Examen - Géométrie différentielle et riemannienne

Durée de trois heures. Les notes de cours sont autorisées, pas les téléphones portables. Toutes les applications sont différentiables. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne et $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité munie de la métrique induite.

Exercice 0 : préliminaire à l'exercice 1

1. Soit ω une 2-forme sur $\mathbb{R}^2$ à support compact. Montrer qu'il existe une 1-forme α sur $\mathbb{R}^2$ à support compact telle que $d\alpha = \omega$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$.

Indication : en notant $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ on pourra traiter le cas où $f(x,y) = g(x)h(y)$ puis se ramener au cas où $\int f(x,y)dy = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que l'application $H^2(S^2) \to \mathbb{R}$ définie par $\omega \to \int_{S^2} \omega$ est un isomorphisme où $H^2(S^2)$ désigne l'espace vectoriel de cohomologie de De Rham de degré 2 de la sphère.

Exercice 1 : La formule de Gauss-Bonnet

Soit Σ une variété compacte sans bord de dimension 2 et $i : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ une immersion. On suppose qu'il existe une application $N : \Sigma \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ vérifiant pour tout $x \in \Sigma$: $N(x) \perp d_x i(T_x\Sigma)$.

1. Expliquer comment i et N permettent de définir respectivement une métrique g et une orientation sur Σ.

2. Soit K et dVol la courbure de Gauss et la forme volume de Σ pour cette métrique. Montrer qu'on a

$$K\mathrm{dVol} = N^*\omega$$

où ω est la forme de volume euclidienne de S^2.

3. Supposons qu'il existe $y \in S^2$ tel que pour tout $x \in N^{-1}(\{y\})$, N soit un difféomorphisme local en x [1]. On notera $\epsilon_x = \pm 1$ suivant que d_xN préserve ou renverse l'orientation. En remplaçant ω par une 2-forme à support dans un voisinage de y, montrer l'égalité

$$\int_\Sigma N^*\omega = 4\pi \sum_{x \in N^{-1}(\{y\})} \epsilon_x.$$

4. On admet dans cette question que deux immersions $i_0, i_1 : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ sont isotopes au sens où il existe $I : \Sigma \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ telle que $i_t = I(\cdot, t)$ soit une immersion pour tout $t \in [0,1]$ [2]. Montrer qu'on a l'égalité suivante (théorème de Gauss-Bonnet) en se ramenant à une surface de genre g standard (raisonner sur un dessin)

$$\int_\Sigma K\mathrm{dVol} = 2\pi(2-2g).$$

1. Le théorème de Sard assure l'existence de y
2. C'est un théorème difficile dû à Smale

Exercice 2 : Flot géodésique et flot hamiltonien. Soit (M, g) une variété riemannienne complète, $\pi : TM \to M$ son fibré tangent et $p : T^*M \to M$ son fibré cotangent.

1. Montrer que $\Phi : TM \to T^*M$ définie pour $x \in M$ et $X, Y \in T_xM$ par $\Phi(X)(Y) = g_x(X, Y)$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

2. Soit α la 1-forme sur T^*M définie par $\alpha_\eta(\xi) = \eta(d_\eta p(\xi))$ pour $x \in M$, $\eta \in T_x^*M$ et $\xi \in T_\eta T^*M$. Calculer α et $\omega = d\alpha$ dans une carte $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, ces cordonnées désignant le covecteur $\sum_i p_i dx_i$ au point de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$. En déduire que ω est une forme symplectique.

3. Montrer qu'il existe un champ de vecteur ξ sur TM dont le flot φ_t est le "le flot géodésique" au sens où $\varphi_t(X) = c'(t)$ avec $c : \mathbb{R} \to M$ la géodésique satisfaisant $c(0) = x$ et $c'(0) = X$. Calculer ce champ dans une carte $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$, ces coordonnées désignant le vecteur $\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ au point de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$.

4. Calculer $L_\xi(\Phi^*\alpha)$.

5. Etant donné une fonction $H : T^*M \to \mathbb{R}$, elle définit un champ de vecteur X_H dit hamiltonien par l'équation $dH(Y) + \omega(X_H, Y) = 0$ pour tout champ de vecteur Y sur T^*M. Trouver $F : TM \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\Phi^*(X_{F\circ\Phi^{-1}}) = \xi$.

Exercice 4 : la poire de Tannery.

Soit M le sous-ensemble défini par les équations

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = \frac{1}{8} z^2(1 - z^2), z > 0\}$$

1. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
2. On munit M de la métrique g induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^3$. Trouver sans calcul deux géodésiques, l'une fermée, l'autre pas et calculer leur longueur. La variété M est-elle complète pour la distance riemannienne ?
3. Montrer que l'application $F :]0, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to M$ définie par

$$F(u, \theta) = (\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(2u) \cos(\theta), \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(2u) \sin(\theta), \sin(u))$$

   est un difféomorphisme sur son image et calculer la métrique F^*g.
4. Soit $c :]a, b[\to M$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc. Trouver deux équations différentielles satisfaites par les fonctions $u(t)$ et $\theta(t)$ définies par $c(t) = F(u(t), \theta(t))$.
5. Soit $C = \sin(2u(0))^2\theta'(0)$ et $\delta = \sqrt{1 - \frac{C^2}{8}}$. Montrer qu'en posant $\delta \sin(x) = \cos(2u)$, on a l'équation différentielle

$$(\delta \sin x + 2)\dot{x} = \pm 4\sqrt{2}$$

6. En déduire que toutes les géodésiques complètes de M sont périodiques et calculer leur longueur.