TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE II

1. Groupes d'homotopie supérieurs et relatifs

1.1. **Suite exacte longue d'homotopie relative.** On se donne une paire d'espaces (X, A) avec un point base x_0 dans A. On choisit un point base $s_0 = (1, 0, \cdots, 0)$ dans $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ puis, pour $n \geq 1$, on définit $\pi_n(X, A, x_0)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de (D^n, S^{n-1}, s_0) dans (X, A, x_0). Si A est réduit à x_0, il s'agit simplement de l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de (D^n, S^{n-1}) dans (X, x_0): on note plus simplement cet espace $\pi_n(X, x_0)$. Si $n = 1$, il s'agit donc des classes d'homotopie d'applications de $[0, 1]$ dans X reliant le point base à un point de A: on ne peut munir cet espace d'une structure de groupe (sauf si $A = \{x_0\}$): pour cela, il faut supposer $n \geq 2$, ce qu'on fait ci-dessous.

Lemme 1 (Critère de compression)**.** *Une application $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ est égale à l'application constante dans $\pi_n(X, A, x_0)$ si et seulement si elle est homotope relativement à S^{n-1} à une application à valeurs dans A.*

Preuve. Si on note $g : D^n \to A$ l'application à laquelle f est homotope, alors $[f] = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Comme D^n se rétracte par déformation sur s_0, en composant la rétraction par g on obtient une homotopie entre g et l'application constante: un sens de l'équivalence est démontré. Réciproquement, si on a une homotopie $H : D^n \times [0, 1] \to X$ entre f et l'application constante, on la restreint à une famille de disques $D^n \times [0, 1]$ commençant par $D^n \times \{0\}$ et terminant par $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$. On obtient ainsi une homotopie entre f et une application entièrement à valeurs dans A, comme annoncé. $\square$

On constate qu'il existe une application $c : D^n \to D^n \underset{s_0}{\vee} D^n$ qui écrase un disque méridien D^{n-1} contenant s_0 sur le point s_0. Si on a deux applications $f, g : (D^n, S^{n-1}, s_0)$ dans (X, A, x_0), on peut les combiner en une application $f \vee g$ définie sur $D^n \underset{s_0}{\vee} D^n$: on définit alors le produit $fg = f \vee g \circ c$.

Lemme 2. *Le produit défini ci-dessus munit $\pi_n(X, A, x_0)$ d'une structure de groupe, abélien si $n \geq 3$ ou $n = 2$ et $A = \{x_0\}$.*

Exercice 1. *Soit $I = [0, 1]$ et J^{n-1} le complémentaire dans ∂I^n de la face d'équation $x_n = 0$.*

(1) *Montrer que $\pi_n(X, A, x_0)$ s'identifie aux classes d'homotopie d'applications $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$.*

(2) *Montrer que le produit se définit dans ces coordonnées comme pour la concaténation dans le groupe fondamental en faisant jouer uniquement la coordonnée x_1.*

Exercice 2. (1) *Montrer que le groupe $\pi_n(D^n, S^{n-1}, s_0)$ est non trivial.*
(2) *Calculer $\pi_n(M, \partial M, x_0)$ dans le cas où M est un anneau puis une bande de Möbius.*

Par l'inclusion de $\{x_0\}$ dans A, on a une application $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$. Par celle de A dans X, une application $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$, enfin, l'application qui à $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ associe $f|_{S^{n-1}}$ induit un morphisme ∂ : $\pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$. La proposition suivante est techniquement très utile mais essentiellement formelle, comme le montre la démonstration.

Proposition 1. *Soit (X, A) une paire d'espaces munie d'un point base $x_0 \in A$. On a une suite exacte longue*

$$\cdots \to \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \cdots .$$

Preuve. Rappelons que $\pi_0(X, A)$ n'est pas défini et que les trois derniers ensembles ne sont pas des groupes. Il y a toujours cependant un élément "trivial" et par exactitude, on entend que la préimage de l'élément trivial est l'image de l'application précédente.

Exactitude en $\pi_{n-1}(A, x_0)$: observons d'abord que si $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ alors sa restriction au bord est homotope à une constante dans X en posant $H(x, t) = g((1-t)x + ts_0)$. La composée $\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0)$ est donc triviale. Réciproquement, soit $f : S^{n-1} \to A$ tel que $[f] = 0 \in \pi_{n-1}(X, x_0)$. Soit $H : S^{n-1} \times [0, 1] \to X$ l'homotopie entre f et l'application constante x_0. En identifiant $S^{n-1} \times \{1\}$ à un point, on obtient un espace homéomorphisme à D^n et H se voit comme une application $D^n \to X$ qui envoie le bord sur A. Il s'agit d'un élément de $\pi_n(X, A, x_0)$ et f s'obtient en le restreignant au bord.

Exactitude en $\pi_n(X, A, x_0)$: Soit $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ représentant un élément de $\pi_n(X, x_0)$. On peut le voir comme un élément de $\pi_n(X, A, x_0)$ dont la restriction à S^{n-1} est triviale, montrant que la composée $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0)$ est triviale. Réciproquement, si $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ a une restriction à S^{n-1} homotope à une constante, on prolonge f sur une couronne par l'homotopie pour définir une application $f' : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$. Par construction $[f'] \in \pi_n(X, x_0)$ représente f dans $\pi_n(X, A, x_0)$.

Exactitude en $\pi_n(X, x_0)$: si $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ est représentée par une fonction à valeurs dans A, elle est représentée dans $\pi_n(X, A, x_0)$ par une application $(D^n, s_0) \to (A, x_0)$. Son bord est donc trivial. Réciproquement, si $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, x_0, x_0)$ représente 0 dans $\pi_n(X, A, x_0)$, le critère de compression nous dit que f est homotope à un élément de $\pi_n(A, x_0)$ et tout est démontré. □

Définition 1. *On dira qu'un espace X est 0-connexe s'il est connexe par arcs et pour tout $n > 0$ on dira qu'il est n-connexe s'il vérifie $\pi_k(X, x_0) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et pour un certain $x_0 \in X$.*

On dira qu'une paire d'espaces (X, A) est 0-connexe si toute composante connexe par arcs de X contient un élément de A et qu'elle est n-connexe avec $n > 0$ si elle est 0-connexe et $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in A$ et $1 \leq k \leq n$.

Exercice 3. *Montrer que (X, A) est n-connexe si et seulement si pour tout $1 \leq k \leq n$ l'une des propriétés suivantes est vraie:*

(1) *Toute application $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ est homotope relativement au bord à une application à valeurs dans A.*
(2) *Toute application $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ est homotope dans cette classe à une application à valeurs dans A.*
(3) *Toute application $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ est homotope dans cette classe à une application constante.*

Exercice 4. *Déterminer l'ordre de connexité des paires suivantes:*

(1) $(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$
(2) $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$
(3) $(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

1.2. **Théorème d'Hurewicz.** Soit (X, A, x_0) un triplet d'espaces. On rappelle que $\pi_n(X, A, x_0)$ est engendré par des classes d'homotopie d'applications

$$f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0).$$

Le morphisme induit $f_* : H_n(D^n, S^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H_n(X, A, \mathbb{Z})$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f. En notant α_n le générateur de $H_n(D^n, S^{n-1}, \mathbb{Z})$ on définit une application $h : \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ par $h(f) = f_*\alpha_n$ appelée application d'Hurewicz.

Proposition 2. *Si $n > 1$, l'application $h : \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A, \mathbb{Z})$ est un morphisme.*

Preuve. Sous-entendons que les coefficients des groupes d'homologie sont $\mathbb{Z}$. Donnons nous $f, g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$. On a défini le produit comme la composition $f \vee g \circ c$ où $c : D^n \to D^n \vee D^n$ est la contraction sur un disque équatorial contenant s_0. Tout revient alors à montrer que $(f \vee g \circ c)_* = f_* + g_*$. Etudions pour cela $c_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \to H^n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$.

On a deux applications $q_1, q_2 : D^n \vee D^n \to D^n$ qui écrasent le deuxième (respectivement le premier) disque. Elles vérifient que $q_{1*} \oplus q_{2*} : H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}) \to H_n(D^n, S^{n-1} \oplus H_n(D^n; S^{n-1})$ est un isomorphisme. Comme $q_1 \circ c$ et $q_2 \circ c$ sont homotopes à l'identité, l'application c lue par cet isomorphisme est l'application diagonale. Le résultat est alors démontré. $\square$

Le morphisme d'Hurewicz ne peut pas être un isomorphisme en général pour la simple raison que les groupes d'homologie sont abéliens alors que $\pi_1(X, x_0)$ et

$\pi_2(X, A, x_0)$ ne le sont pas en général. On peut exhiber plus précisément des éléments ayant la même image.

Dans le cas absolu une application $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ envoie toute la sphère en x_0. Si on se donne $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ on peut prolonger f sur une couronne sphérique $S^{n-1} \times [1, 2]$ en envoyant (x, t) sur $\gamma(t-1)$. On vérifie que cela définit une action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$. Comme les applications f et $\gamma.f$ sont homotopes en tant qu'applications $S^n \to X$, on en déduit que $h([\gamma f]) = h([f])$. On note alors $\pi'_n(X, x_0)$ le quotient de $\pi_n(X, x_0)$ par le sous-groupe (distingué si nécessaire) engendré par $\gamma.[f] - [f]$ de sorte que h induit une application $h : \pi'_n(X, x_0) \to H_n(X, \mathbb{Z})$.

Le cas relatif est distinct car cette fois, on munit seulement $\pi_n(X, A, x_0)$ d'une action de $\pi_1(A, x_0)$. Si $f : (D^n, S^{n-1}, x_0) \to (X, A, x_0)$ représente un élément de $\pi_n(X, A, x_0)$ et $\gamma : ([0, 1], \{0, 1\}) \to (A, x_0)$ représente un élément de $\pi_1(A, x_0)$ on définit $\gamma.f = (\gamma \circ p \vee f) \circ c$ où p est la projection de D^n sur D^1.

Exercice 5. *Montrer que cette opération définit bien une action de $\pi_1(A, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$. Calculer $\pi_2(X, A)$ et comprendre cette action dans le cas où $X = S^2$ et A est un huit plongé dans X.*

On rappelle le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit X un espace connexe par arcs muni d'un point base x_0. Alors l'application $h : \pi'_1(X, x_0) \to H_1(X, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.*

Exercice 6. *Démontrer ce résultat en construisant explicitement un inverse. On choisira une fois pour toute un arc γ_x reliant x_0 à x pour tout $x \in X$. Que peut-on dire de $h : \pi_1(X, A, x_0) \to H_1(X, A)$ dans le cas où A et X sont connexes?*

Théorème 2. *Soit (X, A) une paire d'espaces avec A et X connexes par arcs. Soit $n \geq 2$ et supposons la paire (X, A) $(n-1)$-connexe. Alors $H_k(X, A) = 0$ pour $k < n$ et $h : \pi'_n(X, A) \to H_n(X, A)$ est un isomorphisme.*

Avant d'attaquer la preuve de ce théorème, on va rappeler la preuve d'un fait bien connu : si deux applications $f, g : X \to Y$ sont homotopes, alors pour tout entier n, $f_* = g_* : H_n(X, \mathbb{Z}) \to H_n(Y, \mathbb{Z})$. Ce n'est pas tant le résultat qui nous intéresse (car on le suppose bien connu) sinon sa preuve dont on va reprendre quelques éléments dans celle du théorème d'Hurewicz.

