La dernière fois on a construit l'homologie tordue

$f: X \to B$ $\quad b_0 \in B$ $\quad \pi = \pi_1(B, b_0)$ $\quad M$ un $\mathbb{Z}[\pi]$-module

chaînes $\quad \sigma: \Delta_n \to X$ $\quad \gamma: [0,1] \to B$ $\quad \gamma(0) = b_0, \gamma(1) = f(\sigma(e_n))$ $\quad m \in M$

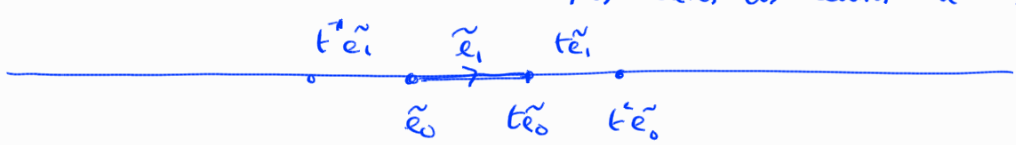
$(\sigma, [\gamma]) \otimes m \sim (\sigma, [\alpha\gamma]) \otimes \alpha m$

<u>Apparté:</u> Si X est une variété diff $\quad H^*(X, \mathbb{R}) \simeq H^*_{DR}(X, \mathbb{R})$
cohomologie de De Rham (des formes différentielles sur M).
Le système de coefficients M peut être pensé dans ce contexte
comme un fibré vect $p: E \to X$ de dim finie avec connection plate ∇
(ou avec transitions loc constantes).
L'holonomie de ce fibré le long d'un chemin donne
une rep $\rho: \pi_1(X, x_0) \to GL(E_{x_0})$ $\quad E_{x_0} = p^{-1}(\{x_0\})$
$\Rightarrow$ E_{x_0} est un $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$-module
On peut considérer $\Omega^*(X, E)$ = formes diff. sur X à valeurs dans E.
(sections de $\Lambda^* T^*X \otimes E$)
il est muni d'une diff $\quad d: \Omega^k(X, E) \to \Omega^{k+1}(X, E)$
(la diff usuelle dans les cartes de E)
On a encore un iso $\quad H^*(X, E) \simeq H^*_{DR}(X, E)$.

On a vu comment calculer ces groupes à partir d'une décomposition cellulaire

<u>Exemple:</u> $X = S^1$ $\quad \pi_1(X) = \mathbb{Z}$ $\quad$ un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-module est
un groupe abélien M avec un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$.
Calculons $H_*(S^1, M)$ et $H^*(S^1, M)$
On se ramène ici à calculer $H_*(C_*^{cell}(S^1, M))$

On a $C_*^{cell}(S^1, S^1)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre
engendré par | les cellules marquées
| les relevés des cellules à $\tilde{S}^1$



$\mathbb{R} = \tilde{S}^1$

$\mathbb{Z}[\pi] = \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)] = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$

$1 \leftrightarrow t$

$C_0^{cell}(S^1, S^1) \simeq \mathbb{Z}[t^{\pm 1}].\tilde{e}_0 \xleftarrow{\partial} C_1^{cell}(S^1, S^1) \simeq \mathbb{Z}[t^{\pm 1}].\tilde{e}_1$

$\partial \tilde{e}_1 = t\tilde{e}_0 - \tilde{e}_0 = (t-1)\tilde{e}_0$

$C_*^{cell}(S^1, S^1) : \quad \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \xleftarrow{\times(t-1)} \mathbb{Z}[t^{\pm}]$

$$\begin{array}{cccccc}
C_*(S^1, S^1) \underset{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}{\otimes} M : & m & M & \longleftarrow & M & m \\
 & \downarrow & \wr\!\shortparallel & & \wr\!\shortparallel & \downarrow \\
 & 1 \otimes m & \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \underset{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}{\otimes} M & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \underset{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}{\otimes} M & 1 \otimes m
\end{array}$$

