1 Premiers exemples de surfaces de Riemann

1.1 Définitions

Définition 1. *Une surface de Riemann est un espace topologique séparé et à base dénombrable X muni d'un atlas maximal $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ dont les applications de transition sont holomorphes, cf [2] Section 3.1.*

Définition 2. *Fonctions holomorphes entre deux surfaces de Riemann.*

Exemple de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Définition de $\mathcal{M}_X$, ensemble des fonctions méromorphes sur X.

Exercice 1.
- *Montrer que $\mathcal{M}_X$ est un corps et que si X et Y sont deux surfaces de Riemann biholomorphes alors $\mathcal{M}_X$ et $\mathcal{M}_Y$ sont isomorphes.*
- *Montrer qu'une fonction $f : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe ssi la même fonction vue comme $f : X \to \mathbb{P}^1$ est holomorphe.*
- *Montrer que toute fonction holomorphe $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est une fraction rationnelle.*
- *Montrer que tout biholomorphisme $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.*

1.2 L'origine des surfaces de Riemann, le prolongement analytique

Notion de prolongement analytique, exemple des fonctions $\frac{1}{1-z}, \Gamma(z), \zeta(z), \sqrt{z}, \ln(z)$.

Définition 3. *Soit $p \in \mathbb{C}$. Soit (U, f) et (V, g) deux couples où U (resp. V) est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant p et f (resp. g) est holomorphe sur U (resp. V). On dit que (U, f) et (V, g) ont le même germe en p et on note $(U, f)_p \sim (V, g)_p$ s'il existe $W \subset U \cap V$ un ouvert tel que $f|_U = g|_V$. La classe d'équivalence de (U, f) est notée f_p.*

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les germes. Il est muni de la topologie engendrée par les ouverts

$$\mathcal{U}_{U,f} = \{f_p, p \in U\}$$

Proposition 1. *Soit $x \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_x$ la composante connexe de $\mathcal{F}$ contenant x. Alors $\mathcal{F}_x$ est une surface de Riemann et les applications $f_p \mapsto p$ et $f_p \mapsto f(p)$ sont holomorphes.*

Exercice 2. *Monter que si $f : U \to \mathbb{C}$ satisfait une équation différentielle de la forme $P(z, f(z), f'(z)) = 0$ pour tout $z \in U$, alors la fonction obtenue par prolongement analytique satisfait la même équation (formaliser).*

1.3 Courbes algébriques

Proposition 2. *Si $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est tel que les équations $P(x, y) = \partial_x P(x, y) = \partial_y P(x, y) = 0$ n'ont pas de solution, l'ensemble*

$$X_P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / P(x, y) = 0\}$$

est muni d'une structure de surface de Riemann telle que les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont holomorphes.

Plus généralement, si on se donne U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $n-1$ fonctions $f_1, \ldots, f_n$ holomorphes (i.e. développables en série entière) telles que pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$ tel que $f_1(z) = \cdots = f_{n-1}(z) = 0$ on a

$$\operatorname{rk} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z) = n - 1.$$

Alors le sous-ensemble de U où les fonctions f_i s'annulent simultanément est une surface de Riemann et les applications coordonnées sont holomorphes.

Soit $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes et posons

$$X_P = \{z \in \mathbb{C}^n / P_1(z) = \cdots = P_k(z) = 0\}.$$

On l'appelle la variété algébrique affine définie par le système d'équations P.

Notons $P_1 = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. En posant $d_1 = \max\{\sum i_j / a_{i_1,\ldots,i_n} = 0\}$ on définit

$$P_1^h = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_0^{d_1 - \sum i_j} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

On pose $\hat{X}_P = \{z = [z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}^n / P_1^h(z) = \cdots = P_k^h(z) = 0\}$ et on l'appelle variété algébrique projective associée à P.

Proposition 3. *Critère pour que $\hat{X}_P$ soit une surface de Riemann compacte.*

Exemple de la courbe $y^2 = x^3 - x$ dans $\mathbb{C}^2$ et P^2.

