Topologie algébrique des variétés II - Cours 3

Théorème d'Hurewicz : $\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{h} H_n(X, A, \mathbb{Z})$

$f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0) \to f_*(\alpha_n)$

$\alpha_n \in H_n(D^n, S^{n-1}, \mathbb{Z})$

A et X connexes par arcs $\quad \pi_n'(X, A, x_0) = \pi_n(X, A) / \langle \gamma f \cdot f^{-1} \rangle$

où $\gamma \in \pi_1(A, x_0)$ agit sur $\pi_n(X, A)$

Si $\pi_k(X, A, x_0) = 0 \quad \forall\, k \leq n-1$ alors $H_k(X, A, \mathbb{Z}) = 0 \quad \forall k \leq n-1$

et $\pi_n'(X, A, x_0) \to H_n(X, A, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Application : $n \geq 2 \qquad \pi_k(S^n) \qquad k \leq n$

On sait déjà que $\pi_1(S^n) = 0$ (Van Kampen)

On sait que $H_k(S^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Supposons qu'il existe $n > k_0 > 0$ tq $\pi_{k_0}(S^n) \neq 1$

et prenons k_0 le plus petit possible $\quad k_0 \geq 1$.

On applique Hurewicz pour $n = k_0$

(S^n, s_0) est $(k_0 - 1)$ connexe donc $\pi_{k_0}'(S^n) \xrightarrow{\sim} H_{k_0}(S^n)$

or $\pi_1(S^n) = 0$ donc $\pi_{k_0}'(S^n) = \pi_{k_0}(S^n)$

si $k_0 < n$ alors $H_{k_0}(S^n) = 0$ donc $\pi_{k_0}(S^n) = 0$

contradiction.

Conclusion $\quad \pi_k(S^n) = 0$ si $k < n$

$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Rappel : le prototype de paire n-connexe

est un CW-complexe A auquel on a ajouté des cellules de dim $> n$.

typiquement (D^2, S^1)

<u>Proposition</u> : Soit X un CW complexe connexe par arcs et X^n son n squelette (la réunion des cellules de dim $\leq n$)

$\forall n \geq 1$ la paire (X, X^n) est n-connexe.

<u>preuve</u> : cas $n=1$. On se donne un point base $x_0 \in X^0$ et un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) \in X^n$. On veut prouver que γ est homotope relativement aux extrémités à un lacet entièrement dans X^n.

L'image de γ est compacte dans X donc rencontre un nombre fini de cellules. On peut donc supposer que X est une réunion finie de cellules.

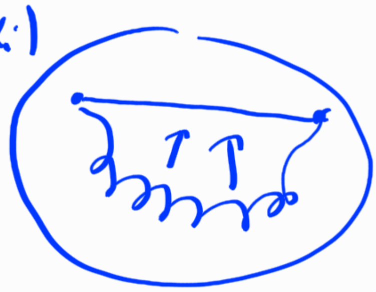
Soit $e : D^N \to X$ une cellule de dimension maximale qui rencontre l'image de γ

$$\gamma^{-1}(\underbrace{e(\mathring{D}^N)}_{\text{ouvert de } X}) \quad \text{ouvert de } [0,1]$$

c'est une réunion dénombrable d'intervalles $]\alpha_i, \beta_i[$ disjoints.

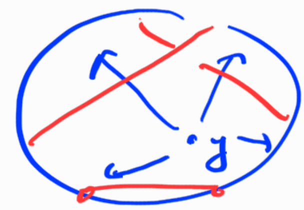
En restriction à chaque intervalle, on homotope $\gamma|_{[\alpha_i, \beta_i]}$ à un segment de droite dans $e(D^N)$

$\gamma(\alpha_i)$ $\gamma(\beta_i)$



Une fois l'homotopie faite $e(\mathring{D}^N) \cap \mathrm{Im}\,\gamma$ est une réunion dénombrable de segments.

Il existe donc $y \in \mathring{D}^n$ qui n'est pas dans l'image de γ. On fait une homotopie dans $e(\mathring{D}^N) \setminus \{y\}$ qui se termine par la projection $D^N \setminus \{y\} \longrightarrow S^{n-1}$.



A la fin, γ évite $e(\mathring{D}^N)$.

On peut alors éliminer la cellule D^N de X.

Par récurrence, on a une homotopie entre γ et un $\gamma' : [0,1] \to X'$. Règle la question pour $n=1$.