$m \simeq 1 \otimes m \xrightarrow{\partial} (t-1) \otimes m = t \otimes m - 1 \otimes m = 1 \otimes t^{-1}. m - 1 \otimes m$

$= \varphi^{-1}(m) - m = (\varphi^{-1} - 1) m$

$M \xleftarrow{\varphi^{-1} - 1} M$

On en déduit $\quad H_0(S^1, M) = M / \mathrm{Im}(\varphi^{-1} - 1) \qquad H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi^{-1} - I)$

$= \mathrm{Fix}(\varphi^{-1})$

$= \mathrm{Fix}(\varphi).$

idem $\quad C^*(X, M) : \quad M \xrightarrow{\varphi^{-1} - 1} M$

$H^0(S^1, M) = \mathrm{Ker}(\varphi^{-1} - 1) = \mathrm{Fix}(\varphi)$

$H^1(S^1, M) = \mathrm{Coker}(\varphi^{-1} - 1) = M / \mathrm{Im}(\varphi^{-1} - 1)$

<u>Dualité de Poincaré</u> : si on a une variété orientable compacte de dim n

$$H_k(X, M) \simeq H^{n-k}(X, M)$$

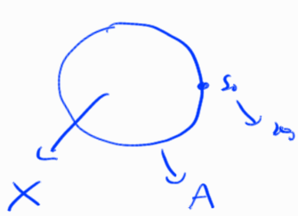
<u>Exercice</u> : Si X est un CW-complexe fini et M est un k-espace vectoriel de dim finie alors $H_*(X, M)$ sont des k e.v de dim finie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dim H_k(X, M) = \chi(X) . \dim M$$

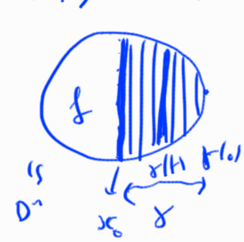
en particulier c'est indépendant de l'action de $\pi_1(X)$ sur M !

<u>Rappel</u> : $\pi_1(A) \curvearrowright \pi_n(X, A) \qquad f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A)$

$\gamma : [0,1] \to A$



$\gamma . f$



autre façon 

$\to X \qquad \partial D^n \to A \qquad \gamma : s_0 \mapsto f(s_0)$

2.5 obstruction à prolonger une application

Soit (X, A) une paire de CW-complexes

et $f : A \longrightarrow B$ une app. continue.

Peut-on prolonger f à X ?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rd, dashed, "\tilde{f}"] & \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

On va résoudre ce problème en construisant l'application $\tilde{f}$ de proche en proche par récurrence sur le squelette de X.

On va toujours supposer que A, X, B sont connexes par arcs et on pose $x_0 \in A$ et $f(x_0) = b_0$.

Première partie : Si f se prolonge en $\tilde{f}$, alors on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, x_0) \arrow[rd, dashed, "\tilde{f}_*"] & \\ \pi_1(A, x_0) \arrow[ru, "i_*"] \arrow[rr, "f_*"'] & & \pi_1(B, b_0) \end{tikzcd}$$

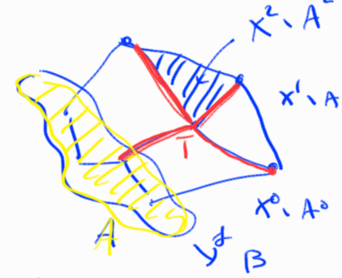
ie on a $\tilde{f}_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ qui fait commuter le diagramme

Proposition : si $\exists\, \phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ qui fait commuter le diagramme alors on peut étendre f au 2-squelette de X ie $\exists\, \tilde{f} : A \cup X^2 \longrightarrow B$

$$\begin{tikzcd} A \cup X^2 \arrow[r, "\tilde{f}"] & B \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[ru, "f"'] & \end{tikzcd}$$

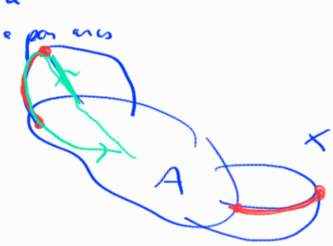
démo : on se donne un tel $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$

On choisit un sous-complexe $T \subset X^1 \setminus A^1$ qui soit une réunion de composantes contractiles et qui rencontrent A en un seul point, et maximal pour ces deux propriétés



$T = \bigsqcup T_i$ $\quad T_i \cap A = \{x_i\}$ $\quad T_i$ est contractile et connexe par arcs

$T \subset X^1 \setminus A^1$ ← décomposition de T en composantes connexes.



