit trivialisant le revêtement p, et notons V et V' les feuillets au-dessus de U tels que $\widetilde{f}(x) \in V$ et $\widetilde{f'}(x) \in V'$.

Si $x \in X_1$, alors $V = V'$ et $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap (\widetilde{f'})^{-1}(V) \ni x$ est un voisinage ouvert entièrement contenue dans X_1. Donc, X_1 est un ouvert.

Si $x \in X_2$, alors $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap (\widetilde{f'})^{-1}(V') \ni x$ est un voisinage ouvert entièrement contenue dans X_2. Donc, X_2 est un ouvert. Puisque X est connexe et $x_0 \in X_1$, on obtient que X_2 est vide. □

Un espace topologique est dit *localement connexe par arcs* si chacun de ses points admet une base de voisinages connexes par arcs.

Proposition 58. *Soient $p : E \to B$ un revêtement, X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs, et $f : X \to B$ une application continue. Soit $x_0 \in X$ un point. On pose*

$b_0 = f(x_0)$, et on considère un point $y_0 \in p^{-1}(b_0)$. Alors, il existe un relèvement $\widetilde{f} : X \to E$ de f tel que $\widetilde{f}(x_0) = y_0$ si et seulement si

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, y_0)).$$

Démonstration. La condition $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, y_0))$ est clairement nécessaire (*cf.* la démonstration de la Proposition 56).

Supposons maintenant que $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, y_0))$. Soit $x \in X$ un point. Considérons un chemin $\gamma : I \to X$ qui relie x_0 et x. L'application $f \circ \gamma$ est un chemin qui relie b_0 et $f(x)$ dans B. Notons $\widetilde{\gamma}$ le relèvement d'origine y_0 de $f \circ \gamma$. On note $\widetilde{f}(x) = \widetilde{\gamma}(1)$.

Si $\delta : I \to X$ est un autre chemin qui relie x_0 et x, notons $\widetilde{\delta} : I \to E$ le relèvement d'origine y_0 de $f \circ \delta$. On a

$$[(f \circ \gamma)(f \circ \delta)^{-1}] = [f \circ (\gamma\delta^{-1})] \in f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Soit $c : I \to E$ un lacet de base y_0 tel que les lacets $p \circ c$ et $(f \circ \gamma)(f \circ \delta)^{-1}$ soient homotopes. La Proposition 42 (relèvement des homotopies) et la Proposition 41 (unicité de relèvement d'une origine donnée d'un chemin) impliquent que les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ ont le même point d'arrivée. Donc, $\widetilde{f}(x)$ ne dépend pas du choix de chemin γ.

On a $\widetilde{f}(x_0) = y_0$. Il reste à montrer que l'application $\widetilde{f}$ est continue. Considérons un voisinage ouvert $V \subset E$ de $\widetilde{f}(x)$ tel que $U = p(V)$ soit un ouvert de B et $p|_V : V \to U$ soit un homéomorphisme. Soit $W \subset f^{-1}(U)$ un voisinage ouvert connexe par arcs de x. Pour tout point $w \in W$, si $\gamma' : I \to W \subset X$ est un chemin qui relie x et w, alors $\widetilde{f}(w)$ est le point d'arrivée du relèvement d'origine y_0 de $f \circ (\gamma\gamma') = (f \circ \gamma)(f \circ \gamma')$. Par conséquent, $\widetilde{f}(w) \in V$. Donc, l'application $\widetilde{f}$ est continue. □

Corollaire 59. *Soient $p : E \to B$ un revêtement, X un espace topologique simplement connexe et localement connexe par arcs, et $f : X \to B$ une application continue. Soit $x_0 \in X$ un point. On pose $b_0 = f(x_0)$, et on considère un point $y_0 \in p^{-1}(b_0)$. Alors, il existe un unique relèvement $\widetilde{f} : X \to E$ de f tel que $\widetilde{f}(x_0) = y_0$.* □

Corollaire 60. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base et des espaces totaux connexes par arcs. Supposons que B est localement connexe par arcs. Soient $x_0 \in E$ et $x'_0 \in E'$ des points tels que $p(x_0) = p'(x'_0)$. Alors, la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0) si et seulement si*

$$p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0)).$$

De plus, si la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0), alors il existe un unique morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$.

Démonstration. Puisque B est localement connexe par arcs, les espaces totaux E et E' sont aussi localement connexes par arcs. D'après la Proposition 56, si la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0), alors $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0))$.

Réciproquement, si $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0))$, les Propositions 57 and 58 impliquent qu'il existe un unique morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$ (il s'agit du relèvement ξ de p par rapport à p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$). $\square$

Une des conséquences de résultats démontrés ci-dessus sur les relèvements d'applications est l'énoncé suivant.