Preuve. Si on se donne une homotopie $H : X \times [0, 1] \to Y$ entre f et g alors pour tout simplexe $\sigma : \Delta_n \to X$ on peut comparer précisément $f_*\sigma$ et $g_*\sigma$: ce sont deux faces de l'image du prisme $\Delta_1 \times \Delta_n$ par l'application H. Notons $i_k : \Delta_k \to \Delta_k$ l'application identité que l'on voit comme un élément de $C_k(\Delta_k, \mathbb{Z})$. On construit par récurrence un élément $i_1 \times i_k \in C_k(\Delta_1 \times \Delta_k)$ qui vérifie $\partial(i_1 \times i_k) = \partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k$. Intuitivement, il s'agit d'une triangulation du prisme $\Delta_1 \times \Delta_k$.

L'élément $i_1 \times i_0$ est l'identité, puis en supposant que $i_1 \times i_{k-1}$ existe, on observe que $\partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k$ est un cycle dans $C_k(\Delta_1 \times \Delta_k)$ et comme $H_k(\Delta_1 \times \Delta_k, \mathbb{Z}) = 0$, on peut bien trouver un cycle $i_1 \times i_k$ et la récurrence est établie.

Pour conclure, on définit l'opérateur $K : C_k(X,\mathbb{Z}) \to C_{k+1}(Y,\mathbb{Z})$ par $K(\sigma) = H_*(i_1 \times i_k)$. On a alors $\partial K(\sigma) + K(\partial\sigma) = H_*(\partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k) + H_*(i_1 \times \partial\sigma) = H_*(\partial i_1) = g_*\sigma - h_*\sigma$. Si maintenant on a un cycle $z \in C_k(X,\mathbb{Z})$ on applique cette relation pour trouver $dK(z) = g_*z - h_*z$ et le résultat est démontré. □

La preuve du théorème d'Hurewicz va reposer sur la proposition technique suivante. On commence par observer que D^n et Δ_n sont homéomorphes et qu'on peut donc les substituer dans la définition de $\pi_n(X,A)$. L'avantage est que la classe fondamentale $\alpha_n \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ est représentée par l'identité de Δ_n que l'on note dorénavant i_n. Le morphisme d'Hurewicz envoie donc simplement la classe de $f : (\Delta_n, \partial\Delta_n, e_0) \to (X, A, x_0)$ sur $[f] \in H_n(X,A)$.

Notons $C_k^{(n)}(X,A)$ le sous-groupe de $C_k(X,A)$ engendré par les simplexes $\sigma : \Delta_k \to X$ qui envoient le n-squelette de Δ_k dans A (modulo $C_k(A)$). Il s'agit d'un sous-complexe de $C_*(X,A)$ dont on note l'homologie $H_*^{(n)}(X,A)$.

Proposition 3. *Si (X,A) est n-connexe, le morphisme naturel $H_*^{(n)}(X,A) \to H_*(X,A)$ est un isomorphisme.*

Preuve. On définit pour tout simplexe $\sigma : \Delta_k \to X$ une application $P(\sigma) : [0,1] \times \Delta_k \to X$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) $P(\sigma)(0,\cdot) = \sigma$.
(2) $P(\sigma)(1,\cdot) \in C_k^{(n)}(X,A)$
(3) $\sigma \in C_k^{(n)}(X,A) \implies P(t,\cdot) = \sigma$ pour tout $t \in [0,1]$.
(4) $P(\sigma) \circ (i_1 \times \partial_k^i) = P(\sigma \circ \partial_k^i)$

Dans cette dernière formule, $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ est la i-ème face. L'application P est définie pour des simplexes de $C_k^{(n)}(X,A)$. On la définit sur les autres simplexes par récurrence sur k. Supposons donc qu'elle soit définie pour tous les i-simplexes avec $i < k$ et donnons nous un k-simplexe $\sigma : \Delta_k \to X$. D'après (4) et l'hypothèse de récurrence, P est définie sur l'image de $i_1 \times \partial_k^i$. D'après (1), il est aussi défini sur $\{0\} \times \Delta_k$.

Si $k \leq n$, on a par hypothèse $\pi_k(X,A) = 0$. D'après le critère de compression, l'application P restreinte à $\{0\} \times \Delta_k \cup [0,1] \times \partial\Delta_k$ est alors homotope à une application à valeurs dans A. En choisissant une telle homotopie, on peut prolonger P de sorte à envoyer $\{1\} \times \Delta_k$ dans A. Si $k > n$, on peut prolonge P n'importe comment.

On définit alors $\phi : C_k(X,A) \to C_k^{(n)}(X,A)$ par $\phi(\sigma) = P(\sigma)(1,\cdot)$ puis une homotopie de chaîne $K : C_*(X,A) \to C_{*+1}(X,A)$ par la formule $K(\sigma) = P(\sigma)(i_1 \times i_k)$. On calcule alors $\partial K(\sigma) = \partial P(\sigma)(i_1 \times i_k) = P(\sigma)(\partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k) = P(\sigma)(\partial_1^1 i_1 - \partial_1^0 i_1 - \sum_j (-1)^j i_1 \times \partial_k^j i_k)$. De l'autre côté, $K(\partial\sigma) = \sum_j (-1)^j K(\partial_k^j \sigma) = \sum_j (-1)^j P(\partial_k^j \sigma)(i_1 \times i_{k-1}) = \sum_j (-1)^j P(\sigma)(i_1, \partial_k^j i_k)$ d'après (4). En faisant les comptes, on trouve $\partial K(\sigma) + K(\partial\sigma) = P(\sigma)(1,\cdot) - P(\sigma)(0,\cdot) = \phi(\sigma) - \sigma$.

On en déduit que $\phi : C_k(X,A) \to C_k^{(n)}(X,A)$ induit un inverse homotopique de l'inclusion et la proposition est démontrée. $\square$

Preuve du théorème 2. Dans les hypothèses du théorème, tout élément de $C_k^{(n-1)}(X,A)$ est nul si $k < n$ par construction, ainsi on déduit directement de la Proposition 3 que $H_k(X,A) = 0$ pour tout $k < n$.

Soit $f : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \to (X,A)$. On a alors $f \in C_n^{(n-1)}(X,A)$ et on note encore $h : \pi'_n(X,A) \to H_n^{(n-1)}(X,A) \simeq H_n(X,A)$ l'application induite. Réciproquement, si $f \in C_n^{(n-1)}(X,A)$, il représenterait un élément de $\pi_n(X,A)$ si on avait la condition de point base. En rattachant d'une façon arbitraire cet élément au point base, on définit un élément de $\pi'_n(X,A)$. On définit ainsi un morphisme $\phi : C_n^{(n-1)}(X,A) \to \pi'_n(X,A)$. Comme tous les éléments de $C_n^{(n-1)}$ sont des cycles, il suffit de montrer que ϕ s'annule sur un bord. Soit $\sigma \in C_{n+}^{(n-1)}(X,A)$. On a $\phi(\partial\sigma) = \sum_j (-1)^j \phi(\partial_{n+1}^j \sigma) = \sum_j (-1)^j [\partial_{n+1}^j \sigma] = [\sigma|_{\partial\Delta^{n+1}}]$ par additivité. Or $g : \partial\Delta_{n+1} \to X$ représente 0 dans $\pi_n(X)$ parce qu'elle s'étend au simplexe. La même chose est alors vraie dans $\pi_n(X,A)$ et le résultat est démontré. On a construit ainsi un morphisme $\phi : H_n(X,A) \to \pi'_n(X,A)$ qui est un inverse de h par construction. $\square$

Le prototype de paire n-connexe est un espace A auquel on ajoute des cellules de dimension $> n$. Voici un énoncé précis.

Proposition 4. *Soit X un CW-complexe connexe par arcs et X^n son n-squelette. Alors (X, X^n) est n-connexe pour tout $n \geq 1$.*

Preuve. Montrons à la main la 1-connexité. On se donne un point base $x_0 \in X^0$ et un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ vérifiant $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) \in X$. Comme $[0,1]$ est compact, $\gamma([0,1])$ est contenu dans un sous-complexe fini et on peut supposer que X a un nombre fini de cellules. Considérons une cellule de dimension maximale $e : D^N \to X$ (on a $N > n \geq 1$). Si on prouve que γ est homotope relativement au bord à un chemin qui évite $e(\dot{D}^N)$ on peut éliminer par récurrence toutes les cellules de dimension $> n$ et la proposition est démontrée.

Considérons $I = \gamma^{-1}(e(\dot{D}^N))$. C'est un ouvert de $]0,1[$ qui s'écrit donc $I = \coprod_i]\alpha_i, \beta_i[$. Sur chaque intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$ on peut par combinaison barycentrique homotoper γ sur un segment de droite $[e^{-1}(\gamma(\alpha_i)), e^{-1}(\gamma(\beta_i))]$. Après cette opération $e^{-1}\gamma([0,1])$ est une famille dénombrable de segments qui évite donc un point $e(y)$ avec $y \in \dot{D}^n$. En rétractant par déformation $D^n \setminus \{y\}$ sur son bord S^{n-1} on obtient une homotopie entre γ et un chemin qui évite $e(\dot{D}^n)$.

Supposons maintenant $n \geq 2$. On veut prouver que $\pi_2(X, X^n, x_0) = 0$ et le théoréme d'Hurewicz nous donne l'isomorphisme $\pi'_2(X, X^n, x_0) \simeq H_2(X, X^n)$. Comme toutes les 2-cellules de X sont dans X^n, on a $C_2^{\text{cell}}(X, X^n) = 0$ et $H_2(X, X^n) = 0$. Si X est simplement connexe, comme on a prouvé que $\pi_1(X, X^n, x_0) = 0$ on a aussi $\pi_1(X^n, x_0) = 0$. Ainsi $\pi_1(X^n) = 0$ n'agit pas sur $\pi_2(X, X^n, x_0)$ et on en déduit bien $\pi_2(X, X^n, x_0) = 0$. Dans le cas contraire, prenons le revêtement universel de X $p : \tilde{X} \to X$ basé en x_0. Un élément de $\pi_2(X, X^n, x_0)$ est représenté par une application $f : (D^2, S^1, s_0) \to (X, X^n, x_0)$ qui se relève de façon unique en $\tilde{f} : (D^2, S^1, s_0) \to (\tilde{X}, \tilde{X}^n, \tilde{x}_0)$. Grâce au cas simplement connexe on a $\pi_2(\tilde{X}, \tilde{X}^n, \tilde{x}_0) = 0$ donc $\tilde{f}$ se rétracte modulo son bord sur $\tilde{X}_n$. En composant par p, la même chose est vraie pour f et on a bien $\pi_2(X, X^n, x_0) = 0$.

On procède par induction pour prouver $\pi_k(X, X^n, x_0) = 0$ pour tout $k \leq n$. □

Les applications du théorème d'Hurewicz sont nombreuses: parmi elles, citons la possibilité de construire des espaces topologiques avec des groupes d'homotopie prescrits.

Corollaire 1. *Soit X un espace topologique connexe par arcs muni d'un point base x_0 et fixons $n > 1$. Il existe alors un espace topologique X' vérifiant $\pi_k(X', x_0) = \pi_k(X, x_0)$ pour tout $k < n$ et $\pi_n(X') = 0$.*

Preuve. Soit $g_i : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ une famille paramétrée par $i \in I$ dont les classes engendrent le groupe $\pi_n(X, x_0)$. On construit $X' = X \amalg \coprod_{i \in I} D_i^{n+1} / \sim$ où on a posé $x \sim g_i(x)$ pour tout $x \in S_i^n$. On écrit alors la suite exacte longue d'homotopie de la paire (X', X) qui est n-connexe d'après la proposition précédente. Cela donne l'isomorphisme $\pi_k(X', x_0) = \pi_k(X, x_0)$ pour tout $k < n$.

