Aujourd'hui fin de la "théorie de l'obstruction"

<u>Résumé</u> : $A \subset X$ sous-complexe cellulaire de X aussi un CW complexe

et $f : A \to B$ qu'on cherche à prolonger à $\tilde{f} : X \to B$

A, X, B connexes par arc

① condition
$$\begin{tikzcd} \pi_1(A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "i_*"'] & \pi_1(B) \\ & \pi_1(X) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$
$\exists \varphi : \pi_1(X) \to \pi_1(B)$

si cette condition est vérifiée on peut construire $\tilde{f} : A \cup X^2 \to B$
$$\begin{tikzcd} A \cup X^2 \arrow[r, "\tilde{f}"] & B \\ A \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

② On essaie de construire $\tilde{f}$ par récurrence.

Supposons $\tilde{f} : A \cup X^n \to B$ construite

on prend $e_i^{n+1} : D^{n+1} \to X^{n+1}$

$e_i^{n+1}|_{\partial D^{n+1}} : S^n \to X^n \xrightarrow{\tilde{f}} B$

On considère l'application $\mathcal{O}_{n+1} : C_{n+1}^{cell}(X, B) \longrightarrow \pi_n(B)$

$(e_i^{n+1}, \gamma_i^{n+1}) \longrightarrow (\tilde{f} \circ e_i^{n+1}|_{\partial D^{n+1}}, \gamma_i^{n+1})$

marquage

C'est un morphisme de $\mathbb{Z}[\pi]$-modules $\pi = \pi_1(B, b_0)$.

$\mathcal{O}_{n+1} \in \mathrm{Hom}_{\pi}(C_{n+1}^{cell}(X, B), \pi_n(B))$

<u>Théorème</u> : ① $\mathcal{O}_{n+1} = 0 \iff \tilde{f}$ se prolonge à X^{n+1}

② $d\,\mathcal{O}_{n+1} = (-1)^{n+1} \mathcal{O}_{n+1} \circ \partial = 0$ i.e. $\mathcal{O}_{n+1}$ est un cocycle

③ $\mathcal{O}_{n+1} = \delta \circ \partial$ où $\delta \in \mathrm{Hom}(C_n^{cell}(X, B), \pi_n(B))$

si $\exists f' : X^{n+1} \cup A \to B$ tq f et f' coïncident sur X^{n-1}.

<u>démo</u> : ③ si on a un tel f' alors on compare f et f' sur chaque n-cellule.

$f, f' : e_i^n : D^n \to X^n \xrightarrow{f, f'} B$ coïncident sur ∂D^n

En utilisant un marquage pour la cellule e_i^n et en identifiant

$$S^n = D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \xrightarrow{f \cup f'} B$$

ceci définit $\delta(f,f') \in \mathrm{Hom}(C_n^{cell}(X,B), \pi_n(B))$.

On peut montrer que $O_{n+1}(f') - O_{n+1}(f) = \delta(f,f') \circ \partial$ (admis)

<u>Corollaire</u>: on sait que $O_{n+1}(f') = 0$ puisque f' se prolonge à X^{n+1}

$\Rightarrow O_{n+1}(f) = -\delta(f,f') \circ \partial$ c'est un bord.

réciproquement, si on a $O_{n+1}(f) = \delta \circ \partial$

avec $\delta \in \mathrm{Hom}(C_n^{cell}(X,B), \pi_n(B))$

On définit $f' : X^n \longrightarrow B$ en modifiant f sur chaque n cellule e_n^i par $\delta(e_n^i)$ de sorte à avoir $O_{n+1}(f') =$

$O_{n+1}(f) + \delta \circ \partial = 0$

$\Rightarrow O_{n+1}(f') = 0$ donc f' se prolonge bien au $n+1$ squelette. □

<u>Oubli</u>: on ne veut jamais modifier f sur les cellules qui appartiennent à A : en fait $O_{n+1}(f) \in \mathrm{Hom}_{\pi}(C_{n+1}^{cell}(X, A), B), \pi_n(B))$

ne pas oublier.

<u>Maintenant, regardons des applications.</u>

<u>Corollaire</u>: Soit X, Y deux CW-complexes connexes par arcs avec $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ et $\pi_k(X) = \pi_k(Y) = 0$ $\forall k \geq 2$.