Proposition 61. *Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le revêtement p est régulier,*
(2) *le groupe* $\mathrm{Aut}(p)$ *des automorphismes du revêtement p agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$,*
(3) *il existe un groupe discret G, une opération totalement discontinue de G sur E et un homéomorphisme $f : E/G \to B$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ E/G \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

(*ici* $\mathrm{pr} : E \to E/G$ *est l'application quotient*).

Démonstration. On va montrer, d'abord, que les conditions (1) et (2) sont équivalentes. Soient x_0 et x_1 des points de la fibre $p^{-1}(b_0)$. Supposons que p est régulier. On a $p_*(\pi_1(E, x_0)) = p_*(\pi_1(E, x_1))$. D'après la Proposition 58, il existe un automorphisme $\xi : E \to E$ tel que $\xi(x_0) = x_1$. Donc, le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$.

Réciproquement, si $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$, il existe un automorphisme $\xi : E \to E$ de p tel que $\xi(x_0) = x_1$. Donc, $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, x_1))$ et $p_*(\pi_1(E, x_0)) \supset p_*(\pi_1(E, x_1))$. Par conséquent, p est régulier.

Pour démontrer l'implication (2) $\Rightarrow$ (3), on pose $G = \mathrm{Aut}(p)$ et on munit le groupe G de la topologie discrète. On obtient une opération continue de G sur E. Cette opération est totalement discontinue. En effet, soit $x \in E$ un point, et soit $U \ni p(x)$ un voisinage trivialisant le revêtement p. Alors, le feuillet V au-dessus de U tel que $x \in V$ vérifie la propriété demandée : $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout élément $g \in G$ différent

de l'élément neutre. Donc, l'application quotient $\mathrm{pr} : E \to E/G$ est un revêtement (voir la Proposition 40). Il existe une unique application continue $f\colon E/G \longrightarrow B$ telle que $p = f \circ \mathrm{pr}$ (voir Section 1.4). Puisque $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur chaque fibre de p, l'application f est bijective. De plus, f est ouverte. Donc, f est un homéomorphisme.

Pour démontrer l'implication (3) $\Rightarrow$ (2), supposons qu'il existe un groupe discret G, une opération totalement discontinue de G sur E et un homéomorphisme $f : X/G \to B$ tels que $p = f \circ \mathrm{pr}$. Alors, G est contenu dans $\mathrm{Aut}(p)$ et agit transitivement sur chaque fibre de p. $\square$

Un revêtement régulier $p : E \to B$ d'espace total E connexe par arcs et localement connexe par arcs s'appelle *revêtement galoisien*. Pour un revêtement galosien p, le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ s'appelle le *groupe de Galois* de p.

Proposition 62. *Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien, et soit $x_0 \in E$ un point. On pose $b_0 = p(x_0)$. Alors, le groupe de Galois* $\mathrm{Aut}(p)$ *de p peut être identifié avec le groupe quotient $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(X, x_0))$.*

Démonstration. D'après la Proposition 52, l'application de $\pi_1(B, b_0)$ dans $F = p^{-1}(b_0)$ définie par $\alpha \mapsto x_0\alpha$ induit une bijection

$$\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \simeq F.$$

D'autre part, pour tout point $x_1 \in F$, il existe un unique élément $g \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $g(x_1) = x_0$, ce qui produit une bijection entre F et $\mathrm{Aut}(p)$. La composée de ces deux bijections est une bijection $\phi : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to \mathrm{Aut}(p)$. En utilisant le fait que, pour tout lacet γ de base b_0 dans B, les automorphismes de p transforment les relèvements de γ en relèvements de γ, on montre que l'application ϕ est un morphisme de groupes : si $\alpha, \beta \in \pi_1(B, b_0)$, alors

$$\phi([\alpha][\beta])(x_0(\alpha\beta)) = x_0 \quad \text{et} \quad (\phi([\beta]) \circ \phi([\alpha]))((x_0\alpha)\beta) = x_0,$$

car $\phi([\alpha])((x_0\alpha)\beta) = x_0\beta$, où $[\alpha]$ et $[\beta]$ sont, respectivement, les classes de α et β, dans le quotient $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0))$. $\square$

5.5. **Revêtement image réciprqoque.** Soient $p : X \to B$ un revêtement et $f : B' \to B$ une application continue. Le *revêtement image réciproque* de p par rapport à f est l'application $p' : E' \to B'$, où

$$E' = \{(x, b') \in E \times B' \mid f(b') = p(x)\},$$

et p' est la restriction sur E' de la projection $\mathrm{pr}_{B'} : E \times B' \to B'$. Notons g la restriction sur E' de la projection $\mathrm{pr}_E : E \times B' \to E$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Proposition 63. *L'application $p' : E' \to B'$ est un revêtement, et le couple (g, f) est un morphisme de revêtements.*