Considérons ensuite le morceau $\pi_{n+1}(X', X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X', x_0) \to 0$. La i-ème $(n+1)$-cellule de X' définit un élément de $\pi_{n+1}(X', X, x_0)$ dont le bord est $[g_i]$. L'application ∂ est donc surjective et le résultat s'en suit. □

Etant donné un groupe G, il existe un espace topologique connexe par arcs X vérifiant $\pi_1(X, x_0) = G$. On peut le construire de diverses façon, une méthode est de poser $X = (G * G) * (G * G)$ où $A * B = A \times B \times [0, 1] / \sim$ où on pose $(a, b, 0) \sim (a, b', 0)$ et $(a, b, 1) \sim (a', b, 1)$ pour tout $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$. Le corollaire appliqué à X avec $n = 2$ permet d'inclure X dans X^1 avec $\pi_1(X) = \pi_1(X^1)$ et $\pi_2(X^1) = 0$. On itère le procédé pour construire une chaine $X \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots$ En considérant $Y = \varinjlim X^i$ on fabrique un espace Y vérifiant $\pi_1(Y) = G$ et $\pi_k(Y) = 0$ pour tout $k > 1$. Cet espace, noté $K(G, 1)$, est d'importance fondamentale, en particulier parce qu'il ne dépend que de G à homotopie près comme on le verra plus tard.

Exercice 7.
(1) *Trouver explicitement un $K(\mathbb{Z}, 1)$.*
(2) *Trouver un $K(G, 1)$ avec G non trivial et non isomorphe à $\mathbb{Z}$.*
(3) *Construire un $K(\mathbb{Z}, n)$, c'est-à-dire un espace X vérifiant $\pi_k(X) = \mathbb{Z}$ si $k = n$ et 0 sinon.*
(4) *A quelle conditions sur une famille de groupes $(G_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ peut-on trouver un espace X connexe par arcs vérifiant $\pi_k(X) = G_k$ pour tout $k > 0$?*

Comme application très différente, on anticipe un théorème de Whitehead qui donne un critère algébrique pour qu'une application $f : X \to Y$ entre deux CW-complexes soit une homotopie faible.

Corollaire 2. *Soit X et Y deux espaces connexes par arcs et $f : X \to Y$ une application continue. Alors si f induit un isomorphisme $f_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ pour tout $k > 0$ alors $f_* : H_k(X, \mathbb{Z}) \to H_k(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout $k > 0$. La réciproque est vraie si X est simplement connexe.*

Preuve. On considère le cône de l'application $Cf = X \times [0,1] \amalg Y/(x,1) \sim f(x)$ et l'inclusion $X \to Cf$ donnée par $x \mapsto (x, 0)$. On prend x_0 pour point base et on suppose que f induit des isomorphismes en homotopie. Comme Cf se rétracte par déformation sur Y on a $\pi_k(Cf, f(x_0)) = \pi_k(Y, f(x_0)$ et l'application $\pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Cf, x_0)$ est encore un isomorphisme.

La suite exacte de la paire (X, CX) nous donne immédiatement $\pi_k(CX, X, x_0) = 0$ pour tout $k > 0$. Let théorème d'Hurewicz implique $H_k(CX, X) = 0$ pour tout k. La suite exacte en homologie de la paire (X, CX) permet de conclure que l'application $H_k(X, \mathbb{Z}) \to H_k(Cf, \mathbb{Z}) \simeq H_k(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. On peut faire le raisonnement dans l'autre sens si $\pi_1(X, x_0) = 0$ car alors le premier groupe d'homotopie non-trivial de (Cf, X) sera bien égal au premier groupe d'homologie non-trivial de (Cf, X), à savoir 0. □

Exercice 8. *Soit G un groupe et X un espace connexe par arcs de point base x_0. Montrer que $H_2(X, \mathbb{Z})/h(\pi_2(X, x_0))$ ne dépend que de G. Ce groupe est noté $H_2(G, \mathbb{Z})$. On admettra que les espaces $K(G, 1)$ sont uniques à homotopie près.*

1.3. Groupes d'homotopie et fibrations.

Définition 2. *Une application $p : E \to B$ est une fibration (de Serre) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} D^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n \times [0,1] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

admet un relevé comme indiqué.

Tout revêtement est une fibration de Serre d'après le théorème de relèvement des homotopies, mais aussi un produit $E = F \times B \to B$ avec $p(f, b) = b$.

Exercice 9. *Soit $p : E \to B$ une application telle qu'il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de B et des homéomorphismes $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \to F_i \times U_i$ rendant commutatif le diagramme suivant:*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & F_i \times U_i \arrow[dl, "p_2"] \\ & U_i & \end{tikzcd}.$$

On appellera une telle application un fibré. Prouver qu'il s'agit d'une fibration et que si B est connexe par arcs, tous les F_i sont homéomorphes entre eux.

Théorème 3. *Soit $p : E \to B$ une fibration, $b_0 \in B$ un point base, $F = p^{-1}(\{b_0\})$ et $x_0 \in F$. Il existe un morphisme $\partial : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0)$ s'inscrivant dans une suite exacte longue:*

$$\cdots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \to \cdots$$

Preuve. On peut le déduire que la suite exacte d'homotopie relative si on établit l'isomorphisme $\pi_n(E, F, x_0) \simeq \pi_n(B, b_0)$. Or, l'application $p : E \to B$ induit bien un morphisme $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$. Soit $f : (D^n, S^{n-1}) \to (B, b_0)$ représentant un élément de $\pi_n(B, b_0)$. On écrit $D^n \simeq D^{n-1} \times [0, 1]$: comme p est une fibration, il existe une application $\tilde{f} : D^n \to E$ qui relève f et envoie le point base $s_0 \in S^{n-1}$ sur x_0. Son bord étant envoyé dans F, cela définit bien une classe $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F)$. Cela prouve que p_* est surjective. Si maintenant $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (E, F, x_0)$ représente 0 dans $\pi_n(B, b_0)$ c'est qu'il existe une application $H : D^n \times [0, 1] \to B$ telle que $H(S^{n-1} \times [0, 1] \cup D^n \times \{1\}) = b_0$ et $H(\cdot, 0) = p \circ f$. En appliquant la propriété de fibration on constate que H se relève en une application $\tilde{H}$ à valeurs dans E qui fournit une compression de f dans la fibre F. Ainsi, $[f] = 0 \in \pi_n(E, F)$ et p_* est injective. Le théorème se déduit donc de celui de la suite exacte d'homotopie relative. □

Nous sommes enfin armés pour calculer quelques groupes d'homotopie de sphères! On a d'après le théorème d'Hurewicz $\pi_k(S^n) = 0$ si $0 < k < n$ et $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ si $n > 0$. Comme le revêtement universel de S^1 est $\mathbb{R}$ qui est contractile, on a $\pi_k(S^1) = 0$ pour $k > 1$.

Au delà de ces résultats on peut exploiter l'action de S^1 sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ défini par $z.(x_0, \ldots, x_n) = (zx_0, \ldots, zx_n)$. Le quotient est isomorphe à l'espace projectif complexe $P^n(\mathbb{C})$. Quand $n = 1$, on a $P^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ de sorte qu'on a une suite exacte longue

$$0 \to \pi_5(S^3) \to \pi_5(S^2) \to 0 \to \pi_4(S^3) \to \pi_4(S^2) \to 0 \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to 0$$

On en déduit le premier résultat réellement intéressant: $\pi_3(S^2) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Il est en effet remarquable que ce groupe soit non-trivial, et engendré par la fibration de Hopf $p : S^3 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$. Très remarquable aussi est l'isomorphisme $\pi_k(S^3) = \pi_k(S^2)$ pour tout $k \geq 3$. Ces groupes ne sont toujours pas connus!

Exercice 10. *Montrer que si dans une fibration $p : E \to B$ de fibre F, l'inclusion de F dans E est homotope à une constante alors on a $\pi_n(B) \simeq \pi_n(Y) \times \pi_{n-1}(F)$. Si F est un retract de E, on a plutôt $\pi_n(E) = \pi_n(B) \times \pi_n(F)$.*

Soit X un espace topologique muni d'un point base x_0. On note $PX = \{\gamma : [0, 1] \to X, \gamma(0) = x_0\}$ que l'on munit de la topologie compacte ouverte et on pose $p(\gamma) = \gamma(1)$. On note $\Omega X = p^{-1}(x_0)$ l'espace des lacets en x_0.

Lemme 3. *L'application $p : PX \to X$ est une fibration.*

Preuve. Si on a $f : D^n \times [0,1] \to X$ qu'on a relevé en $\tilde{f}$ au-dessus de $D^n \times \{0\}$, cela signifie qu'on a deux familles de chemins indexées par D^n. Celle donnée par $f(z,\cdot)$ partant de $f(z,0)$ et arrivant à $f(z,1)$ et celle donnée par $\tilde{f}(z,0)$ partant du point base et arrivant à $f(z,0)$. Il nous suffit alors de concaténer ces deux familles pour construire continûment par rapport à $z \in D^n$ et $t \in [0,1]$ un chemin partant du point base et terminant à $f(z,t)$. □

L'application $PX \times [0,1] \to PX$ définie par $(\gamma, s) \mapsto \gamma(s\cdot)$ est une contraction de PX sur son point base. Cela prouve que PX a tous ses groupes d'homotopie triviaux. La suite exacte d'homotopie nous apprend alors que $\pi_n(\Omega X, *) = \pi_{n+1}(X, x_0)$ où on a noté $*$ le lacet constant x_0. Bien sûr, c'est en fait un peu tautologique, mais cette observation est fondamentale. Elle ramène par exemple le calcul de $\pi_2(X)$ à celui de $\pi_1 \Omega X$ et par Hurewicz à celui de $H_1(\Omega X, \mathbb{Z})$. On ramène toujours par ce genre de procédé le calcul d'un groupe d'homotopie à celui d'un groupe d'homologie.

Exercice 11. *Calculer $\pi_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ pour k aussi grand que possible. En déduire un $K(\mathbb{Z}, 2)$ explicite.*

Exercice 12. *Calculer $\pi_i(\mathrm{SU}_n)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $n \geq 2$.*

Exercice 13. *Montrer que $Conf_n(\mathbb{C}) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}$ est un $K(G, 1)$.*

Exercice 14. *Montrer que pour toute application $f : X \to Y$, il existe un espace X' et un diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \\ X' \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

où ϕ est une équivalence d'homotopie et p est une fibration.

2. Homologie à coefficients tordus

Soit X un espace topologique délaçable et $x_0 \in X$ un point base. On note $\tilde{X}$ le revêtement universel basé en x_0: on rappelle que, au moins en tant qu'ensemble, il s'agit des paires $(x, [\gamma])$ où x est un point de X et $\gamma : [0,1] \to X$ est un chemin continu reliant x_0 à x. La notation $[\gamma]$ désigne la classe d'homotopie de γ relative au bord.

On rappelle que si $[\alpha]$ et $[\beta]$ désignent deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$, alors le produit $[\alpha][\beta]$ est par définition $[\alpha\beta]$ où $\alpha\beta$ désigne le chemin obtenu en parcourant α dans l'intervalle $[0, 1/2]$, puis β dans l'intervalle $[1/2, 1]$.

