Contrôle continu : exercice 1 de l'examen 2019/2020
sur ma page web enseignement / M2
pris en compte dans la note finale.
à rendre avant mercredi prochain   cf discord pour uploader le DM.

Section 2.6 : obstruction à relever des applications

<u>Contexte</u> : $p : E \to B$ une fibration de fibre F avec B, E, F connexes par arcs. On suppose que (X, A) est une paire de CW-complexes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

A quelle condition peut-on étendre s à X ?
La réponse à l'aide de classes d'obstruction $H^{n+1}(X, A, \pi_n(F))$

Première chose à voir en quel sens $\pi_k(F)$ forment un système de coefficients sur B ie. Est-ce un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module ?

Si on choisit $b_0 \in B$ un point base et $\gamma : [0,1] \to B$
$\gamma(0) = \gamma(1) = b_0$

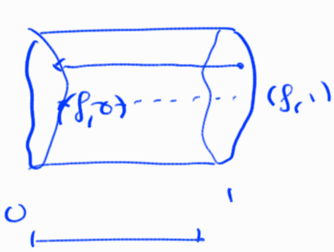
Alors on peut considérer $\gamma^* E = \{(t,e) \in [0,1] \times E \text{ tq } \gamma(t) = p(e)\}$.

$$\begin{tikzcd} \gamma^* E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ \gamma : [0,1] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

il est facile de constater que $p_\gamma : \gamma^* E \to [0,1]$
$(t,e) \mapsto t$
est encore une fibration avec $p_\gamma^{-1}(0) = p_\gamma^{-1}(1) = p^{-1}(b_0) = F$

Si on avait un fibré on saurait que $\gamma^* E \simeq F \times [0,1]$

$\gamma^* E \simeq F \times [0,1]$



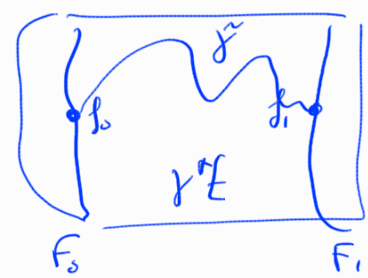
mais on n'a pas un fibré

par contre on a une suite exacte longue d'homotopie

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_{k+1}([0,1])} \to \pi_k(F) \xrightarrow[\sim]{} \pi_k(\gamma^* E) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_k([0,1])} \qquad k \geq 1$$

$$F_0 = p_\gamma^{-1}(0) \hookrightarrow \gamma^* E \hookleftarrow F_1 = p_\gamma^{-1}(1)$$

donne deux isomorphismes $\pi_k(F_0, f_0) \simeq \pi_k(\gamma^* E, f_1) \simeq \pi_k(F_1, f_1)$



on note $\underline{\Phi} : \pi_k(F_0, f_0) \xrightarrow{\sim} \pi_k(F_1, f_1)$

l'isomorphisme induit par cette composition.

On choisit maintenant $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ un relevé dans E

du chemin $\gamma : [0,1] \to B$. Il permet de relier les deux

points base choisis dans E et donc d'identifier les deux

groupes $\pi_k(F_0, f_0)$ et $\pi_k(F_1, f_1)$. $\quad F_0 = p_\gamma^{-1}(0) \quad F_1 = p_\gamma^{-1}(1)$

Cela permet de définir $\phi(\tilde{\gamma}) \in Aut(\pi_k(F, f_0))$ $\quad F_0 \simeq F_1 \simeq F$

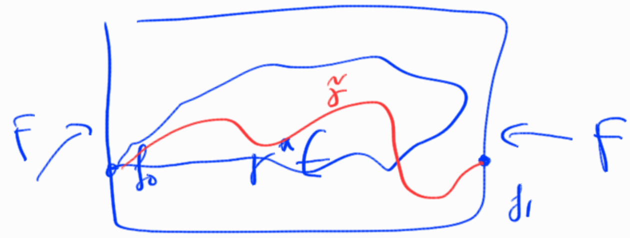
qui ne dépend de $\tilde{\gamma}$ qu'à homotopie près à extrémités fixées.