Démonstration. Soit $b'_0 \in B'$ un point. Considérons un voisinage ouvert $U \subset B$ de $f(b'_0)$ tel que U soit un voisinage trivialisant le revêtement p, et notons $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation locale de p au-dessus de U, où F est un espace topologique discret. Posons $V = f^{-1}(U)$. C'est un voisinage ouvert de b'_0. L'application $\Psi' : (p')^{-1}(V) \to V \times F$ définie par

$$(x, b') \mapsto (b', (\mathrm{pr}_F \circ \Psi)(x))$$

est un homéomorphisme d'inverse

$$(b', y) \mapsto (\Psi^{-1}(f(b'), y), b')$$

et fournit une trivialisation locale de p' au-dessus de V. □

5.6. **Classification de revêtements.** Un espace topologique X est dit *semi-localement simplement connexe* si tout point $x \in X$ admet un voisinage $U \subset X$ tel que le morphisme $\mathrm{in}_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induit par l'inclusion $\mathrm{in} : U \hookrightarrow X$ soit trivial. Un tel voisinage $U \subset X$ est dit *basique*.

Proposition 64. *Soit B un espace topologique qui admet un revêtement $p : E \to B$ avec E simplement connexe. Alors, B est semi-localement simplement connexe.*

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement de B tel que E soit simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Considérons un voisinage ouvert $U \subset B$ de b_0 tel que U soit un voisinage trivialisant le revêtement p. Soit x_0 le point appartenant à $p^{-1}(b_0)$, et soit $V \subset E$ le feuillet au-dessus de U tel que $x_0 \in V$. L'inclusion $\mathrm{in} : U \hookrightarrow B$ peut être représentée comme application composée $p \circ i \circ (p|_V)^{-1}$, où $i : V \hookrightarrow E$ est l'inclusion de V dans E. Puisque E est simplement connexe, on obtient que le morphisme

$$\mathrm{in}_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

est trivial. □

Proposition 65 (Théorème d'existence)**.** *Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors, pour tout point $b_0 \in B$ et pour tout sous-groupe $G \subset \pi_1(B, b_0)$, il existe un revêtement $p : E \to B$ et un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ tels que E soit connexe par arcs et $p_*(\pi_1(E, x_0)) = G$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $\check{E}$ des chemins $\gamma : I \to B$ tels que $\gamma(0) = b_0$. Introduisons une relation d'équivalence $\sim$ sur $\check{E}$: on déclare deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 \in \check{E}$ équivalents si $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ et $[\gamma_1\gamma_2^{-1}] \in G$. Posons $E = \check{E}/\sim$. Pour tout chemin $\gamma \in \check{E}$, on note $[\gamma]_G$ la classe de γ dans E. Pour tout élément $x \in E$, on peut parler du point d'arrivée de x : c'est le point d'arrivée de tous les représentants de x. Considérons l'application $p : E \to B$ qui associe à tout $x \in E$ son point d'arrivée.

On définit maintenant une topologie sur E. Pour tout sous-ensemble ouvert basique $U \subset B$ qui est connexe par arcs et pour tout $x \in E$ dont le point d'arrivée appartient à U, on considère le sous-ensemble $U_x \subset E$ formé par les classes des chemins de la forme $\gamma\delta$, où $[\gamma]_G = x$ et δ est un chemin tel que $\delta(I) \subset U$ et $\delta(0) = \gamma(1)$. On va appeler ces sous-ensembles *ensembles principaux*.

Soient $U_x \subset E$ et $V_y \subset E$ deux ensembles principaux tels que $U_x \cap V_y \neq \varnothing$, et soit $z \in U_x \cap V_y$ un point. On a $U_z = U_x$ et $V_z = V_y$. Donc,

$$z \in W_z \subset U_x \cap V_y,$$

où W est un voisinage ouvert basique et connexe par arcs de $p(z)$ tel que $W \subset U \cap V$. Par conséquent, les ensembles principaux forment une base d'une topologie sur E. Munissons E de cette topologie.