On en déduit que le groupe fondamental agit sur le revêtement universel par la formule $[\alpha].[\gamma] = [\alpha\gamma]$ et qu'on a $[\alpha].([\beta].[\gamma]) = [\alpha\beta].[\gamma]$: il s'agit donc d'une action à gauche.

2.1. **Une définition préliminaire.** Soit M un groupe abélien muni d'une action linéaire de $\pi = \pi_1(X, x_0)$. Il est équivalent de se donner un morphisme $\pi \to \mathrm{Aut}(M)$ où de munir M d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module.

Par exemple le groupe $C_n(\tilde{X})$ des n-chaînes singulières de $\tilde{X}$ est un tel $\mathbb{Z}[\pi]$-module: on définit le produit tensoriel

$$C_n(\tilde{X}) \otimes_\pi M = C_n(\tilde{X}) \otimes M/N$$

où N est le sous-groupe engendré par $\gamma.x \otimes \gamma.m - x \otimes m$ pour tout $\gamma \in \pi, x \in C_n(\tilde{X}), m \in M$.

Remarque 1. *En général, si A est un anneau non commutatif, on définit le produit tensoriel $M \otimes_A N$ si M est un A-module à droite et N est un A-module à gauche comme le quotient du produit tensoriel usuel $M \otimes N$ par le sous groupe engendré par $ma \otimes n - m \otimes an$. C'est ce qu'on fait ici en munissant implicitement $C_n(\tilde{X})$ d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module à droite en posant $x.\gamma = \gamma^{-1}.x$.*

Comme la différentielle usuelle $\partial : C_n(\tilde{X}) \to C_{n-1}(\tilde{X})$ commute avec l'action de π, elle induit une différentielle $\partial : C_n(\tilde{X}) \otimes_\pi M \to C_{n-1}(\tilde{X}) \otimes_\pi M$.

Définition 3. *On définit l'homologie de X à coefficients tordus dans M et on note $H_*(X, M)$ l'homologie du complexe $C_*(\tilde{X}) \otimes_\pi M$.*

Les groupes $\mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}), M)$ des morphismes π-équivariants de $C_n(\tilde{X})$ dans M forme un (co-)complexe pour la différentielle $df = (-1)^n f \circ \partial$.

Définition 4. *On définit la cohomologie de X à coefficients tordus dans M et on note $H^n(X, M)$ la cohomologie en degré n du complexe* $\mathrm{Hom}_\pi(C_*(\tilde{X}), M)$.

Exemple 1.
(1) *Si l'action de π sur M est triviale, on a $C_n(\tilde{X}) \otimes_\pi M = C_n(X) \otimes M$. On en déduit que $H_*(X, M)$ est bien égal à l'homologie standard à coefficients dans M. La même chose est vraie en cohomologie et la notation est bien cohérente.*
(2) *Si on pose $M = \mathbb{Z}[\pi]$ avec π agissant par multiplication à gauche, on a $C_n(\tilde{X}) \otimes_\pi \mathbb{Z}[\pi] \simeq C_n(\tilde{X})$ et donc $H_*(X, \mathbb{Z}[\pi]) = H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. Attention ce n'est pas vrai pour la cohomologie!*
(3) *Plus généralement, si H est un sous-groupe de π et $M = \mathbb{Z}[\pi/H]$, on a $C_n(\tilde{X}) \otimes \mathbb{Z}[\pi/H] \simeq C_n(H/\tilde{X})$ et donc $H_*(X, \mathbb{Z}[\pi/H]) = H_*(\hat{X}, \mathbb{Z})$ où $\hat{X}$ est le revêtement $p : \hat{X} \to X$ tel que $p_*\pi_1(\hat{X}) = H$.*

L'homologie à coefficients tordus a des propriétés formelles très proches de l'homologie standard: elle permet -entre autres applications- de décrire l'homologie de revêtements arbitraires de X.

Exercice 15. *Soit M une variété compacte de dimension n et $\phi : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme défini par $\phi(\alpha) = 1$ si l'orientation de M n'a pas changé le long de α, et $\phi(\alpha) = -1$ sinon. On note $\tilde{Z}$ le groupe $\mathbb{Z}$ muni de l'action de $\pi_1(M)$*

suivante: $\gamma.x = \phi(\gamma)x$. Montrer que $H_n(M, \tilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}$: le générateur de ce groupe est appelé la classe fondamentale de M (à coefficients tordus par l'orientation).

Solution:

Si M est orientable, c'est déjà connu. On considère donc le cas non-orientable. Le noyau de ϕ correspond au plus petit revêtement orientable de M, notons le $\hat{M}$. En notant τ l'involution non triviale du revêtement $p : \hat{M} \to M$ on constate qu'on a l'isomorphisme

$$C_k(\tilde{M}) \otimes_\pi \tilde{\mathbb{Z}} = C_k(\hat{M})/(\tau_*\sigma + \sigma).$$

Ce dernier est isomorphe via l'inclusion à $C_k(\hat{M})^- = \ker(\tau_* + \mathrm{Id})$. Finalement, on a la suite exacte de complexes

$$0 \to C_k(\hat{M})^- \to C_k(\hat{M}) \xrightarrow{p_*} C_k(M) \to 0$$

d'où on tire la suite exacte $H_{n+1}(M, \mathbb{Z}) \to H_n(M, \tilde{\mathbb{Z}}) \to H_n(\hat{M}, \mathbb{Z}) \to H_n(M, \mathbb{Z})$. Comme on a $H_n(M, \mathbb{Z}) = H_{n+1}(M, \mathbb{Z}) = 0$ et $H_n(\hat{M}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ on en tire bien $H_n(M, \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$.

2.2. **La définition générale.** Un inconvénient majeur de la définition ci-dessus est la suivante: si $A \subset X$ contient le point base x_0 et M est un $\mathbb{Z}[\pi_1(A, x_0)]$-module, on ne peut donc pas définir $H_*(X, M)$, encore moins considérer l'homologie relative, ce qui est de mauvaise augure pour une théorie homologique. La solution est de dissocier le groupe π du groupe $\pi_1(X, x_0)$. On introduit pour cela un espace de référence connexe par arcs B muni d'un point base b_0.

Les objets de notre nouvelle catégorie seront des espaces topologiques X munis d'une application continue $f : X \to B$. Un n-simplexe tordu est par définition un couple $(\sigma, [\gamma])$ où $\sigma : \Delta_n \to X$ est continue et $\gamma : [0,1] \to B$ vérifie $\gamma(0) = b_0$ et $\gamma(1) = f(c_n)$ où c_n désigne le barycentre de Δ_n. Notons $\pi = \pi_1(B, b_0)$: ce groupe agit à gauche sur les n-simplexes tordus par la formule $\alpha.(\sigma, [\gamma]) = (\sigma, [\alpha\gamma])$.

On note $C_n(X, B)$ le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes tordus: il s'agit d'un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre. On définit $\partial(\sigma, [\gamma]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \partial_i, [\gamma\gamma_i])$ où $\partial_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ est la i-ème face et γ_i est l'image par f d'un chemin reliant le barycentre de Δ_n au barycentre de la i-ème face de Δ_n.

Etant donné un π-module M on note a nouveau $H_*(X, M)$ et $H^*(X, M)$ l'homologie et la cohomologie des complexes obtenus comme précédemment en remplaçant $C_*(\tilde{X})$ par $C_*(X, B)$. Cette construction généralise la précédente si on pose $B = X$ et $f = \mathrm{Id}_X$.

Exercice 16. *Identifier $H_0(X, M)$ et $H^0(X, M)$.*

Avec cette nouvelle définition on a d'une part plus besoin de point base dans X (puisqu'il est dans B) et d'autre part, pour tout sous-ensemble A de X, on a une application induite $f|_A : A \to B$ et donc $C_*(A, B)$ est un sous-complexe de $C_*(X, B)$. On définit l'homologie relative comme l'homologie du complexe quotient, de sorte qu'on a automatiquement une suite exacte longue en homologie.

Pour faire le lien avec la définition précédente, donnons nous $f : X \to B$ et supposons X connexe par arcs avec un point base x_0 envoyé sur b_0. On peut alors grâce à l'application $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ voir $\mathbb{Z}[\pi]$ comme un $\pi_1(X, x_0)$-module. Le complexe $C^*(\tilde{X}) \otimes_{\pi_1(X)} \mathbb{Z}[\pi]$ est engendré par les paires $\sigma \otimes \gamma$ où $\sigma : \Delta_n \to \tilde{X}$ et $\gamma \in \pi$. En reliant le point base x_0 à l'image de Δ_n par un chemin α et en considérant $\gamma^{-1} f(\alpha)$ on obtient un isomorphisme entre le complexe $C^*(\tilde{X}) \otimes_{\pi_1(X)} \mathbb{Z}[\pi]$ et $C_*(X, B)$. Ceci montre en particulier que l'homologie tordue ne dépend de B que via son groupe fondamental.

Intéressons-nous à la fonctorialité: un morphisme entre $f : X \to B$ et $g : Y \to B$ est une application $h : X \to Y$ qui fait commuter le diagramme évident. Cette condition assure l'existence d'un morphisme $C_*(X, B) \to C_*(Y, B)$ défini par $h(\sigma, [\gamma]) = (h \circ \sigma, [\gamma])$. Cette rigidité doit être prise au sérieux, mais pas excessivement grâce à l'observation que l'homologie tordue ne dépend que de la classe d'homotopie de l'application $f : X \to B$ et que donc la commutation du diagramme peut être réalisée à homotopie près si on prend des précautions.

Lemme 4. *Soit $f, g : X \to B$ deux applications liées par une homotopie $H : X \times [0, 1] \to B$: alors H définit un isomorphisme de complexes de chaînes $C_*(X, B)^{(f)} \to C_*(X, B)^{(g)}$*

Précisément, cet isomorphisme associe au simplexe tordu $(\sigma, [\gamma])$ le simplexe tordu $(\sigma, [\gamma H(\sigma(c_n), \cdot)])$.

On laisse en exercice au lecteur le soin de vérifier que les propriétés classiques de l'homologie suivantes sont encores vraies.

Proposition 5. *Notons $\pi = \pi_1(B, b_0)$ et considérons M un $\mathbb{Z}[\pi]$-module.*

(1) *Invariance par homotopie*
 Soit $A \subset X$ et $A' \subset X'$ deux paires d'espaces avec deux applications $h : X \to B$ et $h' : X' \to B$. Si $f, g : (X, A) \to (X', A')$ sont deux applications homotopes (relativement aux contraintes) alors on a $f_* = g_* : H_*(X, A, M) \to H_*(X', A', M)$.

(2) *Excision*
 Soit $Z \subset A \subset X$ tel que l'adhérence de Z soit incluse dans l'intérieur de A. On fixe $f : X \to B$. Alors le morphisme
$$H_*(X \setminus Z, A \setminus Z, M) \to H_*(X, A, M)$$
 induit par l'inclusion est un isomorphisme.