En composant γ et δ et en composant les constructions, on

montre que $\phi : \pi_1(E, f_0) \to Aut(\pi_k(F, f_0))$

est un morphisme de groupes.

Dit autrement $\pi_k(F, f_0)$ est un $\mathbb{Z}[\pi_1(E, f_0)]$-module.



$$\pi_k(F, f_0) \xrightarrow{\sim} \pi_k(E, f_0) \xrightarrow{\Phi_{\tilde{\gamma}}} \pi_k(E, f_1) \xleftarrow{\sim} \pi_k(F, f_0)$$

Déf. la fibration est *simple* si $\pi_1(F)$ agit trivialement sur $\pi_n(F)$ $\forall n \geq 1$ [en particulier $\pi_1(F)$ est abélien].

Comme on a la suite $\to \pi_1(F) \to \underset{H = \mathrm{im}(\pi_1 F)}{\pi_1(E)} \to \pi_1(B) \to 0$

on en déduit que $\pi_n(F)$ est un $\pi_1(B)$-module.

idée de la construction des classes d'obstruction toujours par récurrence

sur le 1-squelette.

$\forall x_0 \in X^0 \setminus A$ on veut définir $s(x_0) \in E$ tq $p(s(x_0)) = f(x_0)$

on la choisit n'importe comment

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

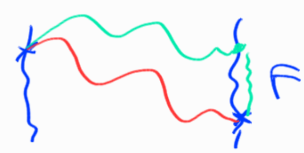
$x_0 \qquad f(x_0)$

on continue en essayant d'étendre cette fonction sur le 1-squelette.

$e_1 : [0,1] \to X^1 \setminus A$

On veut prolonger la section avec des valeurs prescrites aux extrémités

$e_1^* E$ le tiré en arrière de E sur la 1 cellule.



But : trouver une section qui relie les deux points donnés aux extrémités.

Propriété de fibration donne un relevé avec une extrémité fixée.
Or la fibre est connexe par arcs ; on peut prolonger le chemin pour qu'il atteigne le bon point d'arrivée.

On continue : on essaie de prolonger au 2-squelette

$e_2 : D^2 \to X$ on s'est donné une section de $e^* E$ au dessus de $\partial D^2 = S^1$

si on avait un fibré : $e^* D^2 \simeq D^2 \times F$

$s : \partial D^2 = S^1 \to F$

$[s] \in \pi_1(F)$

Ici on utilise l'isomorphisme $\pi_1(e_2^* E, x_0) \simeq \pi_1(F, x_0)$

la section $s|_{\partial D^2}$ donne une classe dans $\pi_1(e_2^* E, x_0)$ qui s'envoie dans $\pi_1(F, x_0)$.

A nouveau on va remplacer la cellule e_2 par une cellule marquée

i.e un couple (e_2, γ_2) où $\gamma_2 : [0,1] \to B$ $\gamma_2(0) = b_0$ et $\gamma_2(1) = f(e_2(1))$

Le marquage permet de définir $\mathcal{O}_2 : C_2^{cell}(X,A,B) \longrightarrow \pi_1(F,x_0)$
qui sera un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module.

Théorème : Soit $s : X^n \cup A \longrightarrow E$ qui relève f au n-squelette
alors $\exists\ o_{n+1} \in \mathrm{Hom}_\pi\left(C_{n+1}^{cell}(X,A), \pi_n(F)\right)$ telle que
(1) $o_{n+1} = 0 \iff s$ se prolonge à X^{n+1} (en relevant f)
(2) o_{n+1} est un cocycle
(3) o_{n+1} est un cobord ssi on peut modifier s sur X^n sans la modifier sur X^{n-1} de manière à ce qu'elle se prolonge.

Exemple : Si $p : E \to B$ est un fibré en sphères S^{n-1}
(exemple si M est une variété de dim n, g métrique riemannienne
$E = \{(X,x)\ \ x \in M\ \ X \in T_xM\ \ g_x(X,X)=1\}$.)
($n \geq 2$). C'est bien une fibration simple ok si $n=1$
sinon $\pi_1(S^{n-1}) = 0$ $n \geq 3$.

