Examen Topologie algébrique des variétés II

2 Mars 2021

Notes de cours autorisées, portables interdits, durée 3h.

Exercice 1: Soit $X = S^2 \cup D^2 / \sim$ où S^2 est la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$, D^2 le disque unité dans le plan $z = 0$ et $x \sim y$ si et seulement si $x = \pm y$. On note A l'image de S^2 dans X.

Décrire la suite exacte longue d'homotopie de la paire (X, A) en degré ≤ 2.

Exercice 2: Est-il vrai que tout fibré $p : X \to S^4$ de fibre S^2 est trivial?

Exercice 3:

Soit $n > 0$ un entier et $X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n, \text{ tel que } x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$.

1. Montrer que l'application $p : X_{n+1} \to X_n$ définie par $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$ est une fibration et déterminer le type d'homotopie de sa fibre F_n.

2. Montrer que p admet une section et calculer $\pi_1(X_n)$ et $\pi_2(X_n)$ pour tout $n > 0$.

3. Calculer la deuxième page de la suite spectrale de Serre cohomologique de la fibration p en fonction des groupes $H^*(X_n, \mathbb{Z})$.

4. En déduire qu'il existe pour $k \geq 2$ une suite exacte

$$0 \to H^k(X_n, \mathbb{Z}) \to H^k(X_{n+1}, \mathbb{Z}) \to H^{k-2}(X_n, \mathbb{Z}) \otimes H^2(F_n, \mathbb{Z}) \to 0.$$

5. En déduire que $H^k(X_n, \mathbb{Z})$ est libre pour tout $k \geq 0$ et $n > 0$ et calculer $P_n = \sum_{k>0} t^k \dim H^k(X_n, \mathbb{Z})$ pour tout $n > 0$.

Exercice 4:

Soit G un groupe et EG un espace topologique contractile sur lequel G agit proprement et librement. On note $BG = EG/G$ le quotient.

Si G agit continûment sur un espace topologique X on pose $H_*^G(X, \mathbb{Z}) = H_*(EG \times X/G, \mathbb{Z})$ où G agit diagonalement sur $EG \times X$.

1. Montrer que $H_*^G(pt, \mathbb{Z})$ ne dépend que de G et la calculer pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Montrer que l'application $p : EG \times X/G \to BG$ induite par la première projection est une fibration et calculer la deuxième page de la suite spectrale de Serre correspondante.

3. En utilisant la deuxième projection, montrer que si G agit proprement et librement sur X alors $H_*^G(X, \mathbb{Z}) = H_*(X/G, \mathbb{Z})$.

Dans la suite on pose $S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| = [z_2| = 1\}$. On fait agir le générateur de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $S^1 \times S^1$ par $(z_1, z_2) \mapsto (\overline{z}_1, \overline{z}_2)$.

4. Calculer $H_*(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}^2)$ où on fait agir le générateur de $\pi_1(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}))$ par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

5. Calculer dans cet exemple la limite de la suite spectrale de la question **2.**.

6. A-t-on $H_*^G(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) = H_*(S^1 \times S^1/G, \mathbb{Z})$?

7. A-t-on $H_*^G(S^1 \times S^1, \mathbb{Q}) = H_*(S^1 \times S^1/G, \mathbb{Q})$?