Exercice 3.

- *Soit V un espace vectoriel de dimension 3 et $[v] \in \mathbb{P}(V)$ un point qui ne rencontre pas une courbe algébrique $X \subset \mathbb{P}(V)$. Montrer que la projection $X \to \mathbb{P}(V/\mathbb{C}v)$ est holomorphe.*
- *Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ définie par $\varphi[x, y] = [x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n]$ est un plongement, montrer que l'image est une courbe algébrique projective.*
- *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 et $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique non-dégénérée. Montrer que $X_q \subset \mathbb{P}(E)$ est une surface de Riemann biholomorphe à $\mathbb{P}^1$.*

1.4 Quotients

Proposition 4. *Si un groupe G discret agit proprement, librement et holomorphiquement sur une surface de Riemann X alors le quotient X/G est muni d'une unique structure de surface de Riemann telle que l'application $X \to X/G$ soit holomorphe.*

Réciproquement, si $\pi : X \to Y$ est une revêtement avec Y une surface de Riemann, alors il existe une unique structure de surface de Riemann sur X telle que l'application π est holomorphe. En particulier, toute surface de Riemann est le quotient d'une surface de Riemann simplement connexe et on a le

Théorème 1 (Uniformisation)**.** *Toute surface de Riemann connexe et simplement connexe est biholomorphe à $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ ou $\mathbb{P}^1$ où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.*

Exemples de quotients, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est un réseau, $\mathbb{C}^*/(z \sim qz)$.

Proposition 5. *Les surfaces de Riemann $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}/\operatorname{Im}(z) > 0\}$ sont biholomorphes. Leurs groupes d'automorphismes sont respectivement*

$$PU(1,1) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1\}/\{\pm I\}$$

et $PSL_2(\mathbb{R})$. De plus, le groupe $PU(1,1)$ agit proprement sur $\mathbb{D}$.

Exercice 4.
- *Montrer que le groupe d'automorphismes de $\mathbb{P}^1$ est $PGL_2(\mathbb{C})$ et qu'aucun sous-groupe n'agit librement.*
- *Montrer que le groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}$ est $\{z \mapsto az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$. Trouver tous les quotients.*
- *Montrer que tout sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ sans torsion agit proprement et librement sur $\mathbb{H}$.*

Soit $N > 3$. On définit $\Gamma_N = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/A \equiv I \mod N\}$ et on l'appelle sous-groupe de congruence de niveau N.

Proposition 6. *Le groupe Γ_N agit librement sur $\mathbb{H}$.*

On note le quotient X_N : c'est la variété de congruence. La variété X_7 a pour groupe d'automorphismes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Elle est isomorphe à la courbe algébrique $\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2/x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$ et s'appelle la courbe de Klein (admis).

2 Topologie des surfaces de Riemann

2.1 Propriété locale des morphismes

Théorème 2 (Inversion locale)**.** *Si $f : X \to Y$ est holomorphe entre deux surfaces de Riemann et que pour une carte (U, φ) autour de p et une carte (V, ψ) autour de $f(p)$ on a*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \neq 0$$

Alors f est un biholomorphisme local autour de p.

Dans le cas contraire, on a $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) = 0$ et ce indépendamment du choix de cartes. On dit que p est un point critique. Le point $f(p)$ est dit valeur critique.

Proposition 7. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann connexes. Pour tout $p \in X$ il existe un unique entier $k_p > 0$ tel que dans un système de cartes adaptées f s'écrive $f(z) = z^{k_p}$.*

L'entier k_p s'appelle l'indice de ramification de f en p. Il vérifie $k_p > 1$ ssi p est un point critique. On déduit de la proposition précédente que f est ouverte (l'image d'un ouvert est ouverte).