(3) *Mayer-Vietoris*
 Soit $A, A' \subset X$ deux sous-ensemble dont les intérieurs recouvrent X et $f : X \to B$ une application continue. Il existe une famille d'applications naturelles $H_n(X, M) \to H_{n-1}(A \cap A', M)$ formant une suite exacte longue:
$$\cdots \to H_n(A \cap A', M) \to H_n(A, M) \oplus H_n(A', M) \to H_n(X, M) \to H_{n-1}(A \cap A', M) \to \cdots$$

2.3. **Changement de coefficients.** Comme dans le cas des coefficients non-tordus, si on a $f : X \to B$, $\pi = \pi_1(B, b_0)$ et M, N deux $\mathbb{Z}[\pi]$-module, alors tout morphisme $\phi : M \to N$ de $\mathbb{Z}[\pi]$-module induit des morphismes $H_*(X, M) \to H_*(X, N)$ et $H^*(X, M) \to H^*(X, N)$. Un cas particulier est celui où M est muni d'une action supplémentaire d'un anneau A qui commute à celle de π: on dit que M est un $\mathbb{Z}[\pi] - A$-bimodule. Dans ce cas, l'homologie et la cohomologie de X à coefficients tordus dans M hérite d'une structure de A-module. Donnons deux exemples: si M est un k-espace vectoriel, alors $H_*(X, M)$ le sera naturellement aussi. Si on pense à $\mathbb{Z}[\pi]$ comme à un bimodule sur lui-même par multiplication à gauche et à droite, alors $H_*(X, \mathbb{Z}[\pi])$ est naturellement un $\mathbb{Z}[\pi]$-module à droite.

Il est très intéressant de calculer -si possible- $H_*(X, M)$ à partir de $H_*(X, \mathbb{Z}[\pi])$ à la manière des coefficients universels. C'est ce que l'on fera à la section ? à l'aide des suites spectrales.

2.4. **Calcul à l'aide des cellules.** Comme pour le cas de l'homologie standard, cette homologie se calcule explicitement à l'aide d'une décomposition cellulaire. On se donne cette fois un CW-complexe X, une application continue $f : X \to B$ et un $\mathbb{Z}[\pi]$-module M.

Notons $e_i^n : D^n \to X$ la famille des n-cellules de X paramétrée par $i \in I_n$. Un marquage de e_i^n est par définition une classe d'homotopie de chemin γ_i^n reliant b_0 à $f(e_i^n(c_n))$ où c_n désigne cette fois le centre de D^n. On notera $[\gamma_i^n]$ la classe d'homotopie d'un tel chemin relative à ses extrémités puis on définit $C_n^{\mathrm{cell}}(X, B)$ comme le groupe abélien libre engendré par les cellules marquées. On constate qu'il s'agit d'un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre dont on fournit une base en choisissant un marquage pour chaque cellule. La différentielle est définie comme dans le cas cellulaire standard en marquant les composantes du bord de la cellule e_i^n en prolongeant le chemin γ_i^n par un rayon reliant le centre à la composante correspondante du bord.

Proposition 6. *L'homologie du complexe $C_*^{\mathrm{cell}}(X) \otimes_\pi M$ est canoniquement isomorphe à $H_*(X, M)$. De même la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_\pi(C_*^{\mathrm{cell}}(X), M)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(X, M)$.*

Preuve. Pour démontrer ce théorème, on commence par relier le complexe cellulaire à l'homologie singulière tordue. Notons $X^0 \subset X^1 \subset \cdots$ la filtration de X par le squelette et calculons $H_*(X^p, X^{p-1}, \mathbb{Z}[\pi])$. En notant $(e_i^p)_{i \in I_p}$ l'ensemble des p-cellules de X, l'excision nous donne $H_*(X^p, X^{p-1}, \mathbb{Z}[\pi]) = \bigoplus_{i \in I_p} H_*(D^p, \partial D^p, \mathbb{Z}[\pi])$.

On a $H_k(D_p, \partial D_p, \mathbb{Z}[\pi]) = 0$ si $k \neq p$ et sinon, c'est un $\mathbb{Z}$-module libre de base les p-cellules marquées. On en déduit que $H_n(X^n, X^{n-1}, \mathbb{Z}[\pi])$ est canoniquement isomorphe à $C_n^{\mathrm{cell}}(X, B)$.

L'opérateur bord de $C_{n+1}^{\mathrm{cell}}(X, B) \to C_n^{\mathrm{cell}}(X, B)$ est par définition le morphisme de bord de la suite exacte longue associée au triplet de paires

$$(X^n, X^{n-1}) \to (X^{n+1}, X^{n-1}) \to (X^{n+1}, X^n).$$

A partir de là, on remet la preuve à la section 3. On peut aussi le démontrer par récurrence sur le squelette comme dans le cas non tordu. □

En attendant, on en déduit à titre d'illustration les résultats suivants:

Exercice 17. *Supposons que X soit un CW-complexe fini et que M soit un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. Alors les groupes $H_*(X, M)$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie et on a :*

$$\sum_i (-1)^i \dim_k H_i(X, M) = \chi(M) \dim_k M.$$

Exercice 18. *Prenons $X = S^1$ et $B = X$. On a alors $\pi = \mathbb{Z}$ et un $\mathbb{Z}[\pi]$-module est la même chose qu'un groupe abélien M munit d'un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(M)$. Calculer $H_*(S^1, M)$ et $H^*(S^1, M)$.*

2.5. **Obstruction à prolonger une application.** Soit (X, A) une paire de CW-complexes et $f : A \to B$ une application continue. Le but de cette section est de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que f se prolonge à X. On suppose pour cela que A, X et B sont connexes par arcs. On choisit un point base $x_0 \in A$ et on pose $b_0 = f(x_0)$.

2.5.1. *Condition sur le groupe fondamental.* On constate que si f se prolonge à $\tilde{f} : X \to B$, le morphisme $f_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ se factorise par le morphisme d'inclusion $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Proposition 7. *L'application $f : A \to B$ se prolonge au 2-squelette de X, c'est-à-dire en une application $\tilde{f} : A \cup X^2 \to B$ si et seulement si la condition ci-dessus est vérifiée.*

Preuve. On suppose donc qu'il existe un morphisme $\phi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ vérifiant $f_* = \phi \circ i_*$. On choisit dans le 1-squelette $X^1 \setminus A^1$ un sous-complexe T maximal vérifiant les propriétés suivantes: toute composante connexe de T est contractile et son adhérence rencontre A en un seul point. On constate que toute 1-cellule dans le complémentaire de T rencontre A ou T a ses deux extrémités. On prolonge alors f à X^1 de la manière suivante.

Sur toute composante T_0 de T dont l'adhérence rencontre A au point a, on pose $\tilde{f} = f(a)$. Puis pour chaque arête complémentaire e, on choisit un lacet γ dans $\pi_1(X^1, x_0)$ passant une fois par cette arête. On prolonge f à e de manière à ce que $f(\gamma)$ soit homotope à $\phi([\gamma])$.

Considérons maintenant une 2-cellule de $X \setminus A$: la fonction f que l'on a définie sur son bord induit une application $f : S^1 \to B$ qui coincide avec ϕ et donc vaut 0. On peut donc prolonger f à l'intérieur du disque.

En conclusion, la condition nécessaire sur le groupe fondamental suffit à prolonger f jusqu'au 2-squelette. □

2.5.2. *Prolongement au n-squelette.* Prenons $n \geq 2$ et supposons par récurrence que f a été prolongée jusqu'à $A \cup X^n$ et cherchons à la prolonger à $A \cup X^{n+1}$. Pour chaque $(n+1)$-cellule $e_i : D^{n+1} \to X$, on dispose de $f|_{\partial D_{n+1}} : S^n \to B$. Sa classe d'homotopie définit un élément $o_{n+1}(e_i) \in \pi_n(B)$ pourvu que l'on puisse "ramener" cette sphère au point base, ce qui pose un problème technique étant donné qu'on n'a pas encore défini f sur D^{n+1}. Une solution acceptable est de considérer une inclusion $i : B \to B'$ où B' est un $K(\pi, 1)$ avec $\pi = \pi_1(B, b_0)$. Le raisonnement précédent montre que toute application $f : A \cup X^n \to B$ se prolonge comme sur le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] & B' \\ A \cup X^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

L'avantage de cette fausse solution est qu'elle permet de définir sans ambiguïté les groupe $C_*^{\mathrm{cell}}(X, B)$ en remplaçant B par B'. On fera cet abus de notation sans le dire.

Un générateur de $C_{n+1}^{\mathrm{cell}}(X, B')$ est alors un couple $(e_i, [\gamma])$ où γ est un lacet reliant b_0 à $f(c_{n+1})$ dans B'. En prolongeant ce lacet jusqu'au bord de la cellule, on définit un chemin dans B' entre b_0 et $f(e_i(s^0))$. Ce lacet correspond à une unique classe d'homotopie dans B à extrémité fixée, i. e. a un élément de $\pi_n(B, b_0)$ bien défini. De plus, le morphisme $o_{n+1} : C_{n+1}^{\mathrm{cell}}(X, A, B) \to \pi_n(B)$ est bien π-équivariant.

Proposition 8. *Le morphisme o_{n+1} est un cocycle et $o_{n+1} = 0$ comme élément de $C^{n+1}(X, A, \pi_n(B))$ si et seulement si f se prolonge à X^{n+1}.*

Preuve. La deuxième partie du théorème est évidente par construction. Le fait non évident est que o_{n+1} soit un cocycle.

En oubliant le marquage, on peut réinterpréter cette classe de façon plus globale grâce comme la composition suivante:

$$H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xleftarrow{h} \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X_n, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(B, f(x_0)) .$$

Choisissons d'abord un arc γ reliant b_0 à $f(x_0)$. Cela permet d'identifier $\pi_n(B, b_0)$ à $\pi_n(B, f(x_0))$.

Reprenons la construction du morphisme d'Hurewicz: à $g : (D^{n+1}, S^n, s_0) \to (X^{n+1}, X^n, x_0)$ l'application associe $g_*(\alpha_{n+1})$ où α_{n+1} désigne un générateur de $H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$. Mais comme g est muni d'un marquage au point base x_0, en le composant avec f et en le complétant par γ on définit une application dans $H^{n+1}(X^{n+1}, X^n, \mathbb{Z}[\pi])$. Ainsi promue, l'application h vérifie $h(\alpha.x) = f_*(\alpha)x$ pour tout $\alpha \in \pi_1(X^n, x_0)$.

Un autre problème est que h n'est pas un isomorphisme en général: le groupe $\pi_1(X^n) = \pi_1(X)$ agit sur $\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, B)$ d'une façon non triviale. On peut montrer que l'application $h : \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0) \to H_{n+1}(X^{n+1}, X^n, \mathbb{Z}[\pi])$ est un isomorphisme si on tue l'action de $\ker f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ sur $\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0)$.