Chaque composante T_i rencontre A en x_i

On va poser $\tilde{f}(x) = f(x_i)$ $\forall\, x \in T_i$

Toute arête e de $X^1 \setminus T$ rencontre $T \cup A$ sur ses deux extrémités (sinon on aurait dû la rajouter à T)

On l'oriente et on prend un élément de $\pi_1(X, x_0)$ qui passe par cette arête notons le $\gamma_e \in \pi_1(X, x_0)$.

On connait $\varphi(\gamma_e) \in \pi_1(B, b_0)$.

On peut définir $\tilde{f}|_e : e \longrightarrow B$ de sorte à avoir $\tilde{f}_*(\gamma_e) = \varphi(\gamma_e)$.

Cela permet de définir $\tilde{f}$ sur le 1-squelette $A \cup X^1$

On a un diagramme

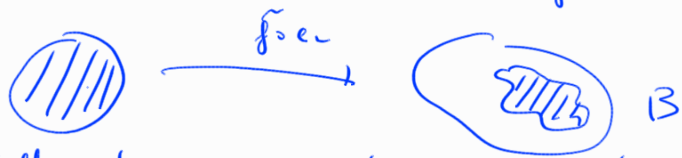
$$\begin{tikzcd} \pi_1(A \cup X_1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rrd, dashed, "\tilde{f}_*"] & \pi_1(X) \arrow[rd, "\varphi"] & \\ \pi_1(A) \arrow[u, "i_*"] \arrow[rr, "f_*"'] & & \pi_1(B) \end{tikzcd}$$

Passons maintenant au 2-squelette : on se donne une 2-cellule

$e_2 : D^2 \longrightarrow X^2$ tq $e_2(\mathring{D}^2) \cap A = \emptyset$.

$$e_2(\partial D^2) \subset X^1 \xrightarrow{\tilde f} B$$

le problème revient à étendre $\tilde f \circ e_2$ de S^1 à D^2



une telle extension est possible ssi $[\tilde f(e_2(\partial D^2))] = 0$ dans $\pi_1(B)$

or $e_2(\partial D^2)$ borde un disque dans X.

Elle est donc nulle dans $\pi_1(X)$. Or $\varphi : \pi_1(X) \to \pi_1(B)$ est un morph. de groupe donc $\varphi(e_2(\partial D^2)) = 0$

$$[\tilde f(e_2(\partial D^2))] = 0 . \quad \text{cqfd.}$$

On fait un choix arbitraire sur chaque 2-cellule de $X \setminus A$ cela définit une extension continue $\tilde f : A \cup X^2 \longrightarrow B$. ∎

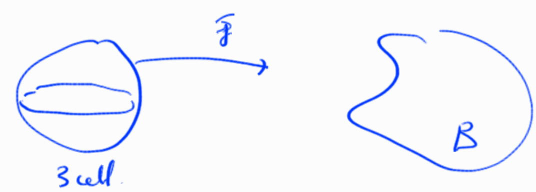
Problème d'extension au $(n+1)$ squelette avec $n \geq 2$

On veut construire $\tilde f : X \to B$ par récurrence. Supposons par hypothèse qu'on a étendu l'application

$$\begin{tikzcd} X^n \cup A \arrow[r, "\tilde f"] & B \\ A \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Cherchons à la prolonger au $(n+1)$-squelette. On se donne

$$\begin{tikzcd} D^{n+1} \arrow[r, "e_i^{n+1}"] & X & \\ \partial D^{n+1} = S^n \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & X^n \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\tilde f"] & B \end{tikzcd}$$



Pour savoir si on peut étendre $\tilde f$ à l'intérieur de D^{n+1}, il faut et il suffit que l'application $\tilde f \circ e_i^{n+1}|_{S^n} \longrightarrow B$ soit homotope à une application constante. Il y a un élément de $\pi_n(B)$ qui est nul.

