Examen de Topologie algébrique des variétés

Exercice 1: Homologie d'un produit de CW-complexes

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et X_m le CW-complexe obtenu en attachant D^2 à S^1 par l'application $\Phi_m : \partial D^2 \to S^1$ définie par $\Phi_m(z) = z^m$.

1. Calculer $H_k(X_m, \mathbb{Z})$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

2. On se donne maintenant deux entiers $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Expliciter une décomposition cellulaire du produit $X_m \times X_n$.

3*. Calculer à partir de cette décomposition l'homologie de $X_m \times X_n$ en fonction de m et n.

4. Vérifier ce résultat à l'aide de la formule de Künneth.

Exercice 2: Cohomologie d'une somme connexe

Soit $X = (S^1 \times S^3) \# \mathbb{C}P^2$. Explicitement, cette variété est obtenue de la façon suivante: soit D^4 une boule fermée incluse dans $S^1 \times S^3$ et B^4 une boule fermée incluse dans $\mathbb{C}P^2$: alors

$$X = \left(S^1 \times S^3 \setminus \dot{D}^4\right) \amalg \left(\mathbb{C}P^2 \setminus \dot{B}^4\right) / \sim$$

où $x \sim x'$ si $x \in \partial D^4$ et $x' \in \partial B^4$ sont identifiés par un homéomorphisme $D^4 \simeq B^4$.

1. Montrer que X est une variété compacte connexe orientable de dimension 4.

2. Calculer $H_k(X, \mathbb{Z})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Trouver une famille de sous-variétés de X dont les classes fondamentales engendrent $H_*(X, \mathbb{Z})$.

4. En déduire l'algèbre de cohomologie $H^*(X, \mathbb{Z})$. Est-elle isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^5)$?

Exercice 3: Classe fondamentale modulo 2

Soit X une variété compacte connexe de dimension n. On rappelle qu'il existe un morphisme $\rho : \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que pour tout $\gamma \in \pi_1(X)$, $\rho(\gamma) \neq 0$ si et seulement si l'orientation de X à changé le long de γ. En particulier $\rho = 0$ si et seulement si X est orientable.

1. Construire à partir de ρ une classe $w_1 \in H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui s'annule si et seulement si X est orientable.

On admet dans la suite que w_1 est Poincaré dual d'une sous-variété Y de dimension $n - 1$.

2. Montrer qu'il existe une variété orientable à bord Z et une application $p : Z \to X$ qui induit un homéomorphisme $Z \setminus \partial Z \to X \setminus Y$ et un revêtement double $\partial Z \to Y$. L'involution de ∂Z qui échange les préimages de p préserve-t-elle l'orientation?

3. A partir de la suite exacte courte

$$0 \to C_*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} C_*(X, \mathbb{Z}) \to C_*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0$$

montrer qu'il existe des morphismes $\beta_k : H_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{k-1}(X, \mathbb{Z})$ s'insérant dans une suite exacte longue.

4. Montrer que si X est non orientable, $\beta_n([X]) \in H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ est un élément non nul de 2-torsion où $[X] \in H_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ désigne la classe fondamentale.

5*. Toujours dans le cas non orientable, comparer $\beta_n([X])$ et $w_1 \cap [X]$.

Exercice 4: Volume simplicial

Soit X une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension n. On définit $||X|| = \inf\{\sum_{i\in I} |c_i|\}$ où la borne inférieure porte sur toute les manières de représenter la classe fondamentale $[X]$ par un cycle $\sum_{i\in I} c_i\sigma_i \in C_n(X, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application de degré d alors

$$||X|| \geq d||Y||.$$

2. En déduire que si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $||X|| = ||Y||$.

3. Calculer $||S^n||$ et $||T^n||$ pour $n \geq 1$.

4. Soit $\tilde{X} \to X$ un revêtement de degré d. Montrer que l'application $T : C_*(X, \mathbb{Z}) \to C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ qui à σ associe la somme de ses relevés est un morphisme de complexes. En déduire l'égalité

$$||\tilde{X}|| = d||X||.$$

5*. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour toute surface S de genre $g \geq 1$ on ait $||S|| = C\chi(S)$.

6*. Montrer que si X est de dimension n et Y de dimension m on a

$$||X \times Y|| \leq \binom{n+m}{n} ||X|| \cdot ||Y||.$$