Considérons maintenant le diagramme suivant:

$$
\begin{tikzcd}
H_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}, \mathbb{Z}[\pi]) \arrow[d, "\partial_1"] & \pi_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}, x_0) \arrow[l, "h_2"'] \arrow[d, "\partial_2"] & & \\
H_{n+1}(X_{n+1}, \mathbb{Z}[\pi]) \arrow[d, "i_1"] & \pi_{n+1}(X_{n+1}, x_0) \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "i_2"] & & \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n, \mathbb{Z}[\pi]) & \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n, x_0) \arrow[l, "h_1"'] \arrow[r, "\partial_3"] & \pi_n(X_n, x_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_n(B, b_0)
\end{tikzcd}
$$

L'application $c \circ \partial$ est la composée de ces applications du terme supérieur gauche à l'inférieur droit. Si on l'évalue sur l'image de h_2, on peut le remplacer la colonne de gauche par celle du milieu. Mais i_2 et ∂_3 sont deux morphismes consécutifs de la suite exacte d'homotopie de la paire (X_{n+1}, X_n). Cela prouve l'assertion. $\square$

Proposition 9. *Soit X un CW-complexe, $n \geq 2$ et $f : X^n \to B$ une application continue. Alors $f|_{X^{n-1}}$ peut être étendue à X^{n+1} si et seulement si $o_{n+1}(f)$ est un cobord, i.e. est nul dans $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $f' : X_{n+1} \to B$ qui coïncide avec f sur X_{n-1}. Pour chaque n-cellule marquée $e_i : D^n \to B$, on dispose de deux applications $f, f' : D^n \to B$ qui coïncident sur leur bord. En identifiant ces deux disques sur leur bord, on obtient une application $S^n \to B$ et le marquage permet de lui associer un élément $\delta(f, f') \in \pi_n(B)$. On constate qu'on a $o_{n+1}(f) = o_{n+1}(f') + \delta(f, f') \circ \partial$: or $o_{n+1}(f')$ est identiquement nul puisque f' se prolonge à X_{n+1}. On en déduit que $[o_{n+1}(f)] = 0$. Réciproquement, il suffit de renverser la machine: si $o_{n+1}(f) = \delta \circ \partial$, on modifie f sur chaque cellule $e_i : D^n \to B$ de sorte que la différence $\delta(f, f')$ soit précisément égale à δ. On aura alors $o_{n+1}(f') = 0$ et le tour est joué. $\square$

Corollaire 3. *Soit X et Y deux CW-complexes connexes par arcs vérifiant $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ et $\pi_k(X) = \pi_k(Y) = 0$ pour tout $k > 1$. Alors X et Y sont homotopiquement équivalents.*

Preuve. Soit x_0 un point base de X, y_0 un point base de Y et $\phi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ l'isomorphisme de l'hypothèse. On peut comme expliqué ci-dessus construire $f : X^2 \to Y$ vérifiant $f_* = \phi$. Comme $[o_3(f)] \in H^3(X, \pi_2(Y)) = 0$, on peut modifier f sur $X^2 \setminus X^1$ pour la prolonger à X^3. Ceci fonctionne indéfiniment et permet donc de définir $f : X \to Y$ avec $f_* = \phi$ et $f(x_0) = y_0$. On construit de même $g : Y \to X$ vérifiant $g_* = \phi^{-1}$. Considérons maintenant $g \circ f : X \to X$. On définit $H : A = X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1] \to X$ par $H(x, 0) = x, H(x, 1) = g(f(x))$ et $H(x_0, t) = x_0$. Prolonger H à $X \times [0, 1]$ revient à montrer que $g \circ f$ est homotope à l'identité. Mais le même argument revient: il suffit de s'assurer que l'application $H_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ se factorise par $\pi_1(X \times [0, 1])$ mais on a fait tout ce qu'il fallait pour. $\square$

Exercice 19. *Soit $n > 1$. Montrer que deux CW complexes X et Y connexes par arcs vérifiant $\pi_n(X) = \pi_n(Y) = G$ et $\pi_k(X) = \pi_k(Y) = 0$ pour $k > 0$ et $k \neq n$ sont homotopiquement équivalents. On note $K(\mathbb{Z}, n)$ le type d'homotopie de X et Y.*

Exercice 20 (Théorème de Whitehead)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux CW-complexes connexes par arcs telle que $f_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme pour tout $k > 0$. Alors f est une équivalence d'homotopie.*

Corollaire 4. *Soit Y un $K(\mathbb{Z}, n)$ avec point base y_0 et ω_n le générateur de $H^n(Y, \mathbb{Z})$. Pour tout CW-complexe X connexe par arcs et point base x_0 on note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées $(X, x_0) \to (Y, y_0)$. Alors l'application $\Phi : [X, Y] \to H^n(X, \mathbb{Z})$ qui à $[f]$ associe $f^*\omega_n$ est un isomorphisme.*

Preuve. On a remarqué précédemment que si Y est un $K(\mathbb{Z}, n)$, alors ΩY est un $K(\mathbb{Z}, n-1)$: on peut donc supposer que $Y = \Omega Z$. Cela nous permet de munir Y d'une opération $m : Y \times Y \to Y$ (la concaténation des chemins) qui induit une structure de groupe à homotopie près. Ainsi on peut munir $[X, Y]$ d'une structure de groupe et l'application $[f] \mapsto f^*\omega_n$ est un morphisme de groupe (pour le vérifier, il suffit de constater que $m_* : \pi_n(Y) \times \pi_n(Y) \to \pi_n(Y)$ est la somme).

Montrons que Φ est surjective. Donnons nous une classe $\omega \in H^n(X, \mathbb{Z})$: on la représente par un cocycle $\omega : C_n^{\mathrm{cell}}(X) \to \mathbb{Z}$. On veut lui associer une application $f : X \to Y$ vérifiant $f^*\omega_n = \omega$. On commence par envoyer le $(n-1)$-squelette de X dans le point base y_0. Pour chaque n-cellule $e_i : D^n \to F$, f envoie le bord S^{n-1} au point base de Y. Comme d'après Hurewicz on a $\pi_n(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on définit f sur chaque n-cellule de sorte que $f \circ e_i$ représente $\phi(e_i)$. La condition de cocycle est là pour nous assurer que cette application se prolonge à X^{n+1}. Pour la suite, on observe que l'obstruction à prolonger à X^{n+2} sans toucher X^n est une classe dans $H^{n+2}(X, \pi_{n+1}(Y)) = 0$. On peut donc prolonger et ainsi de suite jusqu'à définir $f : X \to Y$.

Montrons que Φ est injective: on se donne $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ telle que $f^*\omega_n = 0$. On veut prouver que f est homotope à 0. Pour cela on considère le cône CX et on définit $H : A = \{x_0\} \times [0,1] \cup X \times \{1\} \to Y$ par $H(x_0, t) = y_0$ et $H(x, 1) = f(x)$. Si on prolonge H à CX, on a notre homotopie. Les obstructions successives vivent dans $H^{k+1}(CX, A, \pi_k(Y))$: la seule qui ne soit pas triviale est pour $k = n$: calculons $H^{n+1}(CX, A, \mathbb{Z})$ en considérant la suite exacte du triplet (Cx_0, A, CX). Comme $H^*(CX, Cx_0, \mathbb{Z}) = 0$ on a $H^{n+1}(CX, A, \mathbb{Z}) = H^n(A, Cx_0) = H^n(X, x_0)$. Il suffit de se convaincre que l'obstruction est précisément $f^*\omega_n$ pour conclure que H se prolonge. □

Exercice 21. *Enlever la condition de point base dans le corollaire précédent.*

Exercice 22. *Soit $\gamma : S^1 \to S^3$ un plongement différentiable d'image K.*

(1) *Montrer qu'on peut prolonger γ en un plongement $\tilde{\gamma} : S^1 \times D^2 \to S^3$ de sorte que $\gamma(S^1 \times 1)$ soit homologue à 0 dans $S^3 \setminus K$.*

(2) *Montrer qu'on peut prolonger l'application* $p_2 : S^1 \times \partial D^2 \to S^1$ *à* $S^3 \setminus \operatorname{im} \tilde{\gamma}$.
(3) *En déduire qu'il existe une surface* S *plongée dans* S^3 *de bord* K.

Exercice 23. *Montrer que pour toute variété différentiable compacte orientable de dimension 4* M*, toute classe* $x \in H_k(M, \mathbb{Z})$ *est représentée par une sous-variété orientable* $i : N \to M$ *au sens ou* $i_*[N] = x$*. On montrera qu'il y a un isomorphisme* $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq [M, \mathbb{P}^2(\mathbb{C})]$.

2.6. **Obstruction à relever une application.** Soit $p : E \to B$ une fibration avec E et B et F connexes par arcs. Notre problème est maintenant le suivant: soit (X, A) une paire de CW-complexes, $f : X \to B$ une application et $s : A \to E$ une section de $f|_A$. Peut-on prolonger la section s à X?

Ce problème va se régler de façon très similaire au précédent mais cette fois, l'obstruction prendra ses valeurs dans un groupe de cohomologie $H^*(X, A, \pi_n(F))$ où F désigne la "fibre" de p.

Il faut donc comprendre en quel sens $\pi_n(F)$ forme un système de coefficients tordus sur B. Comme observation préliminaire, prenons un chemin $\gamma : [0, 1] \to B$ et tirons en arrière la fibration E: on a toujours une fibration de Serre. Choisissons un relevé $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to E$ de γ, ce relevé fournit un isomorphisme $\pi_k(\gamma^* E, \tilde{\gamma}(0)) \simeq \pi_k(\gamma^* E, \tilde{\gamma}(1))$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie de $\tilde{\gamma}$ relativement au bord. Or comme la base de ce fibré est contractile, on a l'isomorphisme $\pi_k(F_{\gamma(0)}, \tilde{\gamma}(0)) \simeq \pi_k(\gamma^* E, \tilde{\gamma}(0))$ ce qui nous donne un isomorphisme

$$\pi_k(F_{\gamma(0)}, \tilde{\gamma}(0)) \simeq \pi_k(F_{\gamma(1)}, \tilde{\gamma}(1)).$$

En d'autres termes, $\pi_k(F)$ est un $\mathbb{Z}[\pi_1(E, x_0)]$-module. Si $\pi_1(F)$ agit trivialement sur $\pi_k(F)$, il s'agit même d'un $\mathbb{Z}[\pi_1(B, b_0)]$-module. On dit que la fibration est simple.

On procède maintenant comme suit: étendons arbitrairement s aux 0-cellules de X qui ne sont pas des 0-cellules de A. Considérons une 1-cellule, $e : [0, 1] \to B$ de sorte qu'elle a été relevée sur son bord. Par la propriété de fibration, e se relève à F avec une extrémité prescrite: l'autre extrémité est un élément de $F_{e(1)}$ qui est connexe par arcs: on peut donc bien relever e à F en prescrivant les valeurs au bord.

Prenons maintenant une 2-cellule $e : D^2 \to X$ qui ne soit pas une 2-cellule de A et un point base $x_0 = e(s_0) \in e(S^1)$. Considérons le fibré $e^* E \to D^2$. Comme on a un isomorphisme $\pi_1(F_{e(x_0)}, s(x_0)) \simeq \pi_1(E, s(x_0))$ l'application $s : (S^1, s_0) \to (E, s(x_0))$ définit un élément de $\pi_1(F_{e(x_0)}, s(x_0))$: on la note $o_2(e)$. Par construction $o_2(e) = 0$ si et seulement si on a pu relever s à la 2-cellule e.

Maintenant, un élément de $C_2^{\mathrm{cell}}(X, A, E)$ est bien la donnée d'une 2-cellule $e : D^2 \to X$ munie d'un chemin reliant le point base e_0 de E à un point de $e(D^2)$. La construction ci-dessus permet de remplacer le point base $s(x_0)$ choisi ci-dessus de façon ad hoc par le marquage. La construction de o_2 définit bien un morphisme $\pi_1(E, e_0)$-équivariant de $C_2^{\mathrm{cell}}(X, A, E)$ dans $\pi_1(F, e_0)$.