<u>Regardons le cas $n \geq 2$</u>. $(n=2)$ $(\pi_1(X, X^1) = 0)$

On veut prouver que $\pi_2(X, X^2_1, x_0) = 0$

Le théorème d'Hurewicz donne $\pi_2'(X, X^2, x_0) \xrightarrow{\sim} H_2(X, X^2)$

Pour calculer $H_2(X, X^2)$ on prend le complexe <u>cellulaire</u>

ce complexe commence en degré 3 [avec les cellules de X qui ne sont pas dans X^2]

en particulier $C_2(X, X^2) = 0$ donc $H_2(X, X^2) = 0$.

d'où $\pi_2'(X, X^2, x_0) = 0$

<u>1er cas</u> : si $\pi_1(X, x_0) = 0$ alors $\pi_1(X^2, x_0)$ aussi

en effet la suite d'homotopie relative donne

$$\pi_2(X) \to \pi_2(X, X^2) \to \pi_1(X^2) \to \pi_1(X) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_1(X, X^2)} \to$$

Thm : Si $\pi_1(X^2)$ agit trivialement sur $\pi_2(X, X^2)$

Pbm alors $\pi_2(X,X^2) = \pi_2'(X, X^2) \underset{\text{Hurewicz}}{=} H_2(X, X^2) = 0$

$\Rightarrow \pi_2(X, X^2) = 0$

- Si $\pi_1(X^2) = 0$ alors c'est démontré.

2ème cas : si $\pi_1(X) \neq 0$ on veut passer au revêtement universel

On considère le revêtement universel $\tilde{X}$ basé en x_0

le 2squelette $\tilde{X}^2 = p^{-1}(X^2)$ où $p : \tilde{X} \to X$.

On applique le cas simplement connexe pour déduire

que $\pi_2(\tilde{X}, \tilde{X}^2, \tilde{x}_0) = 0$. On veut en déduire

que $\pi_2(X, X^2, x_0) = 0$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d] \\ (D^2, S^1, s_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, X^2, x_0) \end{tikzcd}$$

soit $f : (D^2, S^1, s_0) \longrightarrow (X, X^2, x_0)$

Par le théorème du relèvement $\exists\ \tilde{f} : D^2 \longrightarrow \tilde{X}$

tq $\tilde{f}(s_0) = \tilde{x}_0$

et tq $p \circ \tilde{f} = f$. Par construction $\tilde{f} : (D^2, S^1, s_0) \to (\tilde{X}, \tilde{X}^2, \tilde{x}_0)$

ie $[\tilde{f}] \in \pi_2(\tilde{X}, \tilde{X}^2, x_0)$.

L'étape précédente dit que $[\tilde{f}] = 0$

donc $\exists\ \tilde{H} : D^2 \times [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ entre $\tilde{f}$

et une application à valeurs dans $\tilde{X}^2$. relative au bord.

En considérant $H = p \circ \tilde{H}$, on obtient une homotopie

entre f et une application à valeurs dans X^2.

donc $\pi_2(X, X^2, x_0) = 0$.

Ref sur les revêtements Hatcher (Algebraic topology)

Bredon (Geometry & topology)

La même preuve prouve que $\pi_k(X, X^n, x_0) = 0$ $\forall k \leq n$.

Une autre application : fabrication d'espace avec groupes d'homotopie prescrits.

<u>Corollaire</u> (Hurewicz) Soit X un espace top. connexe par arcs et $n \geq 1$. Alors $\exists X'$ conn par arcs tq

$$\pi_k(X') = \pi_k(X) \quad \forall k < n \qquad \text{et} \quad \pi_n(X') = 0$$

"on peut tuer un groupe d'homotopie sans modifier les précédents"

<u>digression</u> : trouver X tq $\pi_1 X \neq 0$ et $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$?

$$\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) = F_3 \qquad H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z}^3$$

A_5 = groupe d'isométries du dodécaèdre $\subset SO(3)$

$$H_1(A_5, \mathbb{Z}) = A_5^{ab} = 1$$

$p : SU_2 \to SO(3)$ rev. double $\qquad \tilde{A}_5 = p^{-1}(A_5)$

$SU_2 \cong S^3$ $\qquad$ groupe dodécaédral binaire à 120 elts.

$P = \tilde{A}_5 \backslash S^3$ $\qquad$ variété de dimension 3

$$\pi_1(P) = \tilde{A}_5 \qquad (\tilde{A}_5^{ab} = 1)$$

sphère de Poincaré. $\qquad$ (Analysis situs site web)

<u>démo corollaire</u> : $\pi_n(X, x_0)$ $(n \geq 2)$ est un groupe abélien engendré par $[g_i]_{i \in I}$

où $g_i : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$

$\quad g_i : (S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$

On définit $X' = X \sqcup \bigsqcup_{i \in I} D^{n+1} / \sim$ où $\forall x \in \partial D^{n+1}$ copie n° $i \in I$ on $x \sim g_i(x)$

On veut prouver que $\pi_k(X') = \pi_k(X)$ si $k < n$

$$\pi_n(X') = 0$$

$$\pi_{n+1}(X',X) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X') \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\pi_n(X',X)}} \to \pi_{n-1}(X) \xrightarrow[\sim]{} \pi_{n-1}(X') \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\cdots}}$$

X' est obtenu en ajoutant à X des $n+1$ cellules.