Montrons que l'application p est continue. Soit $b \in B$ un point, et soit $U \ni b$ un voisinage ouvert basique et connexe par arcs. Alors, $p^{-1}(U)$ est la réunion des ensembles U_x, où x parcourt toutes les classes de chemins qui relient b_0 et b. En effet, puisque U est connexe par arcs, si $x' \in p^{-1}(U)$, alors $x' \in U_x$ pour une certaine classe x de chemins qui relient b_0 et b. Donc, $p^{-1}(U) \subset E$ est un ouvert. Par conséquent, p est continue. De plus, la réunion considérée est disjointe, car, pour deux classes x et y quelconques de chemins qui relient b_0 et b, l'intersection $U_x \cap U_y$ est formée des classes de la forme $[\gamma_1\delta_1]_G = [\gamma_2\delta_2]_G$, où $[\gamma_1]_G = x$, $[\gamma_2]_G = y$, et δ_1, δ_2 sont des chemins à valeurs dans U. Les chemins δ_1 et δ_2 sont homotopes, donc $x = y$.

Soit $x \in E$ un point, et soit U un voisinage ouvert basique et connexe par arcs de $p(x)$. Alors, $p|_{U_x} : U_x \to U$ est une bijection. En effet, pour tout point $b \in U$, il existe un chemin $\delta : I \to B$ qui relie $p(x)$ et b et tel que $\delta(I) \subset U$. On a $b = p([\gamma\delta]_G)$, où $[\gamma]_G = x$, donc l'application

$p|_{U_x} : U_x \to U$ est surjective. De plus, la classe $[\gamma\delta]_G$ ne dépend pas du choix de δ, donc $p|_{U_x} : U_x \to U$ est injective.

Vérifions que $p|_{U_x} : U_x \to U$ est une application ouverte. Tout ouvert $W \subset U_x$ est une réunion d'ouverts principaux V_y (pour certain ouverts basiques et connexes par arcs $V \subset U$). Pour chacun de ces ouverts V_y, on a $p|_{U_x}(V_y) = V$. L'image de W par l'application bijective $p|_{U_x} : U_x \to U$ est la réunion des images de V_y. Donc, $p|_{U_x}(W) \subset U$ est un ouvert. On conclut que $p|_{U_x} : U_x \to U$ est un homéomoprphisme. Par conséquent, p est un revêtement.

Il reste à vérifier que E est connexe par arcs et que $p_*(\pi_1(E, x_0)) = G$. Soit $x \in E$ un point, et soit $\gamma : I \to B$ un chemin représentant x. Pour tout $t \in I$, on considère le chemin $\gamma_t : I \to B$ définit par $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$. On définit une application $\Gamma : I \to E$ par $\Gamma(t) = [\gamma_t]_G$. On a $\Gamma(0) = [e_{b_0}]_G$ et $\Gamma(1) = x$. Montrons que l'application Γ est continue. Soit $t_0 \in I$, et soit U_y un ensemble principal contenant $\Gamma(t_0)$. On doit vérifier que l'image inverse $\Gamma^{-1}(U_y)$ de U_y contient un voisinage de t_0. C'est un corollaire du fait que $\gamma : I \to B$ est continue : si $T \subset I$ est un voisinage de t_0 tel que $\gamma(T) \subset U$, alors $\Gamma(T) \subset U_y$.

On pose $x_0 = [e_{b_0}]_G \in E$. Pour tout lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0, soit $\widetilde{\gamma} : I \to E$ le relèvement unique d'origine x_0 de γ. Le point $\widetilde{\gamma}(1)$ est la classe de γ dans E. Donc, par construction, le stabilisateur de x_0 par l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$ est le sous-groupe G. Donc, la Proposition 49 implique que $p_*(\pi_1(E, x_0)) = G$. □

On obtient le résultat suivant.

Théorème 1 (Classification de revêtements)**.** *Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. L'application qui à tout revêtement $p : E \to B$ avec E connexe par arcs associe la classe de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$ déterminés par les points de $p^{-1}(b_0)$ établit une bijection entre les classes d'isomorphismes modérés des revêtements $p : E \to B$ avec E connexe par arcs et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$.*

Démonstration. Il nous reste à montrer l'injectivité. Soient $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ des revêtements tels que $(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_0)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, y_0))$ pour certains points $x_0 \in E_1$ et $y_0 \in E_2$ vérifiant $p_1(x_0) = b_0$ et $p_2(y_0) = b_0$. Alors, Corollaire 60 implique qu'il existe un isomorphisme modéré de revêtements $\xi : E_1 \to E_2$ de p_1 sur p_2 tel que $\xi(x_0) = y_0$. □

Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Sous la bijection du Théorème 1, la classe de revêtements qui correspond au sous-groupe trivial de $\pi_1(B, b_0)$ (autrement dit, la classe de revêtements de B qui ont un espace total simplement connexe) est celle des *revêtements universels* de B. Considérons un revêtement universel $p : E \to B$ (qui est unique à isomorphisme modéré près). Le revêtement p a la propriété d'universalité suivante. Soit $x_0 \in E$ un point tel que $p(x_0) = b_0$. Alors, le Corollaire 60 implique que, pour toute paire (p', x'_0) telle que $p' : E' \to B$ soit un revêtement dont l'espace total E' est connexe par arcs et $x'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$, la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0) : il existe un unique morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$; de plus, d'après la Proposition 55, l'application ξ est un revêtement.