Théorème 4. *Soit $f : X \to B$ une application qu'on a relevée en $s : A \cup X^n \to E$. Il existe alors $o_{n+1} : \hom_\pi(C^{\mathrm{cell}}_{n+1}(X,B), \pi_n(F))$ telle que*

(1) *s se prolonge à X^{n+1} si et seulement si $o_{n+1} = 0$.*
(2) *o_{n+1} est un cocycle.*
(3) *o_{n+1} est un cobord si et seulement si on peut modifier s sur le n-squelette de $X \setminus A$ de sorte à ce qu'elle se prolonge à X^{n+1}.*

Preuve. Il s'agit de reprendre la preuve de l'obstruction à l'extension, on ne fait donc pas les détails ici. □

Regardons plutôt l'exemple des fibrés en sphères. Si $p : E \to B$ est un fibré en S^{n-1} ($n \geq 2$). Comme le groupe fondamental de la fibre n'agit pas sur ses groupes d'homotopie supérieurs, la fibration est simple et on peut voir $\pi_{n-1}(F)$ comme un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module. Comme par Hurewicz, $\pi_{n-1}(F) \simeq H_{n-1}(F)$, on constate que ce module est trivial si et seulement si le fibré est orientable.

Dans tous les cas, l'obstruction à posséder une section est un élément noté $\mathrm{eu}(E) \in H^n(B, \pi_{n-1}(F))$ et on l'appelle classe d'Euler.

Exercice 24. *Si M est une variété orientable et E est son fibré tangent en sphères, on a $\mathrm{eu}(M) = \chi(M)[M] \in H^n(M, \mathbb{Z})$. Le montrer dans le cas d'une surface.*

Exercice 25. *Soit M une variété de dimension 3 compacte et orientable. Montrer que l'obstruction à paralléliser son fibré tangent est une classe $w_2 \in H^2(M, \mathbb{Z}/2)$.*

Exercice 26. *Montrer que tout SU_n-fibré principal ($n \geq 2$) sur une variété M de dimension $k \leq 4$ est trivial.*

3. Suites spectrales

Le but d'une suite spectrale est de généraliser le fait suivant: soit C_* un complexe muni d'un sous-complexe A_* (typiquement le complexe singulier d'une paire d'espace). On peut alors décrire l'homologie de C_* à l'aide de l'homologie de A_* et de celle du quotient C_*/A_*. En effet la suite exacte longue de la paire donne

$$H_{n+1}(C_*/A_*) \to H_n(A) \to H_n(C_*) \to H_n(C_*/A_*) \to H_{n-1}(A_*).$$

Ainsi, si on connaît $\partial_n : H_n(C_*/A_*) \to H_{n-1}(A_*)$ on a une extension

$$0 \to \operatorname{coker} \partial_{n+1} \to H_n(C_*) \to \ker \partial_n \to 0$$

qui permet de déterminer $H_n(C_*)$ modulo le problème de l'extension. Il se trouve qu'au prix d'efforts importants, on peut généraliser cette procédure au cas d'un complexe filtré et espérer calculer l'homologie du complexe total à partir de l'homologie de ses quotients consécutifs (gradués). C'est ce qu'on explique tout de suite.

3.1. **Des complexes filtrés aux suites spectrales.** On se donne un complexe de groupes abéliens $C_0 \stackrel{\partial}{\leftarrow} C_1 \stackrel{\partial}{\leftarrow} \cdots$ et une filtration croissante $F_pC_i \subset F_{p+1}C_i \subset \cdots \subset C_i$ compatible avec la différentielle au sens où $\partial F_pC_i \subset F_pC_{i-1}$. On note $G_pC_i = F_pC_i/F_{p-1}C_i$ le p-ième gradué du groupe C_i.

On observe que la filtration induit aussi une filtration sur l'homologie de C_*: précisément $F_pH_qC_* = \{\alpha \in H_qC_*, \exists x \in F_pC_q, \partial x = 0 \text{ et } \alpha = [x]\}$.

On note $E^0_{p,q} = G_pC_{p+q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$: par hypothèse, la différentielle induit une application $\partial_0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$.

En notant $E^1_{p,q}$ son homologie, on a $E^1_{p,q} = H_{p+q}(G_pC_*)$.

On définit $\partial_1 : E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$ de la façon suivante: $\alpha \in E^1_{p,q}$ est représentée par $x \in F_pC_{p+q}$ tel que $\partial x \in F_{p-1}C_{p+q-1}$. On pose alors $\partial_1(\alpha) = [\partial x]$: il est facile de vérifier que ∂_1 est bien défini et vérifie $\partial_1^2 = 0$.

On peut aussi voir qu'il s'agit du morphisme de connexion dans le triplet $(F_{p-2}C_*, F_{p-1}C_*, F_pC_*)$.

Plutôt que de continuer à la main, définissons directement pour $r \in \mathbb{N}$:

$$E^r_{p,q} = \{x \in F_pC_{p+q} | \partial x \in F_{p-r}C_{p+q-1}\}/F_{p-1}C_{p+q} + \partial(F_{p+r-1}C_{p+q+1})$$

Sans l'écrire, on quotiente le numérateur par l'intersection du numérateur et du dénominateur.

Lemme 5. (1) *La différentielle induit un morphisme* $\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ *vérifiant* $\partial_r^2 = 0$.

(2) E^{r+1} *est l'homologie du complexe* (E^r, ∂_r), *c'est-à-dire que*

$$E^{r+1}_{p,q} = \ker(\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1})/\operatorname{im}(\partial_r : E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q})$$

(3) *Si pour tout* i, *la filtration est bornée (c'est-à-dire que* $F_pC_i = 0$ *pour* p *assez petit et* $F_pC_i = C_i$ *pour* p *assez grand) alors pour tous* p, q *il existe* r_0 *tel que pour tout* $r \geq r_0$ *on a*

$$E^r_{p,q} = G_pH_{p+q}(C_*)$$

Preuve. Pour r assez grand on a $F_{p-r}C_{p+q-1} = 0$ et $F_{p+r-1}C_{p+q+1} = C_{p+q+1}$: la dernière propriété s'en suit immédiatement. Le reste est une vérification formelle d'algèbre linéaire. □

3.1.1. *Le cas d'un sous-complexe.* Détricotons ce qui s'est passé dans le cas où $F_0C_q = A_q$ et $F_1C_q = C_q$: dans ce cas la filtration se réduit à un sous-complexe $A_* = F_0C_*$ de C_*. Notons B_* le complexe quotient C_*/A_*.

On a alors $E^0_{0,q} = G_0C_q = A_q$ et $E^0_{1,q} = G_1(C_*/A_*)_{q+1} = B_{q+1}$ voir le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "\partial_0"] & B_2 \arrow[d, "\partial_0"] \\
A_0 \arrow[d, "\partial_0"] & B_1 \arrow[d, "\partial_0"] \\
0 & B_0
\end{tikzcd}$$

puis $E^1_{0,q} = H_q(A_*)$ et $E^1_{1,q} = H_{q+1}(B_*)$.

La différentielle $\partial_1 : H_{q+1}(B*) \to H_q(A_*)$ n'est autre que l'opérateur bord de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte $0 \to A_* \to C_* \to B_* \to 0$.

$$\begin{tikzcd}
H_1(A_*) & H_2(B_*) \arrow[l, "\partial_1"'] \\
H_0(A_*) & H_1(B_*) \arrow[l, "\partial_1"'] \\
0 & H_0(B_*) \arrow[l, "\partial_1"']
\end{tikzcd}$$

On a ensuite $E^2_{0,q} = \operatorname{coker} H_{q+1}(B_*) \to H_{q+1}(A_*)$ et $E^2_{1,q} = \ker H_{q+1}(B_*) \to H_q(A_*)$. A partir de là, les différentielles ∂_r sont nécessairement nulles et on a $E^r_{p,q} = E^2_{p,q}$ pour tout $r \geq 2$. On dit que la suite spectrale dégénère à la deuxième page. On retrouve la même information que la suite exacte longue.

Voyons tout de suite une application.

Corollaire 5. *Soit X un CW complexe. Alors $H_*(X, \mathbb{Z}) = H_*(C^{\mathrm{cell}}_*(X, \mathbb{Z}))$.*

Preuve. En notant $X^0 \subset X^1 \subset \cdots$ le squelette de X on a une filtration $F_pC_*(X) = C_*(X_p$. On calcule $E^0_{p,q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} = C_{p+q}(X_p, X_{p-1})$. La différentielle ∂_0 n'est rien d'autre que la différentielle du complexe relatif ainsi $E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ ce groupe est donc nul si $p + q \neq p$ et sinon vérifie $E^1_{p,0} = C^{\mathrm{cell}}_p(X_p, X_{p-1})$. La différentielle $\partial_1 : E^1_{p,0} \to E^1_{p-1,0}$ est à la fois le morphisme de connexion du triplet (X_{p-2}, X_{p-1}, X_p) et la différentielle du complexe cellulaire. On a donc $E^2_{p,0} = H^{\mathrm{cell}}_p(X)$. La différentielle ∂_2 est nulle ainsi que toutes les suivantes: le résultat s'en suit. $\square$

3.1.2. *Le cas d'un complexe double.* Dans beaucoup de situations apparaît un double complexe, c'est-à-dire une suite de groupes abéliens $C_{p,q}$ avec $p, q \geq 0$ et deux différentielles $\partial' : C_{p,q} \to C_{p-1,q}$ et $\partial'' : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$ vérifiant $\partial'^2 = \partial''^2 = \partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$.

On définit le complexe total C_* par $C_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$ et $\partial = \partial' + \partial''$. On dispose d'une première filtration $'F_pC_n = \bigoplus_{k+l=n, k\leq p} C_{k,l}$ et $''F_pC_n = \bigoplus_{k+l=n, l\leq p} C_{k,l}$.

On calcule que ${}'E^0_{p,q} = C_{p,q}$ tandis que ${}''E^0_{p,q} = C_{q,p}$. Ensuite ${}'E^1_{p,q} = H_q(C_{p,*}, \partial'')$ et ${}''E^1_{p,q} = H_p(C_{*,q}, \partial')$.

Finalement ${}'E^2_{p,q} = H_p(H_q(C_{p,*}, \partial''), \partial')$ et ${}''E^2_{p,q} = H_q(H_p(C_{*,q}, \partial'), \partial'')$. Observons bien que si ces deux suites spectrales convergent, c'est vers le même groupe $H_*(C_*)$ mais pour deux filtrations différentes.

Donnons un exemple. Soit M un groupe abélien. On peut toujours trouver une surjection $P_0 \to M$ où P_0 est un groupe abélien libre. De plus, le noyau de cette surjection est un autre groupe abélien libre P_1 de sorte qu'on a une suite exacte $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. Posons $P_i = 0$ si $i \notin \{0, 1\}$.

Si X est un espace topologique, on peut former le double complexe $C_{p,q} = C_p(X) \otimes P_i$ avec les différentielles naturelles. Comme $C_p(X)$ est un module libre on a ${}'E^1_{p,q} = C_p(X) \otimes M$ si $q = 0$ et 0 sinon. Il vérifie donc ${}'E^2_{p,0} = H_p(X, M)$.

De l'autre côté, on a ${}''E^1_{q,p} = H_q(X) \otimes P_q$: presque par définition, cela nous donne ${}''E^2_{0,q} = H_q(X) \otimes M$ et ${}''E^2_{1,q} = \mathrm{Tor}(H_q(X), M)$. Les différentielles supérieures sont nécéssairement nulles: ainsi on retrouve bien la suite exacte des coefficients universels:

$$0 \to H_p(X) \otimes M \to H_p(X, M) \to \mathrm{Tor}(H_{p-1}(X), M) \to 0.$$

Nous aurons besoin de la généralisation suivante: soit C_* un complexe de A-modules libres à gauche (penser à $A = \mathbb{Z}[\pi]$) et M un A-module à gauche. Comment calculer la cohomologie du complexe $C_* \otimes_A M$? La procédure est exactement la même, on se donne une résolution libre $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M$. La difficulté est bien sûr que cette fois, elle n'est plus de taille 2, ni même finie.