Proposition 8. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces connexes.*
- *L'ensemble $R = \{p \in X, k_p > 1\}$ est discret dans X.*
- *Si f est propre, $f(R)$ est discret dans Y.*
- *Si f est propre alors pour tout $y \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est fini. On pose $d = \sum_{x/f(x)=y} k_x$. Cette quantité est indépendante de y, on l'appelle degré : $d = \deg f$.*

Exercice 5.
- *Calculer le degré d'une fraction rationnelle, vue comme application holomorphe $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.*
- *Montrer que si f est méromorphe sur X, elle a autant de pôles que de zéros, comptés avec multiplicité.*
- *Montrer que si $f : X_1 \to X_2$ et $g : X_2 \to X_3$ sont propres, alors $\deg g \circ f = \deg g + \deg f$.*

On a l'application suivante : si f est une fonction méromorphe sur X qui n'a qu'un pôle simple, alors $X \simeq \mathbb{P}^1$.

On verra plus tard que le degré de f est aussi celui de l'extension de corps $f^* : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$.

Exemple de la courbe $y^2 - x^3 + x = 0$ projectivisée, munie de la projection sur x.

2.2 Triangulations

Notons $\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in [0,1]^n, \sum_i x_i = 1\}$. On utilisera seulement $\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2$ qui sont respectivement homéomorphes à un point, un segment et un triangle.

Rappelons la définition formelle d'un graphe : on se donne deux ensembles (ici finis) E (arêtes) et V (sommets) et deux applications $s_0, s_1 : E \to V$ qui sont respectivement la source et le but de l'arête correspondante. Il s'agit de données combinatoires permettant de construire le graphe de la façon suivante :

$$G = V \times \Delta^0 \amalg E \times \Delta_1 / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence la plus fine qui vérifie $(e, 1, 0) \sim (s_0(e), 1)$ et $(e, 0, 1) \sim (s_1(e), 1)$. On construit de même un 2-complexe simplicial à partir de trois ensembles I_0, I_1, I_2 paramétrisant respectivement les sommets, les arêtes et les triangles et d'applications de recollement $s_0, s_1 : I_1 \to I_0$ et $t_0, t_1, t_2 : I_2 \to I_1$ vérifiant : $s_1 \circ t_0 = s_0 \circ t_2, s_0 \circ t_0 = s_0 \circ t_1$ et $s_1 \circ t_2 = s_1 \circ t_1$.

On a alors
$$T = I_0 \times \Delta^0 \amalg I_1 \times \Delta^1 \amalg I_2 \times \Delta^2 / \sim .$$
où $\sim$ est la relation d'équivalence la plus fine qui vérifie pour tout $e \in I_1, f \in I_2, x, y \in [0,1]$ vérifiant $x + y = 1$:

$$(e, 1, 0) \sim (s_0(e), 1), (e, 0, 1) \sim (s_1(e), 1) \text{ et}$$

$$(f, 0, x, y) \sim (t_0(f), x, y), (f, x, 0, y) \sim (t_1(f), x, y), (f, x, y, 0) \sim (t_2(f), x, y)$$

Exemples de triangulation : un triangle, un tore, un huit.

Pour tout sommet $x \in I_0$, on considère un graphe G_x dont les sommets sont les demi-arêtes a recollées à x et deux demi-arêtes a, a' sont reliées s'il existe un triangle f dont un coin est recollé à x à travers les demi-arêtes a et a'.

Définition 4. *On dit que T est régulière si toute arête $e \in I_1$ est recollée à exactement deux triangles et si pour tout $x \in I_0$, G_x est un cercle. On dit que T est orientée si pour toute arête $e \in I_1$, le recollement sur les deux triangles renverse l'orientation.*

Théorème 3. *Soit X une surface de Riemann compacte munie d'une fonction méromorphe. Alors X est homéomorphe à T où T est une triangulation régulière orientée, cf [1] p. 40.*

Théorème 4. *Toute surface de Riemann est homéomorphe à la sphère S^2 ou à un $4g$-gône recollé de façon standard, cf [4] p. 23.*

On appelle g le genre de la surface : la fin de la section montre qu'il s'agit d'un invariant bien défini.