Les classes d'obstruction appartiennent à $H^{k+1}(B, \pi_k(S^{n-1}))$
le premier groupe non trivial qui apparaît est $k = n-1$
Cela me donne une classe $eu(E) \in H^n(B, \pi_{n-1}(S^{n-1}))$.
D'après le th. d'Hurewicz $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq H_{n-1}(S^{n-1},\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$
⚠ il s'agit d'un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module éventuellement non trivial.

Observation : $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ est un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module trivial
$\iff H_{n-1}(S^{n-1},\mathbb{Z})$
$\iff p : E \to B$ est un fibré orientable au sens
où on peut choisir continûment $\forall\, b \in B$ une orientation
de $p^{-1}(b) \simeq S^{n-1}$ (i.e un générateur de $H_{n-1}(S^{n-1},\mathbb{Z})$)

Si M est une variété orientable, le fibré $S(TM)$ est orientable
Dans ce cas la classe d'Euler est un élément de $H^n(M,\mathbb{Z})$.
dans ce cas, c'est la seule obstruction.
donc M admet un champ de vecteur non nul $\iff eu(TM) = 0$
$\in H^n(M,\mathbb{Z})$

Exercice : ① Si M est une variété de dim n compacte et orientable
$eu(TM) \in H^n(M,\mathbb{Z})$. Mq $eu(TM)([M]) = \chi(M)$

② Soit M une variété de dim 3 compacte orientable $(\Rightarrow \chi(M)=0)$
L'obstruction à paralléliser M (i.e trouver une base de TM)
est une classe $w_2(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
appelée 2ème classe de Stiefel_Whitney. $(\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/_2)$

$H^2(M, \pi_1(SO(3)))$

(M,g) métrique riemannienne.

$R(M) = \{(x, X_1, X_2, X_3) \quad x \in M, \; X_1, X_2, X_3$ est une base orthonormée directe de $T_xM\}$

$$R(M) \to M$$
$$(x, X_1, X_2, X_3) \mapsto x$$

est un fibré de fibre $SO(3)$
le problème consiste à trouver une section de ce fibré.

Chapitre 3 Suites spectrales

Le but est de généraliser le fait suivant:
si on a un complexe $C_\bullet : C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \cdots$
muni d'un sous_complexe $A_\bullet : A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \cdots$
Alors on peut déduire l'homologie de $C_\bullet$ à partir de certaines infos liées à l'homologie de A et l'homologie de $C_\bullet/A_\bullet$

<u>Rappel</u>: suite exacte longue associée à

$$0 \to A_\bullet \to C_\bullet \to C_\bullet/A_\bullet \to 0$$

$$H_{n+1}(C_\bullet/A_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_\bullet) \to H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet/A_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_\bullet) \to \cdots$$

$$0 \to \mathrm{Coker}(\partial_{n+1}) \to H_n(C_\bullet) \to \mathrm{Ker}(\partial_n) \to 0$$

modulo le problème d'extension, on peut calculer $H_n(C_\bullet)$ à l'aide de $H_\bullet(A)$, $H_\bullet(C_\bullet/A_\bullet)$ et des morphismes de connexion.

On va faire la même chose à partir d'une filtration du complexe $C_\bullet$

On se donne $C_\bullet : C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots$

et on se donne une suite $F_pC_q \subset C_q$ sous_module

tq $F_0C_q \subset \cdots \subset F_pC_q \subset F_{p+1}C_q \subset \cdots \subset C_q$

compatible avec la différentielle au sens où $\partial F_p C_q \subset F_p C_{q-1}$

On définit le gradué $G_p C_q = F_p C_q / F_{p-1} C_q$.

On observe aussi que la filtration induit une filtration sur l'homologie du complexe: $H_q(C_*)$

$$G_p H_q = \{ \alpha \in H_q(C_*) \text{ tq } \alpha = [x] \text{ où } x \in F_p C_q \text{ et } \partial x = 0 \}$$

il est clair qu'on a $G_p H_q \subset G_{p+1} H_q$.

<u>But de la suite spectrale</u>: essayer de calculer $G_p H_q$ à partir des groupes $G_p C_q$ et de certains morphismes qui les relie.