Il y a un problème avec le point base : l'application précédente n'envoie pas s_0 dans x_0.

Le problème se résout en considérant l'homologie tordue à coeff dans B

On voudrait définir un morphisme $O_{n+1} : \underbrace{C^{cell}_{n+1}(X, B)}_{\mathbb{Z}[\pi]\text{-module}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}[\pi]\text{-module}}{\underset{?}{\pi_n(B)}}$

On voudrait en plus que O_{n+1} définisse un élément de $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$. on l'appellera classe d'obstruction de degré $n+1$.

1er problème a priori on n'a pas bien défini le groupe $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$ car on n'a pas encore défini $f : X \to B$ qui permet de définir la cohomologie.

Rque : l'homologie de X à coeffs dans un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module ne dépend de B que via l'action de $\pi_1(B)$ sur Π.
Si on se donne B' et $B \xrightarrow{g} B'$ qui induit un iso $\pi_1(B) \underset{g_*}{\xrightarrow{\sim}} \pi_1(B')$

$$\underset{(f : X \to B)}{H_*(X, \Pi)} \simeq \underset{(g \circ f : X \to B')}{H_*(X, \Pi)}$$

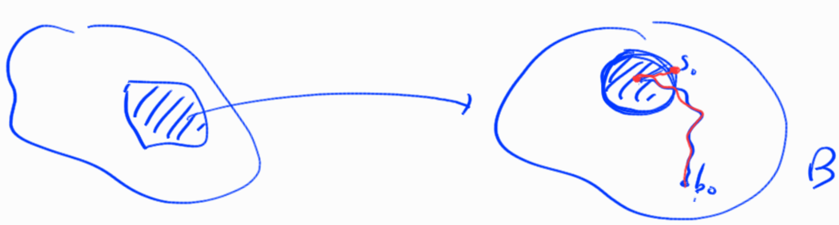
Conséquence importante : on peut remplacer B par un $K(\pi_1, 1)$
ie on peut coller à B des 3-cellules, 4-cells, ... pour avoir $\pi_k(B) = 0$ $\forall k > 1$.

$$\begin{tikzcd} A \cup X \arrow[r, "f'"] & B' \\ A \cup X^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad B' = K(\pi_1(B), 1)$$

Si on remplace B par B', il n'y a pas d'obstruction à prolonger f à $A \cup X$ (car $\pi_n(B') = 0$ $\forall n \geq 2$).
Cela permet de définir quand-même $H^*(X, \pi_n(B))$ bien que f ne soit pas encore complètement définie.

Def de O_{n+1} : $O_{n+1} \in \mathrm{Hom}(C^{cell}_{n+1}(X, B'), \pi_n(B))$

on rappelle qu'un générateur de $C^{cell}_{n+1}(X, B')$ est un couple $e_i^{n+1} : D^{n+1} \to X$ et un chemin $\gamma_i^{n+1} : [0,1] \to B'$ qui relie b_0 à $f'(e_i^{n+1}(c_{n+1}))$.



$(S^n, s_0) \to (B, b_0)$
$\updownarrow$ (f, γ) $\left\{ \begin{array}{l} f : S^n \to B \\ \gamma : b_0 \to f(s_0) \end{array} \right.$

on lui associe un élément de $\pi_n(B)$ qui est $o_{n+1}(e_i^{n+1}, \gamma_i^{n+1}) = (f|_{\partial D^{n+1}}, \gamma_i^{n+1'})$
où $\gamma_i^{n+1'}$ est ~~le~~ chemin obtenu en composant γ_i^{n+1} avec l'image par f' d'un rayon reliant c_{n+1} à $s_0 \in S^n$.
Cette construction est compatible avec l'action de π. $o_{n+1}(\alpha x) = \alpha o_{n+1}(x)$
ainsi $O_{n+1} \in \mathrm{Hom}_\pi(C^{cell}_{n+1}(X, B'), \pi_n(B))$.