Alors X et Y sont homotopiquement équivalents (unicité du $K(\pi,1)$)

<u>démo</u>: $x_0 \in X$ un point base $y_0 \in Y$ un point base.

On peut construire une application $f : X^1 \longrightarrow Y$ qui induit l'isomorphisme donné dans l'énoncé au niveau des π_1.

(la méthode de construction est similaire à celle de la théorie de l'obstruction)

on se donne $\varphi : \boxed{\pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)}$ qui induit l'iso. de l'énoncé

$$\begin{array}{c} \pi_1(X) \\ {\scriptstyle i_*}\uparrow \\ \pi_1(X^1) \end{array}$$

de sorte qu'elle se prolonge au 2-squelette.

Pour étendre f au 3-squelette, on regarde $O_3(f) \in H^3(X, \pi_2(Y)) = 0$

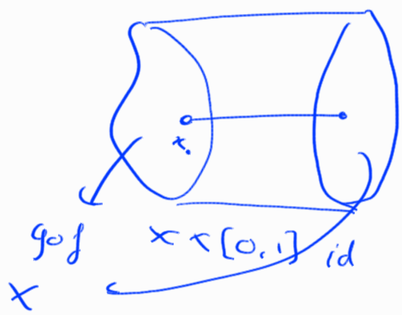
on peut donc f, puis on continue ... cela fournit $f : X \to Y$ qui induit $f_* = \varphi$

On peut aussi construire $g : Y \to X$ telle que $g(y_0) = x_0$ et $g_* = \varphi^{-1}$

On veut maintenant prouver que $g \circ f : X \to X$ est homotope à l'identité

On veut donc construire $H : X \times [0,1] \to X$

tq $\begin{cases} H(x,0) = g(f(x)) \\ H(x,1) = x \\ H(x_0, t) = x_0 \end{cases}$



Finalement on pose $A = X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times [0,1] \cup X \times \{1\} \subset X \times [0,1]$

on veut étendre à $X \times [0,1]$ l'application H qui est définie sur A.

D'après la Th. de l'obstruction ($\pi_k(X) = 0 \quad \forall k \geq 2$)

il suffit de prouver que $\exists \Psi$ qui fait commuter le diagramme.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "H_*"'] & \pi_1(X \times [0,1]) \cong \pi_1(X) \arrow[d, dotted, "\Psi"] \arrow[d, bend left, "id"] \\ & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

or $\pi_1(A) = \pi_1(X) * \pi_1(X)$ et $H_*(\gamma) = g_*(f_*(\gamma))$ si γ est dans le premier facteur

$i_*(\gamma) = \gamma$ si γ est dans le deuxième facteur.

Or $g_* = \varphi^{-1}$ et $f_* = \varphi$ donc $g_*(f_*(\gamma)) = \gamma$.

donc $H_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X \times [0,1]) = \pi_1(X)$

est simplement l'application induite par le produit, comme par ex.

donc on a une factorisation au niveau du π_1 donc on peut prolonger H.

<u>Exercice:</u> Théorème de Whitehead. Soit X, Y deux CW-complexes

[$f : X \to Y$ tq $f_* : \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ soit un isomorphisme $\forall k$

alors f est une équivalence d'homotopie.

<u>démo</u> (idée) il faut déjà se ramener au cas où f est cellulaire ...

on considère $C_f = X \times [0,1] \sqcup Y / _{(x,1) \sim f(x)}$

L'inclusion $Y \hookrightarrow C_f$ est une équivalence d'homotopie.