Pour tout groupe abélien A, on définit le complexe suivant : $C_i = \bigoplus_{j \in I_i} Ae_j$ avec $\partial_1 e_j = e_{s_1(j)} - e_{s_0(j)}$ et $\partial_2 e_j = e_{t_0(j)} - e_{t_1(j)} + e_{t_2(j)}$. On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 5. *L'homologie du complexe $C_0 \overset{\partial_1}{\leftarrow} C_1 \overset{\partial_2}{\leftarrow} C_2$ ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à T. En particulier pour une surface de Riemann X, on notera $H_i(X, A)$ cette homologie. On a $H_0(X, A) = H_2(X, A) = A$ et $H_1(X, A) = A^{2g}$.*

On définit de même pour tout groupe abélien A la cohomologie du complexe dual $C^i(X, A) = \hom(C_i, A)$. On obtient des groupes $H^i(X, A)$ qui ne dépendent pas de la triangulation et qui coïncident avec la cohomologie singulière ou la cohomologie de De Rham de X si $A = \mathbb{R}$.

Proposition 9. *Soit X une surface de Riemann compacte triangulée. La quantité $|I_0| - |I_1| + |I_2|$ ne dépend pas de la triangulation et vaut $2 - 2g$ où g est le genre de la surface.*

2.3 Autour de Riemann-Hurwitz

Proposition 10. *Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe et sans point critique entre deux surfaces de Riemann compactes alors*

$$\chi(X) = \deg(f)\chi(Y).$$

Proposition 11. *Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann compactes alors*

$$\chi(X) = \deg(f)\chi(Y) - \sum_{x \in X}(k_x - 1)$$

Exemple de la courbe projective $X = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 / x^3 - xz^2 - y^2 z = 0\}$ munie de l'application holomorphe $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ définie par $\varphi([x,y,z]) = [y,z]$.

Proposition 12. *Soit $P \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme de la forme $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^k$ avec $\deg a_k(x) = n-k$. Supposons que P définit une courbe lisse X_P dans $\mathbb{C}^2$. Soit p_1 la première projection. Alors $\sum_{(x,y)\in X_P} (k_{x,y} - 1) = n(n-1)$. On en déduit que toute courbe projective de degré n dans $\mathbb{P}^2$ est de genre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.*

Exercice 6. *Soit X une courbe algébrique lisse dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ définie par un polynôme $F(x_1, y_1, x_2, y_2)$ homogène de degré d_1 dans les variables (x_1, y_1) et d_2 dans les variables (x_2, y_2). En introduisant une fonction méromorphe adéquate, montrer que son genre est $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$.*

2.4 Formes différentielles holomorphes

Définition 5. *Si $(X, (U_i, \varphi_i)_{i \in I})$ est une surface de Riemann, une forme différentielle holomorphe est la donnée d'une famille de fonctions g_i sur $\varphi_i(U_i)$ vérifiant sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ la formule $g_j(z) = g_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(z))(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(z)$.*

En notant plutôt $\omega = (g_i(z)dz)$ on obtient la formule $g_j(z)dz = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* g_i(z)dz$.

Sur $\mathbb{P}^1$, toutes les différentielles holomorphes sont nulles. L'espression dz définit une différentielle holomorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda$ qui ne s'annule jamais. Sur la courbe d'équation $y^2 = P(x)$ où P est un polynôme de degré 3 à racines simples, l'expression $\omega = \frac{dx}{y} = 2\frac{dy}{P'(x)}$ définit une différentielle holomorphe. De plus, elle s'étend holomorphiquement sur la projectivisation de la courbe.

On montrera que sur une surface de Riemann compacte de genre g, les formes différentielles holomorphes forment un espace vectoriel de dimension g. C'est une définition analytique du genre.