<u>Notation</u>: $E^0_{p,q} = G_p C_{p+q} = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q}$

on définit $\partial_0 : E^0_{p,q} \longrightarrow E^0_{p,q-1}$

par $\partial_0 x = [\partial x]$ $\quad x \in F_p C_{p+q}$ $\quad \partial x \in F_p C_{p+q-1}$

si $x \in F_{p-1} C_{p+q}$ $\quad \partial x \in F_{p-1} C_{p+q-1}$

bien sûr $\partial_0^2 = 0$

donc on peut considérer l'homologie du complexe $E^0_{p,q}$

On note $E^1_{p,q}$ l'homologie de ce complexe.

$$E^1_{p,q} = \operatorname{Ker}(\partial_0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}) / \operatorname{Im}(\partial_0 : E^0_{p,q+1} \to E^0_{p,q-1})$$

$$= H_{p+q}(G_p C_*)$$

On va définir $\partial_1 : E^1_{p,q} \longrightarrow E^1_{p-1,q}$

on prend $\alpha \in E^1_{p,q}$ $\quad \alpha = [x]$ $\quad x \in E^0_{p,q}$ $\quad \partial_0 x = 0$

$x \in F_p C_{p+q}$ $\quad \partial x \in F_{p-1} C_{p+q-1}$

on pose $\partial_1 \alpha = [\partial x] \in E^1_{p-1,q}$

<u>Rque</u>: On considère les inclusions $F_{p-2} C_* \longrightarrow F_{p-1} C_* \to F_p C_*$

cela donne une suite exacte courte de complexes

$$0 \to \underbrace{F_{p-1} C_* / F_{p-2} C_*}_{G_{p-1}(C_*)} \longrightarrow F_p C_* / F_{p-2} C_* \longrightarrow \underbrace{F_p C_* / F_{p-1} C_*}_{G_p(C_*)} \to 0$$

Cette suite exacte courte donne lieu à des morphismes de connexion

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q}(G_p(C_*)) & \xrightarrow{\partial_1} & H_{p+q-1}(G_{p-1}(C_*)) \\ \| & & \| \\ E^1_{p,q} & & E^1_{p-1,q} \\ p+q & & p-1+q \end{array}$$

On pourrait continuer et définir $E^2, E^3, \dots$

On définit plutôt directement

$$E^r_{p,q} = \{x \in F_p C_{p+q} \text{ tq } \partial x \in F_{p-r} C_{p+q}\} \Big/ F_{p-1} C_{p+q} + \overset{\partial C_{p+q-1}}{\partial F_{p+r-1} C_{p+q+1}}$$

⚠ abus de notation : on écrit A/B pour désigner $A/_{B\cap A}$

Lemme : ① L'application $x \to \partial x$ induit un morphisme

$$\partial_r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$$ vérifie $\partial_r^2 = 0$.

② $$E^{r+1}_{p,q} = \mathrm{Ker}(\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}) \Big/ \mathrm{Im}(\partial_r : E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q})$$

③ Si pour tout i la filtration est bornée ie $F_0 C_i = 0$ et $F_p C_i = C_i$ pour p assez grand

alors $\forall p, q$ $\exists r_0$ tq $\forall r \geq r_0$ on a

$$E^r_{p,q} = G_p H_{p+q}(C_*)$$

démo : ① et ② calcul à faire à la maison.

③ r assez grand $\alpha \in E^r_{p,q}$ représenté par $x \in F_p C_{p+q}$ tq $\partial x = 0$

modulo l'ensemble des bords.

$$E^\infty_{p,q} = \{x \in F_p C_{p+q} \text{ tq } \partial x = 0\} \Big/ F_{p-1} C_{p+q} + \partial C_{p+q+1}$$

$F_{p-1} C_{p+q}$ $\qquad\qquad$ $G_p H_{p+q}(C_*)$

∂

$$
\begin{tikzcd}
E_{02} & E_{12} & E_{22} \\
E_{01} & E_{11} & E_{21} \arrow[ull, "\partial_2"'] \\
E_{00} & E_{10} & E_{20} \arrow[ull, "\partial_2"']
\end{tikzcd}
\qquad E^2_{p,q}
$$

∂

∂_2 degré $(-2, 1)$

$-r, r-1$