Méthode pour Whitehead : montrer que $X \hookrightarrow C_f$ est une équivalence d'homotopie : il suffit de construire $r : Cf \to X$ qui est l'identité sur X. C'est un problème d'obstruction

$$\begin{tikzcd} Cf \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

(on va utiliser le fait que $\pi_k(Cf, X) = 0$ pour construire r)

Rq : $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{in} : G * G \longrightarrow G \\ \quad x * y \longmapsto xy \\ \\ H_\varphi : x * y \longmapsto \varphi(x) y \qquad \varphi \in \mathrm{Aut}(G) \end{array} \right.$

Exercice : Si X et Y sont deux CW-complexes connexes par arcs avec

$\pi_k(X) = \pi_k(Y) = G$ $\quad k$ fixé

$\pi_n(X) = \pi_n(Y) = 0$ $\quad n \neq k$

$\Rightarrow$ X et Y sont homotopiquement équivalents $\quad X \simeq Y \simeq K(G,k)$.

exemple de $K(G,n)$ avec $n > 1$ $\qquad \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z},2)$

$(\mathbb{H}P^\infty = K(\mathbb{Z},4)\ ?)$

Corollaire : Soit Y un $K(\mathbb{Z},n)$ connexe par arcs avec pt base y_0.

Par Hurewicz $\quad H^n(Y,\mathbb{Z}) \simeq \pi_n(Y,y_0) = \mathbb{Z}$ on va noter ω_n le générateur de ce groupe

Soit X un CW-complexe avec pt base x_0 et $[X,Y] = \{ f (X,x_0) \to (Y,y_0) \}/_\sim$

$$\begin{array}{ccc} [X,Y] & \simeq & H^n(X,\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & f^*\omega_n \end{array}$$

ex : $\quad [X, S^1] \simeq H^1(X,\mathbb{Z})$

preuve : Si Y est un $K(\mathbb{Z},n)$ alors ΩY est un $K(\mathbb{Z},n-1)$ à cause de l'identité $\quad \pi_k(\Omega Y) \simeq \pi_{k+1}(Y)$

avantage : ΩY est muni d'un produit $\quad \begin{array}{ccc} \Omega Y \times \Omega Y & \to & \Omega Y \\ (\alpha, \beta) & \to & \alpha \cdot \beta \end{array}$

qui donne une structure de groupe à homotopie près.

On peut donc supposer que Y est muni d'une multiplication $m : Y \times Y \to Y$ et (un inverse)

qui est un groupe à homotopie près (H-groupe).

Grâce à cela $\quad [X,Y]$ est muni d'une st. de groupe.

$f, g : X \to Y \qquad f \cdot g = m \circ (f \times g)$

On doit alors vérifier que $\quad \begin{array}{ccc} [X,Y] & \to & H^n(X,\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & f^*\omega_n \end{array}$

est un morphisme de groupes: $\quad (f\cdot g)^*\omega_n = (f,g)^*(m^*\omega_n)$

$$X\times X \xrightarrow{(f,g)} Y\times Y \xrightarrow{m} Y \qquad\qquad m^*: H^n(Y,\mathbb{Z}) \to H^n(Y\times Y,\mathbb{Z})$$

$\omega_n \in H^n(Y,\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{cc} H^n(Y,\mathbb{Z}) & H^n(Y\times Y,\mathbb{Z}) \\ \wr\ \text{Hurewicz} & \wr \\ \pi_n(Y)\simeq\mathbb{Z} & \pi_n(Y)\times\pi_n(Y) \\ & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \end{array}$$

il suffit de constater que $m^*: \pi_n(Y) \to \pi_n(Y)\times\pi_n(Y)$ est l'application diagonale.

$\pi_n(Y)$ ... exercice

Notons $\quad \Phi : [X,Y] \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z})$

$$f \longmapsto f^*\omega_n$$

① mq Φ est surjective.

On se donne $\alpha \in H^n(X,\mathbb{Z})$ on veut construire $f: X\to Y$ tq $f^*(\omega_n) = \alpha$. On rappelle que $\pi_k(Y)=0$ $\forall k<n$

$\pi_n(Y)=0$.

on pose $f(x) = y_0 \quad \forall x\in X^{n-1}$

puis on représente α par $A\in C^n_{cell}(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(C_n^{cell}(X),\mathbb{Z})$.

sur chaque cellule $e_i^n : D^n \to X$

$$f|_{\partial D^n} \to y_0$$

on définit f de sorte que $f\circ e_i^n : (D^n, S^{n-1}) \to (Y, y_0)$ représente l'élément $A(e_i^n) \in \mathbb{Z} \simeq \pi_n(Y)$.

La condition de cocycle satisfaite par A montre que f se prolonge au $(n+1)$-squelette. Pour continuer à prolonger f on a une obstruction $O_{n+2}(f) \in H^{n+2}(X, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\pi_{n+1}(Y)}}) = 0$ donc on peut prolonger f.