Proposition 66. *Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Soit $p : E \to B$ un revêtement universel de B. Le choix d'un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ nous permet d'identifier $\pi_1(B, b_0)$ avec le groupe de Galois $\mathrm{Aut}(p)$ de p ; voir la Proposition 62. Alors, tout revêtement $p' : E' \to B$ tel que E' soit connexe par arc est isomorphe à un revêtement de la forme $E/G \to B$, où $G = p'_*(\pi_1(E', x'_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ pour un certain point $x'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$. Si le revêtement $p' : E' \to B$ est galoisien, alors son groupe de Galois est isomorphe à $\pi_1(B, b_0)/G$.*

Démonstration. Considérons un point $x'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$ et posons $G = p'_*(\pi_1(E', x'_0))$. Puisque G est un sous-groupe du groupe $\pi_1(B, b_0)$ qui est identifié avec $\mathrm{Aut}(E)$, on munit G de la topologie discrète et on obtient une opération totalement discontinue de G sur E. Donc, l'application quotient $\mathrm{pr} : E \to E/G$ est un revêtement (voir la Proposition 40). Il existe une unique application continue $f \colon E/G \longrightarrow B$ telle que $p = f \circ \mathrm{pr}$ (voir Section 1.4). L'application f est aussi un revêtement, et $f_*(\pi_1(E/G, \mathrm{pr}(x_0)))$ coïncide avec G. En effet, pour le relèvement $\widetilde{\gamma}$ (par rapport à p) d'un lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0 tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$, les points x_0 et $\widetilde{\gamma}(1)$ sont dans la même orbite de l'opération de G si et seulement si $[\gamma] \in G$. Donc, il existe un isomorphisme modéré η de revêtements p et f tel que $\eta(\mathrm{pr}(x_0)) = x'_0$.

La deuxième affirmation est un corollaire immédiat de la Proposition 62. $\square$

5.7. **Revêtements associés aux actions.** Commençons ce paragraphe par une remarque concernant les morphismes modérés de revêtements.

Lemma 67. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base, et soit $b_0 \in B$ un point. Soit $\xi : E \to E'$ un morphisme modéré de p sur p'. Alors, la restriction de ξ à $p^{-1}(b_0)$ est une application $\pi_1(B, b_0)$-équivariante entre $p^{-1}(b_0)$ et $(p')^{-1}(b_0)$.*

Démonstration. Soit $x \in p^{-1}(b_0)$ un point, et soit α un élément du groupe $\pi_1(B, b_0)$. Choisissons un lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0 tel que $[\gamma] = \alpha$. Si $\widetilde{\gamma} : I \to E$ est le relèvement de γ (par rapport à p) tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$, alors $\xi \circ \widetilde{\gamma}$ est le relèvement de γ (par rapport à p') tel que $(\xi \circ \widetilde{\gamma})(0) = \xi(x)$. Donc, $\xi(x\alpha) = (\xi \circ \widetilde{\gamma})(1) = (\xi(x))\alpha$. □

Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Pour tout ensemble non vide H et toute action à droite de $\pi_1(B, b_0)$ sur H, il existe un revêtement $p : E \to B$ qui *réalise* cette action sur la fibre $p^{-1}(b_0)$. Plus précisement, on a le résultat suivant.

Proposition 68. *Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Pour tout ensemble non vide H muni d'une action à droite de $\pi_1(B, b_0)$, il existe un revêtement $p_H : E_H \to B$ et une bijection $\pi_1(B, b_0)$-équivariante $\theta_H : p_H^{-1}(b_0) \to H$. Si H' est un autre ensemble muni d'une action à droite de $\pi_1(B, b_0)$, et si $h : H \to H'$ est une application (respectivement, bijection) $\pi_1(B, b_0)$-équivariante, alors il existe un unique morphisme modéré (respectivement, isomorphisme modéré) de revêtements $\xi : E_H \to E'_{H'}$ de p_H sur $p_{H'}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} p_H^{-1}(b_0) & \xrightarrow{\theta_H} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi|_{p_H^{-1}(b_0)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ p_{H'}^{-1}(b_0) & \xrightarrow{\theta_{H'}} & H' \end{array}$$

