Géométrie différentielle et riemannienne - 24/10/2018

Durée de trois heures. Les notes de cours sont autorisées, pas les téléphones portables.

Exercice 1 : Bianchi et Schur

Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇. On note $\Omega^k(M,E)$ l'ensemble des sections du fibré $\Lambda^k T^*M \otimes E$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille d'opérateurs

$$d^\nabla : \Omega^k(M,E) \to \Omega^{k+1}(M,E), \quad k \in \mathbb{N}$$

vérifiant $d^\nabla = \nabla$ si $k=0$ et $d^\nabla(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d^\nabla \beta$ pour tout $\alpha \in \Omega^k(M)$ et $\beta \in \Omega^l(M,E)$.

2. Etablir la formule suivante pour $\alpha \in \Omega^1(M,E)$:

$$(d^\nabla \alpha)(X,Y) = \nabla_X \alpha(Y) - \nabla_Y \alpha(X) - \alpha([X,Y]).$$

3. Prouver que $(d^\nabla)^2 s = F_\nabla(s)$ où $s \in \Omega^0(M,E)$ et $F_\nabla \in \Omega^2(M, \operatorname{End} E)$ est la courbure de la connexion ∇.

4. Expliquer brièvement comment étendre d^∇ à tout fibré construit à partir de E à l'aide de la dualité et du produit tensoriel.

5. *Identité de Bianchi.* Démontrer l'identité $d^\nabla F_\nabla = 0$.

On suppose dorénavant qu'on a une métrique riemannienne g sur M et que $E = TM$ avec la connexion de Levi-Civita.

6. On définit $\alpha \in \Omega^1(M,TM)$ par $\alpha(X) = X$ et $\beta \in \Omega^1(M,TM^*)$ par $\beta(X)(Y) = g(X,Y)$. Calculer $d^\nabla \alpha$ et $d^\nabla \beta$.

On supposons que M est connexe, de dimension $n \geq 3$ et que pour tout x, sa courbure sectionnelle $K_x(P)$ le long d'un plan $P \subset T_xM$ ne dépend pas de P. On la note alors $K(x)$.

7 *****. Montrer que pour tous champs de vecteurs X, Y on a

$$F_\nabla(X,Y)Z = K(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y).$$

8. *Théorème de Schur.* Montrer que K est constante. On pourra faire intervenir α et β et appliquer l'identité de Bianchi.

Exercice 2 : Submersions riemanniennes

Soit (M,g) une variété riemannienne et $N \subset M$ une sous-variété. On note $\mathcal{N}$ le fibré normal de N défini pour tout $x \in N$ par $\mathcal{N}_x = (T_xN)^\perp$ et $\Pi : T_xM \to (T_xN)^\perp$ la projection orthogonale.

---

*. Question hors barème à faire à la fin de l'épreuve

1. Soit X, Y deux champs de vecteurs tangents à N. Montrer que l'expression $B(X,Y) = \Pi(\nabla_X Y)$ définit une section du fibré $Q(TN) \otimes \mathcal{N}$ (appelée encore deuxième forme fondamentale).

2. Montrer que B est nulle si et seulement si toute géodésique de N est une géodésique de M. On dira dans ce cas que N est une sous-variété totalement géodésique de M.

3. Montrer que si $\Phi : M \to M$ est une isométrie, l'ensemble $F = \{x \in M, \Phi(x) = x\}$ est une sous-variété totalement géodésique de M. On pourra pour $x \in F$ établir l'égalité $\exp_x \circ D_x\Phi = \Phi \circ \exp_x$ au voisinage de $0 \in T_xM$.

Soit $f : (M, g) \to (N, h)$ une application différentiable entre deux variétés riemanniennes. On dit que f est une submersion riemannienne si pour tout $x \in M$, d_xf induit une isométrie de $\ker(d_xf)^\perp$ sur $T_{f(x)}N$. On appelle fibres de f les sous-variétés de la forme $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in N$ et on se donne pour la suite un champ de vecteurs X sur N.

4. Montrer qu'il existe un unique champ $\tilde{X}$ sur M vérifiant $d_xf(\tilde{X}(x)) = X(f(x))$ et $\tilde{X}(x) \perp \ker d_xf$.

5. Soit Z_1, Z_2 deux champs sur M vérifiant $d_xfZ_i(x) = 0$ pour tout $x \in M$ et pour $i = 1, 2$. Montrer les égalités

$$(L_{\tilde{X}}g)(Z_1, Z_2) = g(\nabla_{Z_1}\tilde{X}, Z_2) + g(Z_1, \nabla_{Z_2}\tilde{X}) = -2g(\tilde{X}, \nabla_{Z_1}Z_2)$$

6. En déduire que les fibres de f sont totalement géodésiques si et seulement si le flot de $\tilde{X}$ induit des isométries entre les fibres pour tout champ X.

7. Construire deux submersions riemanniennes : une qui satisfait et une qui ne satisfait pas les propriétés de la question 6.

Exercice 3 : Hyperboloïde à une nappe

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ que l'on munit de la métrique induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que H peut s'obtenir de deux façons distinctes comme une réunion de droites.

2. Trouver quatre géodésiques distinctes passant par $(1, 0, 0)$.

3. Prouver que H est complet pour sa distance riemannienne.

4. Montrer que la deuxième forme fondamentale s'annule le long des droites obtenues dans la question 1.

5. Montrer que les vecteurs propres de l'opérateur de forme sont tangents soit aux méridiens (intersections de H avec un plan contenant l'axe de révolution) soit aux parallèles (intersections de H avec des plans orthogonaux à l'axe de révolution).

6. En déduire les courbures principales de H.