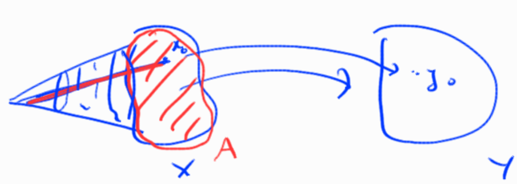
Φ est injective. $\quad \Phi: [X,Y] \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z})$

$$f \longmapsto f^*\omega_n.$$

on a $f: X\to Y$ tq $f^*\omega_n = 0$ on veut mq f est homotope à une constante. On considère le cône $CX = X\times[0,1] / _{(x,0)\sim(x',0)\ \forall x,x'\in X}$

et $A = C(x_0) \subset CX$

on a $H: A \longrightarrow Y$ définie par $H(x_0,t) = y_0$
$H(x,1) = f(x)$



Si on prolonge H à CX alors cela donne une homotopie entre f et l'application constante.

Pour prolonger H, on a des obstruction $H^{k+1}(CX, A ; \pi_k(Y))$
le seul k pour lequel $\pi_k(Y) \neq 0$ est $k=n$.
La seule obstruction non triviale est $H^{n+1}(CX, A, \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_n(Y)}})$

On a le triplet Cx_0, A, CX : la suite exacte du triplet.

$$H^{n+1}(A, Cx_0) \leftarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{H^{n+1}(CX, Cx_0)}} \longleftarrow \underbrace{H^{n+1}(CX, A)} \longleftarrow H^n(A, Cx_0) \leftarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{H^n(CX, Cx_0)}}$$

car $H^*(CX, Cx_0) = 0$

donc $H^{n+1}(CX, A, \mathbb{Z}) \simeq H^n(A, Cx_0) = H^n(X, x_0)$ $\quad n \geq 1$
$= H^n(X, \mathbb{Z})$.

il suffit de vérifier que l'obstruction à prolonger H à CX tout entier est précisément $f^*\omega_n \in H^n(X, \mathbb{Z})$.

si $f^*\omega_n = 0$ alors on peut prolonger H. donc $f \sim$ cte ∎

<u>Application</u>: Problème général M une variété diff compacte orientée de dim n, $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z})$ $0 \leq k \leq n$

Existe-t-il $Z \subset M$ une sous variété orientée de dim k
tq $\alpha = i_*([Z])$ où $i : Z \to M$ est l'inclusion.

<u>Réponse</u>? Thm : non oui quitte à multiplier α par un entier.

<u>Exercice</u>: le prouver pour M de dim ≤ 4.

<u>idée</u>: $\alpha \in H_3(M, \mathbb{Z})$ M de dim 4.
$\wr\wr$ $\quad \wr\wr$ D_M
$\varphi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ $\quad$ φ représenté $f : M \to S^1$
on prend f C^∞ y valeur régulière
$Z = f^{-1}(\{y\})$ sous-var de dim 3 elle représente α.

2.6 Obstruction à relever une application dans une fibration

On se donne une fibration $p : E \to B$ et (X, A) une paire de CW-complexes

<u>Problème</u>:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

existe-t-il $\tilde{f}$ qui fasse commuter le diagramme ?

<u>exemple</u>: $B = M$ variété différentielle $E = TM \setminus \{0\}$ section nulle
$X = M$ $\quad A = \emptyset$

le problème revient à trouver un champ de vecteur qui ne s'annule pas.

La solution fait intervenir des classes d'obstruction dans $H^{n+1}(X, A, \pi_n(F))$.

Pour voir que cela a du sens, il faut comprendre si $\pi_n(F)$ définit bien un système de coefficients sur B. ie un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module.

Voyons déjà que c'est un $\mathbb{Z}[\pi_1(E)]$-module.

$$\pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B)$$

Pour pouvoir le munir d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module, il faut et il suffit que $\pi_1(F)$ agisse trivialement sur $\pi_n(F)$.

Déf : La fibration est dite simple si $\pi_1(F)$ agit trivialement sur $\pi_n(F)$ dans ce cas $\pi_n(F)$ devient un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module.