Démonstration. Soit $H = \coprod_{i \in \mathcal{O}} H_i$ la partition de H en orbites de l'action de $\pi_1(B, b_0)$. Pour tout $i \in \mathcal{O}$, choisissons un point $x_i \in H_i$ et notons S_i le stabilisateur de x_i dans $\pi_1(B, b_0)$. Soit $p_i : E_i \to B$ le revêtement de B associé au sous-groupe $S_i \subset \pi_1(B, b_0)$ (voir le Théorème 1). Posons $E_H = \coprod_{i \in \mathcal{O}} E_i$ (muni de la topologie somme disjointe, c'est-à-dire, la topologie la plus fine pour laquelle toutes

les applications canoniques $E_i \to \coprod_{i\in\mathcal{O}} E_i$ sont continues). Soit $p_H : E_H \to B$ l'application dont la restriction sur E_i est p_i pour tout $i \in \mathcal{O}$. L'application $p_H : E_H \to B$ est un revêtement de fibre $\coprod_{i\in\mathcal{O}} p_i^{-1}(b_0)$. On note $\theta_H : p_H^{-1}(b_0) \to H$ l'application dont la restriction sur $p_i^{-1}(b_0)$ coïncide avec la composition des bijections

$$p_i^{-1}(b_0) \simeq S_i \backslash \pi_1(B, b_0) \simeq H_i$$

pour tout $i \in \mathcal{O}$.

Pour démontrer la deuxième affirmation, considérons l'ensemble

$$\mathrm{Mor}(p_H, p_{H'})$$

des morphismes modérés de revêtements de p_H sur $p_{H'}$, l'ensemble

$$\mathrm{Mor}_{\pi_1(B,b_0)}(p_H^{-1}(b_0), p_{H'}^{-1}(b_0))$$

des applications $\pi_1(B, b_0)$-équivariantes de $p_H^{-1}(b_0)$ dans $p_{H'}^{-1}(b_0)$, et l'application

$$\Upsilon : \mathrm{Mor}(p_H, p_{H'}) \to \mathrm{Mor}_{\pi_1(B,b_0)}(p_H^{-1}(b_0), p_{H'}^{-1}(b_0))$$

définie par $\xi \mapsto \xi|_{p_H^{-1}(b_0)}$ (voir le Lemme 67).

Montrons que l'application Υ est une bijection. Remarquons d'abord, qu'il est suffisant de montrer ce résultat dans le cas où E_H et $E_{H'}$ sont connexes par arcs. En suite, le Lemme 57 implique que Υ est injective. Pour montrer la surjectivité de Υ, considérons une application $\pi_1(B, b_0)$-équivariante $\varrho : p_H^{-1}(b_0) \to p_{H'}^{-1}(b_0)$. Soit $x \in p_H^{-1}(b_0)$. On pose $x' = \varrho(x) \in p_{H'}^{-1}(b_0)$. Vérifions que $(p_H)_*(\pi_1(E_H, x)) \subset (p_{H'})_*(\pi_1(E_{H'}, x'))$. Puisque ϱ est $\pi_1(B, b_0)$-équivariante, pour tout $g \in (p_H)_*(\pi_1(E_H, x))$, on a

$$x'g = \varrho(x)g = \varrho(xg) = \varrho(x) = x'.$$

Donc, $g \in (p_{H'})_*(\pi_1(E_{H'}, x))$. Par conséquent, il existe un morphisme modéré de revêtements $\xi : E_H \to E_{H'}$ de p_H sur $p_{H'}$ tel que $\xi(x) = x'$ (voir le Corollaire 60). Puisque $\xi|_{p_H^{-1}(b_0)}$ et ϱ sont $\pi_1(B, b_0)$-équivariantes, l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p_H^{-1}(b_0)$ est transitive et $\xi(x) = \varrho(x)$, on obtient que $\xi|_{p_H^{-1}(b_0)} = \varrho$, ce qui démontre la surjectivité de Υ.

La deuxième affirmation de la proposition est un corollaire de la bijectivité de Υ. □

6. Théorème de van Kampen

6.1. **Sommes amalgamées.** On fait une petite parenthèse pour rappeler quelques notions de la théorie des groupes.

Soit N un ensemble. On appelle *groupe libre engendré par* N un couple (L, i), où L est un groupe et $i : N \to L$ est une application,

vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout couple (H, h), formé par un groupe H et une application $h : N \to H$, il existe un unique morphisme de groupes $f : L \to H$ tel que $h = f \circ i$.

Proposition 69. *Un couple (L, i) existe et est unique à isomorphisme près.*

Le groupe libre engendré par N est souvent noté $L(N)$. Un groupe est dit *libre* s'il est isomorphe au groupe libre engendré par un certain ensemble N. Le *rang* d'un groupe libre est le cardinal d'un tel ensemble N (on peut vérifier que deux groupes libres $L(N)$ et $L(N')$ sont isomorphes si et seulement si les ensembles N et N' ont le même cardinal).