Proposition : (i) O_{n+1} est un cocycle ie $dO_{n+1} = 0 \iff O_{n+1} \circ \partial = 0$

(ii) o_{n+1} est nul $\iff$ f se prolonge à X^{n+1}.

démo : (ii) a été expliqué précédemment.

démontrons le 1er point. On revient sur la construction de o_{n+1}

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(X^{n+1},X^n) & \pi_{n+1}(X^{n+1},X^n,x_0) \arrow[l, "h_*"'] \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(X^n,x_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_n(B,b_0) \\ & e_i^{n+1} \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & & \arrow[from=1-1, to=1-4, bend right=20, "o_{n+1}"'] \end{tikzcd}$$

il faut remplacer ces espaces par des versions avec coefficients dans B.
[Homotopy theory Whitehead]

$$\begin{tikzcd} C^{cell}_{n+2}(X,B') & & \\ H_{n+2}(X^{n+2},X^{n+1},\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[d, "\partial"] & \pi_{n+2}(X_{n+2},X_n) \ni y \arrow[l, "h_*"', "inj"] \arrow[d] \arrow[rrdd, "=0\,?"] & & \\ H_{n+1}(X^{n+1},\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[d] & \pi_{n+1}(X_{n+1},x_0) \arrow[l, "h"'] \arrow[d] & & \\ H_{n+1}(X^{n+1},X^n,\mathbb{Z}[\pi]) & \pi_{n+1}(X_{n+1},X_n,x_0) \arrow[l] \arrow[r, "\partial"] \arrow[r, bend right, "0"'] & \pi_n(X_n,x_0) \arrow[r] & \pi_n(B,b_0) \\ C^{cell}_{n+1}(X,B') & & & 0 \arrow[from=4-1, to=4-4, bend right=25, "o_{n+1}"'] \end{tikzcd}$$

∂ diff du complexe cell

deux termes consécutifs dans la suite exacte longue

fin de la preuve.

Proposition : Soit X un CW-complexe $f : X^n \to B$ déf. sur le n-squelette. $O_{n+1}(f)$ est un cobord ssi $\exists\, f' : X^n \to B$ qui coïncide avec f sur X^{n-1} et telle que f' se prolonge à X^{n+1}.

Conclusion : si $[o_{n+1}(f)] = 0$ dans $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$ alors on peut modifier f sur X^n pour le prolonger à X^{n+1}.

preuve : Supposons qu'il existe $f' : X^{n+1} \to B$ tq $f = f'$ sur X^{n-1}.

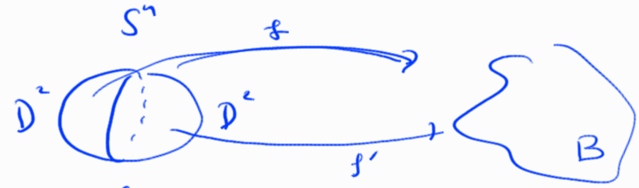
Pour chaque n-cellule $e_i^n : D^n \to X$

on peut considérer $f \circ e_i^n : D^n \to B$

$f' \circ e_i^n : D^n \to B$

comme f et f' coïncident sur X^{n-1}

on peut définir $\delta(f,f') : \underbrace{D^n \cup D^n}_{S^n} \to B$



$\cong$

$S^n \to B$

on prend la marquage en considération : $\delta(f,f') \in \mathrm{Hom}(C_n^{cell}(X,B), \pi_n(B))$

on vérifie que $\boxed{o_{n+1}(f) = o_{n+1}(f') + \delta(f,f') \circ \partial}$ admis

ici puisque f' se prolonge à X^{n+1}, $o_{n+1}(f') = 0 \Rightarrow o_{n+1}(f)$ est un cobord $\Rightarrow [o_{n+1}(f)] = 0 \in H^{n+1}(X, \pi_n(B))$