3 Autour du théorème de Riemann-Roch

3.1 Fibrés en droites

Pour ce chapitre, on réfère à [3].

Définition 6. *Un fibré en droite sur une surface de Riemann X est un espace topologique L et une application continue $\pi : L \to X$ tel que pour tout $x \in X$, la "fibre" $\pi^{-1}(\{x\})$ est munie d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension 1.*

On suppose qu'il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X et des homéomorphismes $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ tels que $p_1 \circ \Phi_i = \pi$ et tel que la restriction de Φ_i à chaque fibre soit un isomorphisme linéaire $\pi^{-1}(\{x\}) \simeq \mathbb{C}$. Finalement, on suppose que l'application de transition $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{C} \to U_i \cap U_j \times \mathbb{C}$ est de la forme $(z,w) \mapsto (z, g_{ij}(z)w)$ où $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ est holomorphe.

Les applications g_{ij} satisfont la relation dite de cocycle $g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ en restriction à l'ouvert $U_i \cap U_j \cap U_k$. Réciproquement, si on se donne un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X et des applications holomorphes $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ vérifiant la relation de cocycle alors on construit un fibré en droite qui admet ces fonctions pour fonctions de transition.

Exemple du fibré tautologique sur $\mathbb{P}^1$. Si V est un espace vectoriel de dimension 2, l'espace $L = \{(D, w)/D \in \mathbb{P}V, w \in D\}$ est un fibré en droite sur $\mathbb{P}V$ appelé fibré tautologique. Sa fonction de transition dans le système de carte usuel est $z \mapsto 1/z$. Il est noté $\mathcal{O}(-1)$. Exemples des fibrés tangents et cotangents (dit canonique et noté K) sur une surface de Riemann.

Définition 7. *Une section holomorphe (resp. lisse) d'un fibré en droite $\pi : L \to X$ est une application continue $s : X \to L$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}$ et telle que pour tout $i \in I$ on ait : $\Phi_i(s(z)) = (z, s_i(z))$ avec $s_i : U_i \to \mathbb{C}$ holomorphe (resp. lisse). On note $H^0(X, L)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes de L.*

Exemple du fibré trivial, le fibré tautologique sur $\mathbb{P}^1$ n'a pas de section holomorphe.

Exercice 7.
- *Soit V un espace vectoriel de dimension 2 et $\lambda \in V^*$. L'application $s_\lambda : \mathbb{P}V \to \mathcal{O}(1)$ définie par $s_\lambda(D) = \lambda|_D$ est une section holomorphe et on a l'isomorphisme*
$$V^* \simeq H^0(\mathbb{P}V, \mathcal{O}(1)).$$
Montrer que $K \simeq \mathcal{O}(-2)$.
- *Montrer que $H^0(X, K)$ s'identifie à l'espace des formes différentielles holomorphes.*

Définition 8. *Fibré associé à un point $x \in X$.*

On choisit un ouvert de carte U contenant x et une coordonnée locale z dans cet ouvert. Le recouvrement $U_0 = U, U_1 = X \setminus \{x\}$ et le cocycle $g_{0,1} : U \setminus \{x\} \to \mathbb{C}^*$ défini par $g_{01}(z) = z$ définit un fibré qui - à isomorphisme près - ne dépend que de x. On le note L_x. La donnée de $s_0(z) = z$ et $s_1 = 1$ définit une section holomorphe s_x de L_x.