Considérons trois groupes G_0, G_1 et G_3 et deux morphismes $i_1 : G_0 \to G_1$ et $i_2 : G_0 \to G_2$. On appelle *somme amalgamée* de G_1 et G_2 au-dessus de G_0 (au moyen de i_1 et i_2) un groupe G, muni de deux morphismes $g_1 : G_1 \to G$ et $g_2 : G_2 \to G$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G_1 \arrow[d, "g_1"] \\ G_2 \arrow[r, "g_2"] & G \end{tikzcd}$$

tels que le triplet (G, g_1, g_2) ait la propriété universelle suivante : pour tout groupe H muni de deux morphismes $h_1 : G_1 \to H$ et $h_2 : G_2 \to H$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G_1 \arrow[d, "h_1"] \\ G_2 \arrow[r, "h_2"] & H \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $f : G \to H$ tel que $f \circ g_1 = h_1$ et $f \circ g_2 = h_2$.

Proposition 70. *Un triplet (G, g_1, g_2) existe et est unique à isomorphisme près.*

Remarquons que l'unicité de triplet (G, g_1, g_2) est immédiate.

On utilise la notation $G_1 *_{G_0} G_2$ pour la somme amalgamée de G_1 et G_2 au-dessus de G_0.

Si le groupe G_0 est trivial, la somme amalgamée $G_1 *_{G_0} G_2$ est le *produit libre* $G_1 * G_2$ de G_1 et G_2.

Supposons que le groupe G_0 est de type fini, et notons $\delta_1, \ldots, \delta_r$ des générateurs de G_0. Supposons en plus que les groupes G_1 et G_2 sont de présentation finie. Considérons une présentation de G_1 donnée par des générateurs

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

et des relations

$$\rho_1, \ldots, \rho_m,$$

et une présentation de G_2 donnée par des générateurs

$$\beta_1, \ldots, \beta_k$$

et des relations

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell.$$

Alors, une présentation de la somme amalgamée $G_1 *_{G_0} G_2$ est donnée par les générateurs

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_k$$

et les relations

$$\begin{gathered}\rho_1, \ldots, \rho_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell, \\ i_1(\delta_1)(i_2(\delta_1))^{-1}, \ldots, i_1(\delta_r)(i_2(\delta_r))^{-1}.\end{gathered}$$

Ici, pour tout $j = 1$, …, r, on écrit $i_1(\delta_j)$ à l'aide des générateurs

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

et on écrit $(i_2(\delta_j))^{-1}$ à l'aide des générateurs

$$\beta_1, \ldots, \beta_k.$$

6.2. **Théorème de van Kampen.** Soit B un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. On suppose que B est recouvert par deux ouverts U_1 et U_2 qui sont connexes par arcs et semi-localement simplement connexes. On suppose aussi que l'intersection $U_1 \cap U_2$ est non vide, connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et on choisit un point de base $b_0 \in U_1 \cap U_2$. D'après la Proposition 32 (théorème de van Kampen faible), le groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$ est engendré par les images de $\pi_1(U_1, b_0)$ et $\pi_1(U_2, b_0)$ par les morphismes induits par les inclusions $\mathrm{in}_1 : U_1 \hookrightarrow B$ et $\mathrm{in}_2 : U_2 \hookrightarrow B$, respectivement. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, b_0) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(U_1, b_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (i_2)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{in}_1)_*} \\ \pi_1(U_2, b_0) & \xrightarrow{(\mathrm{in}_2)_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

où $i_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ et $i_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ sont des inclusions.

Théorème 2 (Théorème de van Kampen)**.** *Le groupe $\pi_1(B, b_0)$ est isomorphe à la somme amalgamée*

$$\pi_1(U_1, b_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, b_0)} \pi_1(U_2, b_0)$$

des groupes $\pi_1(U_1, b_0)$ et $\pi_1(U_2, b_0)$ au-dessus de $\pi_1(U_1 \cap U_2, b_0)$.

Démonstration. Par l'unicité de la somme amalgamée, il est suffisant de montrer que $\pi_1(B, b_0)$ vérifie la propriété universelle. Soit H un groupe muni de deux morphismes $h_1 : \pi_1(U_1, b_0) \to H$ et $h_2 : \pi_1(U_2, b_0) \to H$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, b_0) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(U_1, b_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (i_2)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_1} \\ \pi_1(U_2, b_0) & \xrightarrow{h_2} & H \end{array}$$

On veut montrer qu'il existe un morphisme $f : \pi_1(B, b_0) \to H$ tel que $f \circ (\mathrm{in}_1)_* = h_1$ et $f \circ (\mathrm{in}_2)_* = h_2$ (l'unicité d'un tel morphisme est un corollaire de la Proposition 32).