$\Rightarrow \pi_k(X',X) = 0 \quad \forall k \leq n.$

$\pi_k(X) \to \pi_k(X')$ est un isomorphisme $\forall k < n$.

$$\underset{\substack{\in \\ [\tilde{g}_i]}}{\pi_{n+1}(X',X)} \xrightarrow{\partial} \pi_n(X) \to \pi_n(X') \to 0$$

$[\tilde{g}_i]$ représenté par la $(n+1)$-cellule $\tilde{g}_i : D^{n+1} \to X'$

par construction $\partial \tilde{g}_i = [g_i] \in \pi_n(X)$.

Comme $\pi_n(X)$ est engendré par $[g_i]$, ∂ est surjective

donc $\pi_n(X') = 0$ cqfd.

$\Rightarrow K(G,1)$

Rque. de Thomas dans la preuve précédente

Van Kampen par récurrence $\pi_1(X^2) \to \pi_1(X^3) \to \cdots \to \pi_1(X)$
sont des isomorphismes. ceci prouve que si $\pi_1(X)=0$ alors $\pi_1(X^2)=0$.

On veut construire un espace avec groupes d'homotopie prescrits.

1ère étape : trouver X connexe par arcs avec $\pi_1(X,x_0)=G$

méthode 1 : $G = F/R$ $\quad F$ gp libre $\quad R$ est un sous-groupe de F

$X = \bigvee_{i\in I} S^1 \cup \bigsqcup_{j\in J} D^2$ où $(x_i)_{i\in I}$ base de F

on y_j générateurs de $R \subset F$

on recolle ∂D^2 selon y_j à $\bigvee_{i \in I} S^1$

(Van K) $\quad \pi_1(X) = G$.

méthode 2 $\quad$ Si A, B sont deux ensembles

on définit $\quad A * B = A \times B \times [0,1]/\sim$

$(a,b,0) \sim (a',b,0) \quad \forall a,a' \in A$

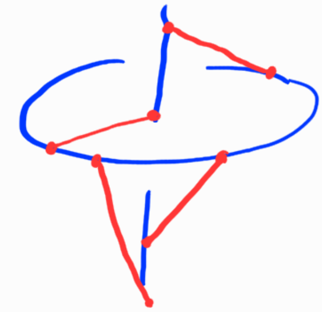
$(a,b,1) \sim (a,b',1) \quad \forall b,b' \in B$

$S^0 * S^0$ 

$= S^1$

$S^1 * S^1 = S^3$

$G * G$ ensemble connexe par arcs avec une action libre de G.



$$E = (G * G) * (G * G)$$

E est simplement connexe et G agit proprement et librement dessus.

$X = E/G$ $\qquad \pi_1(X) = G$ $\qquad$ (Milnor).

<u>2ème étape</u> : d'après le corollaire précédent, en ajoutant des 3-cellules on construit X' avec

$$\pi_1(X') = \pi_1(X) \qquad \text{et} \qquad \pi_2(X') = 0.$$

On ajoute des 4-cellules à X' pour avoir X''

$$\pi_1(X'') = \pi_1(X) = G \qquad \pi_2(X'') = \pi_2(X') = 0 \qquad \pi_3(X'') = 0$$

<u>etc</u> : on pose $\quad X^\infty = \varinjlim X^{(i)}$

cet espace X^∞ vérifie $\quad \pi_1(X^\infty) = G \quad \pi_k(X^\infty) = 0 \quad \forall k > 1$.

On dit que X^∞ est un $K(G,1)$ ou un espace d'Eilenberg-MacLane

<u>Propriété</u> : un tel espace est unique à homotopie près.

<u>Exercice</u> :

- $K(\mathbb{Z},1)$ $\qquad S^1$
- $K(G,1)$ $\qquad G \neq 1 \quad G \neq \mathbb{Z}$
- $K(F_2,1) =$ 
- $K(\mathbb{Z}/2,1) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}) = \varinjlim \mathbb{P}^i(\mathbb{R})$

En général si X est un espace top (CW complexe) tq $\tilde{X}$ est contractile alors X est un $K(\pi_1(X),1)$.

parce que $\quad \underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_k(\tilde{X})} \xrightarrow{p_*} \pi_k(X)$ est un isomorphisme

$X =$  surface de genre $g \geq 2$.

$\tilde{X} = \mathbb{H} =$ 

donc X est un $K(\pi,1)$ pour $\pi = \pi_1(X)$.

- Construire un $K(\mathbb{Z},n)$ avec $n \geq 2$

$\underline{n=2}$ $\quad P^\infty(\mathbb{C})$ répond

$n \geq 3$ $\quad$ très compliqué.