Etant donné deux fibrés L_1, L_2 sur X on définit les fibrés $L_1^*, L_1 \otimes L_2$. Etant donné une application holomorphe $f : X \to Y$ et un fibré L sur Y, on définit le fibré

$$f^*L = \{(x, l)/x \in X, l \in \pi^{-1}(f(x))\}$$

Remarque 1.
- *Si $s_1, s_2 \in H^0(X, L)$ sont deux sections holomorphes non nulles, le quotient $\frac{s_1}{s_2}$ est une fonction méromorphe.*
- *L'ensemble des classes d'équivalence de fibrés sur X muni du produit tensoriel est un groupe appelé groupe de Picard de X et noté $Pic(X)$.*
- *Pour tout $x \in X$, les sections de $L \otimes L_x$ s'identifient aux sections de L avec un pôle d'ordre 1 au plus en x.*
- *Les sections de $L \otimes L_x^{-1}$ s'identifient aux sections de L qui s'annulent en x.*

3.2 Faisceaux et leur cohomologie

Définition 9. *Définition d'un faisceau en groupes sur un espace topologique.*

Exemples des faisceaux de fonctions continues, fonctions différentiables sur une variété, holomorphes sur une surface de Riemann (noté $\mathcal{O}_X$). Faisceau des sections d'un fibré. Si A est un groupe abélien, on note $\underline{A}$ le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans A.

Remarque 2. *On peut définir une surface de Riemann comme la donnée de $(X, \mathcal{O}_X)$ où X est un espace topologique séparé à base dénombrable et $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux, localement isomorphe au faisceau des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Dans le même esprit, un fibré en droites est complètement décrit par son faisceau de sections, qui est un "module sur le faisceau" $\mathcal{O}_X$. Réciproquement, tout module localement libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_X$ est associé à un fibré en droites.

Définition 10. *Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fini de X et $\mathcal{S}$ un faisceau on pose*

$$C^k = \bigoplus_{i_0, \dots, i_k} \mathcal{S}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}) / \sim$$

où $s \in \mathcal{S}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k})$ est identifié à $\epsilon(\sigma)s \in \mathcal{S}(U_{\sigma(i_0)} \cap \cdots \cap U_{\sigma(i_k)})$. On pose

$$\delta s = \sum_{i_{k+1}} r_{U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}, U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}} s.$$

On vérifie que $\delta^2 = 0$ et on pose $H^k_U(X, \mathcal{S}) = (\ker \delta : C^k \to C^{k+1}) / (\mathrm{Im}\, \delta : C^{k-1} \to C^k)$. On calcule explicitement $H^0_U(X, \mathcal{S}) = \mathcal{S}(X)$ l'ensemble des sections globales.

Si $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{i \in J}$ sont deux recouvrements et $\tau : J \to I$ est une application telle que $V_j \subset U_{\tau(j)}$ alors on définit un morphisme de complexes $C^k_U \to C^k_V$ et donc une famille d'applications $\Phi^k_\tau : H^k_U(X, \mathcal{S}) \to H^k_V(X, \mathcal{S})$. On pose alors

$$H^k(X, \mathcal{S}) = \lim_{\to} H^k_U(X, \mathcal{S}).$$

- Les fonctions de transition $(g_{i,j})_{i,j \in I}$ d'un fibré en droites définissent un 1-cocycle dans $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$. Cela réalise un isomorphisme $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$.
- L'obstruction à construire une fonction holomorphe avec un pôle prescrit est une classe dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Exercice 8. *Montrer que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ s'identifie aux classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}$-fibrés principaux holomorphes.*

Théorème 6. *Soit X une surface de Riemann compacte et connexe.*
- *Si L est un fibré en droites sur X, $H^p(X, \mathcal{O}_L)$ est de dimension finie, nul si $p > 1$.*
- *Si A est un groupe abélien, $H^p(X, \underline{A}) = H^p(X, A)$.*

On démontrera le premier point plus tard. Le deuxième est un exercice (assez difficile) qu'on résout en choisissant astucieusement le recouvrement en fonction de la triangulation.

Références

[1] N. Bergeron et A. Guilloux. Introduction aux surfaces de Riemann.

[2] S. Donaldson. Riemann surfaces. Oxford University Press, 2011.

[3] N. Hitchin Riemann surfaces and integrable systems. Clarendon press, Oxford, 1999.

[4] E. Reyssat. Quelques aspects des surfaces de Riemann. Birkhäuser, 1989.