Le groupe $\pi_1(U_j, b_0)$, $j = 1, 2$, agit à droite sur H par

$$(g, x) \mapsto x \cdot h_j(g).$$

Soit $p_j : E_j \to U_j$ un revêtement de U_j de fibre H associé à cette action (voir la Proposition 68). Puisque $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$, les fibres, au-dessus de b_0, des revêtements $p_1|_{p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)}$ et $p_2|_{p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)}$ sont en bijection $\pi_1(U_1 \cap U_2, b_0)$-équivariante. Donc, ces revêtements sont isomorphes (voir la Proposition 68). Soit $\xi : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ un isomorphisme modéré de revêtements.

On note E l'espace quotient de $E_1 \coprod E_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim \xi(x)$ pour tout $x \in p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, et on note $\mathrm{pr} : E_1 \coprod E_2 \to E$ l'application quotient. Les applications $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ vérifient $p_2 \circ \xi = p_1$ sur $p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ et induisent une application continue $p : E \to B$, qui est un revêtement. De plus, $\mathrm{pr}|_{E_1}$

(respectivement, $\mathrm{pr}|_{E_2}$) est un isomorphisme modéré de revêtements p_1 et $p|_{E_1}$ (respectivement, p_2 et $p|_{E_2}$).

Le revêtement p définit une action à droite de $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre H au-dessus de b_0 :

$$(\alpha, x) \mapsto x\alpha,$$

où $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ et $x \in H$. Par les isomorphismes ci-dessus, pour tout $x \in H$, tout $j = 1, 2$ et tout $\beta \in \pi_1(U_j, b_0)$, on a

$$x(\mathrm{in}_j)_*(\beta) = x \cdot h_j(\beta).$$

Notons ε l'élément neutre de H. Considérons l'application

$$f : \pi_1(B, b_0) \to H$$

définie par

$$f(\alpha) = \varepsilon\alpha.$$

En particulier, on a

$$f \circ (\mathrm{in}_1)_* = h_1, \quad f \circ (\mathrm{in}_2)_* = h_2.$$

De plus, f est un morphisme de groupes. En effet, puisque $\pi_1(B, b_0)$ est engendré par $(\mathrm{in}_1)_*(\pi_1(U_1, b_0))$ et $(\mathrm{in}_2)_*(\pi_1(U_2, b_0))$, il est suffisant de vérifier l'égalité

$$f((\mathrm{in}_{j_1})_*(\beta_1) \dots (\mathrm{in}_{j_n})_*(\beta_n)) = f((\mathrm{in}_{j_1})_*(\beta_1)) \dots f((\mathrm{in}_{j_n})_*(\beta_n))$$

pour tout entier $n \geq 1$ et des éléments quelconques $\beta_k \in \pi_1(U_{j_k}, b_0)$, $k = 1, \dots, n$. On montre facilement cette égalité par récurrence sur n.

Par conséquent, f est le morphisme recherché. □

Corollaire 71. *Si $U_1 \cap U_2$ est simplement connexe, alors le groupe $\pi_1(B, b_0)$ est le produit libre $\pi_1(U_1, b_0) * \pi_1(U_2, b_0)$ des groupes $\pi_1(U_1, b_0)$ et $\pi_1(U_2, b_0)$.* □

Exemple. Considérons le bouquet $S^1 \bigvee S^1$ de deux cercles, c'est-à-dire, l'espace quotient de $S^1 \coprod S^1$ tel que l'application quotient

$$\mathrm{pr} : S^1 \coprod S^1 \to S^1 \bigvee S^1$$

identifie le point 1 du premier cercle et le point 1 du deuxième cercle. Notons b_0 l'image des deux points identifiés. Soit $a_1 \neq 1$ un point du premier cercle, et soit $a_2 \neq 1$ un point du deuxième cercle. Notons b_1 et b_2 les points correspondants de $S^1 \bigvee S^1$. On pose $U_1 = (S^1 \bigvee S^1) \setminus \{b_1\}$ et $U_2 = (S^1 \bigvee S^1) \setminus \{b_2\}$. Les sous-espaces U_1 et U_2 forment un recouvrement ouvert de $S^1 \bigvee S^1$. Chacun des sous-espaces U_1 et U_2 est homotopiquement équivalent à S^1. De plus, $U_1 \cap U_2$ est contractile. Donc,

$$\pi_1(S^1 \bigvee S^1, b_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, le groupe fondamental du bouquet de deux cercles n'est pas abélien et est un groupe libre de rang 2. On montre par récurrence que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, le groupe fondamental du bouquet de n cercles est un groupe libre de rang n.