X est un $K(\mathbb{Z},n)$ $\quad \pi_k(X) = 0$ sauf pour $k=n$ $\quad \pi_n(X) = \mathbb{Z}$.

<u>Dernière application du théorème de Hurewicz</u>

<u>Corollaire</u> : si $f : X \to Y$ application continue entre deux espaces connexes par arcs tq

$f_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme $\forall k \geq 1$.

Alors $f_* : H_k(X,\mathbb{Z}) \to H_k(Y,\mathbb{Z})$ est un iso aussi.

La réciproque est vraie si X est simplement connexe. (une telle application est appelée équivalence faible d'homotopie).

⚠ il suffit pas d'avoir un iso $H_k(X) \to H_k(Y)$ $\forall k$ pour que on ait une équivalence d'homotopie faible il faut une application $f: X \to Y$ qui induise des iso

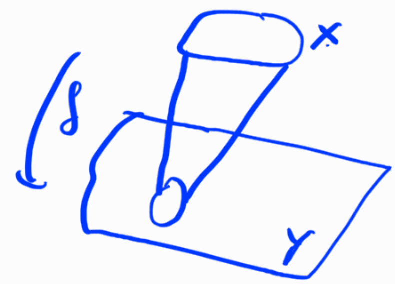
$\mathbb{RP}^2 \times S^3$ $\qquad$ $\mathbb{RP}^3 \times S^2$

ont la même homotopie mais homologie différente.

<u>démo:</u> $\quad f: X \to Y$ induit un iso des π_k $\forall k$.

C_f = Mapping cone $\quad$ cylindre de l'application f

$$= X \times [0,1] \sqcup Y \,/\, _{(x,1) \sim f(x)}$$



On peut considérer $\quad X \subset C_f$
$\qquad x \mapsto (x,0)$

et aussi $\quad Y \subset C_f$
$\qquad y \mapsto y$

<u>Lemme:</u> $Y \to C_f$ est une équivalence d'homotopie
[C_f se rétracte par déformation sur Y]

On écrit la suite exacte d'homotopie de (C_f, X)

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_k(X) \arrow[r, "?"] \arrow[dr, "f_*"', "?"] & \pi_k(C_f) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_k(C_f, X) \arrow[r] & \pi_{k-1}(X) \arrow[r, "?"] \arrow[dr, "f_*"', "?"] & \pi_{k-1}(C_f) \arrow[d, "\wr"] \\
& & \pi_k(Y) & & & \pi_{k-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad \pi_k(C_f, X) = 0 \qquad \forall k \geq 1.$

donc le théorème d'Hurewicz $\Rightarrow$ $H_k(C_f, X, \mathbb{Z}) = 0$
$\forall k \geq 0.$

La suite exacte de la paire en homologie

$$\underbrace{H_{k+1}(Cf,X)}_{=0} \to H_k(X) \xrightarrow{\sim} H_k(Cf) \to \underbrace{H_k(Cf,X)}_{=0} \to H_{k-1}(X) \xrightarrow{\sim} H_{k-1}(Cf)$$

on déduit que $H_k(X) \to H_k(Cf)$ est un iso $\forall k$

$$\begin{tikzcd} H_k(X) \arrow[r] \arrow[dr, "f_*"'] & H_k(Cf) \arrow[d, equal] \\ & H_k(Y) \end{tikzcd}$$

<u>réciproque</u> : $f_* : H_k(X) \to H_k(Cf)$ est un iso $\forall k$

$\Rightarrow \quad H_k(Cf, X, \mathbb{Z}) = 0 \quad \forall k$

si $\pi_1(X) = 0$ $\quad 0 = \pi_k'(Cf, X, x_0) \Rightarrow H_k(Cf, X)$

$\pi_k'(Cf, X, x_0) = \pi_k(Cf, X, x_0) = 0 \quad \square$

<u>échelle de Whitehead</u> :

$$\begin{tikzcd} \pi_k(A) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \pi_k(X) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \pi_k(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{k-1}(X) \arrow[d] \\ H_k(A) \arrow[r] & H_k(X) \arrow[r] & H_k(X,A) \arrow[r] & H_{k-1}(A) \arrow[r] & H_{k-1}(X) \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif.

<u>Exercice</u> : Soit G un groupe X esp. top c. arc

$\pi_1(X) = G$.

suite exacte courte

on a $\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X) \to H_2(X)/_{h\pi_2(X)} \to 0$

Mq $H_2(X)/_{h\pi_2(X)}$ ne dépend que de G

(pas de X)

due à Hopf. On note ce groupe $H_2(G,\mathbb{Z})$

$H_1(G,\mathbb{Z}) = G^{ab}$. (Cohomology of groups
Brown)