On en déduit un double complexe $C_{p,q} = C_p \otimes P_q$ qui vérifie toujours ${}'E^2_{p,0} = H_p(C_* \otimes_A M)$. De l'autre côté, comme les P_i sont libres on a ${}''E^1_{p,q} = H_q(C_*) \otimes P_p$. On a, par définition, ${}''E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^A_p(H_q(C_*), M)$.

On ne peut guère aller plus loin en général sauf si on a des informations supplémentaires, comme dans le lemme suivant.

Lemme 6. *Si C_* est un complexe de A-modules à gauche libre dont l'homologie est libre, on a un isomorphisme naturel*

$$H_p(C_*) \otimes_A M \to H_p(C_* \otimes_A M).$$

On peut enfin prouver que l'homologie tordue se calcule bien comme annoncé à l'aide de l'homologie cellulaire tordue. Soit X un CW-complexe, $f : X \to B$ une application et M un $\mathbb{Z}[\pi]$-module avec $\pi = \pi_1(B, b_0)$. En notant $X^0 \subset X^1 \subset \cdots$ le squelette de X on définit des sous-modules $C_*(X^p, B)$ de $C_*(X, B)$ qui sont des $\mathbb{Z}[\pi]$-modules libres, ainsi que leurs quotients successifs. En posant $C_p = C_p(X, B) \otimes_\pi M$, on obtient donc une filtration $F_pC_q = C_q(X^p, B) \otimes_\pi M$ dont on étudie la suite spectrale associée. On a $E^0_{p,q} = C_{p+q}(X^p, X^{p-1}, B) \otimes_\pi M$. Comme le complexe $C_*(X^p, X^{p-1}, B)$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre, et que son homologie l'est aussi, le lemme ci-dessus établit

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1}, B) \otimes_\pi M = H_p(X^p, X^{p-1}, B) \otimes M \text{ si } q = 0.$$

La différentielle ∂_1 s'identifie à la différentielle du complexe $C_*^{\mathrm{cell}}(X,B) \otimes_\pi M$ et le résultat s'en suit.

Exercice 27. *Soit A_* et B_* deux complexes de k-espaces vectoriels (en degrés positifs). Montrer qu'on a un isomorphisme:*

$$H_n(A_* \otimes B_*) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(A_*) \otimes H_q(B_*).$$

3.2. **La suite spectrale de Leray-Serre.** Soit $\pi : X \to B$ une fibration au dessus d'une base connexe par arcs de point base x_0. Notons $F = p^{-1}(b_0)$ qu'on suppose aussi connexe par arcs.

On rappelle que cela signifie que le groupe fondamental de X agit sur les groupes d'homotopie de F. Si $p : X \to B$ est un fibré, c'est facile à comprendre: en prenant $\gamma : [0,1] \to B$ un lacet basé en b_0, on obtient en tirant en arrière un fibré trivial $\gamma^* X \to [0,1]$. Cela signifie un homéomorphisme $\Phi : F \times [0,1] \to \gamma^* E$ commutant avec la projection. En le restreignant à $F \times \{0,1\}$ on obtient deux homéomorphismes h_0 et h_1. On pose $\phi_f = h_1 \circ h_0^{-1}$. En tirant en arrière une homotopie reliant γ_0 et γ_1, on constate qu'un tel homéomorphisme est bien défini à homotopie près, en particulier l'action qu'il définit sur l'homologie de la fibre est bien définie. En conclusion, $H_*(F)$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module.

Exercice 28. *Montrer que dans le cas d'une fibration de Serre, on peut encore munir $H_*(F)$ d'une telle structure.*

Indication: choisir un lacet $\gamma : [0,1] \to B$ basé en x_0 puis relever à $\gamma^* F$ tous les simplexes au-dessus de 0 en des prismes au-dessus de $[0,1]$ de façon compatible avec les faces. En déduire un morphisme de chaîne de la fibre en 0 vers la fibre en 1. Relever ensuite les homotopies pour comparer deux morphismes associés à des lacets homotopes.

On note $B^0 \subset B^1 \subset \cdots$ le squelette de B et on filtre le complexe singulier de X par les préimages $X^p = p^{-1}(B^p)$ de ce squelette. En formule $F_p C_*(X) = C_*(X^p)$.

On a donc $E^0_{p,q} = C_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ et $E^1_{p,q} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$.

Théorème 5. *On a un isomorphisme naturel $E^2_{p,q} \stackrel{\Phi}{\to} H_p(B, H_q(F))$ où $H_q(F)$ désigne l'homologie de la fibre au-dessus de b_0, vu comme un $\mathbb{Z}[\pi]$-module.*

Preuve. On se contente de démontrer ce résultat dans le cas facile où X est un fibré. Notons $e_i : D^p \to B$ la famille des p-cellules de B. En notant D'^p un disque fermé inclus dans l'intérieur de D^p, on a par excision $E^1_{p,q} = \bigoplus_{i \in I_p} H_{p+q}(p^{-1}(D'^p), p^{-1}(\partial D'^p))$. Le fibré X est trivial sur D'^p. En choisissant un point y_i au centre de $e_i(D'^p)$, on obtient que chaque terme de cette somme vaut $H_{p+q}(D'^p \times F_{y_i}, \partial D'^p \times F_{y_i})$. Calculons ce groupe à l'aide de la formule de Künneth. Comme $H_k(D'^p, \partial D'^p) = \mathbb{Z}$ si $k = p$, 0 sinon donne $H_q(F_{y_i})$, on obtient

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{i \in I_p} H_q(F_{y_i}).$$

En ramenant chaque y_i au point base, on obtient un isomorphisme $H_q(F_{y_i}) \simeq F$ qui est π-équivariant. En d'autres termes, on a bien $E^1_{p,q} = C^{\mathrm{cell}}_p(B, B) \otimes_\pi H_q(F)$. Le morphisme de bord est bien sûr dans cette identification obtenu comme la tensorisation par $H_q(F)$ du morphisme $\partial : C^{\mathrm{cell}}_p(B, B) \to C^{\mathrm{cell}}_{p-1}(B, B)$. On en déduit bien le résultat. $\square$

Exercice 29. *Calculer $H_*(SU_3)$ et $H_*(SU_4)$.*

Soit $S^{n-1} = F \to X \to B$ un fibré en sphères orientable. Cela signifie que $H_{n-1}(F)$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module trivial: dans ce cas, le terme E^2 de la suite spectrale de Serre est $E^2_{p,q} = H_p(B, H^q(S^{n-1})) = H_p(B, \mathbb{Z})$ si $q = 0, n-1$ et 0 sinon. La seule différentielle susceptible d'être non nulle est $\partial_n : E^n_{k,0} \to E^n_{k-n,n-1}$ qui s'écrit plus simplement $\partial_n : H_k(B) \to H_{k-n}(B)$. On verra en observant la suite exacte de Serre cohomologique qu'il s'agit du cap produit avec la classe d'Euler du fibré!

En analysant ce qui reste dans $E^{n+1}_{p,q}$ avec $p + q = k$ on trouve la suite exacte

$$H_{n+k}(B) \to H_k(B) \to H_k(X) \to H_k(B) \to H_{k-n}(B).$$

Ainsi on peut déterminer (modulo les extensions) l'homologie de X connaissant celle de B et la classe d'Euler du fibré.

Si $p : X \to B$ est seulement une fibration, plus un fibré, le résultat reste tout de même correct. Serre l'a déduit dans sa thèse d'une version cubique de l'homologie singulière filtrée d'une certaine façon. On donne ici la version due à Dress.

On appelle (p, q)-simplexe une application $\sigma : \Delta_p \times \Delta_q \to X$ qui se factorise par la projection

$$\begin{tikzcd} \Delta_p \times \Delta_q \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta_p \arrow[r, dashed] & B \end{tikzcd}$$

On note $C_{p,q}$ le groupe abélien libre engendré par les (p, q)-simplexes que l'on munit d'une structure de double complexe de la façon suivante:

$$\partial'\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ (\delta_i \times 1), \quad \partial''\sigma = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+j} \sigma \circ (1 \times \delta_j)$$

On peut alors montrer que $H_q(H_p(C_{*,*})) = H_p(X)$ si $q = 0$, 0 sinon et $H_p(H_q(C_{*,*})) = H_p(B, H_q(F))$ comme dans la suite spectrale de Serre.

3.3. **Transgression.** La différentielle $\partial_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1}$ a un statut particulier: elle est souvent la première à intervenir dans le calcul de la suite spectrale et d'autre part, elle a une interprétation topologique raisonnable, similaire à l'application bord de la suite exacte longue d'homotopie. Elle reçoit le nom de transgression: sa non-trivialité témoigne de la non-trivialité du fibré.

Dans le cas d'un fibré général $F \to E \to B$ avec fibre et base connexes par arcs, on dispose du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & H_n(X,F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p_*"'] & H_{n-1}(F) \\ H_n(B) \arrow[r, "j_*"] & H_n(B,b_0) & \end{tikzcd}$$

Pour définir un morphisme de $H_n(B)$ vers $H_{n-1}(F)$ qui ressemble au morphisme $\partial : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$, on est obligés de faire quelques concessions: le morphisme n'est défini que sur $j_*^{-1}(\operatorname{im} p_*)$ et prend ses valeurs dans le quotient $H_{n-1}(F)/\partial \ker p_*$.

Proposition 10. *Le morphisme de transgression*

$$\tau : H_n(B) \supset j_*^{-1}(\operatorname{im} p_*) \to H_{n-1}(F)/\partial \ker p_*$$

est précisément le même que la différentielle $\partial_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1}$.

Comme corollaire immédiat, on tire que si le fibré $p : X \to B$ admet une section, alors $\tau = 0$. En effet, on a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} H_n(X,F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, bend right, "p_*"'] & H_{n-1}(F) \\ H_n(B,b_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, bend right, "s_*"'] & H_{n-1}(b_0) \arrow[u, "s_*"'] \end{tikzcd}$$

Preuve. On peut supposer que B ne contient qu'une 0-cellule, b_0 de sorte qu'on a $X^0 = F$. Rappelons que $E^n_{n,0}$ est par construction l'intersection des noyaux des morphismes $\partial_2, \ldots, \partial_{n-1}$: c'est donc un sous-module de $E^2_{n,0} = H_n(B, H_0(F)) = H_n(B)$. Comme les différentielles $\partial_{n+1}, \ldots$ sont nulles sur cette case, on en déduit que $\ker \partial_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1}$ est égal à $E^\infty_{n,0}$, c'est-à-dire à $H_n(X)/H_n(X^{n-1})$.

De l'autre côté, $E^n_{0,n-1}$ est le quotient de $E^2_{0,n-1}$ par l'image des mêmes différentielles à valeurs dans $H_0(B, H_{n-1}(F))$. Comme $H_0(B, H_{n-1}(F))$ est un quotient de $H_{n-1}(F)$, on en déduit que $E^n_{0,n-1}$ est un quotient de $H_{n-1}(F)$, ce qui l'énoncé plausible. De plus, comme ci-dessus, les différentielles $\partial_{n+1}, \ldots,$ qui arrivent sur cette case sont triviales, donc $\operatorname{coker} \partial_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1} = E^\infty_{0,n-1}$ qui n'est autre que l'image de $H_{n-1}(F)$ dans $H_{n-1}(X)$.

En d'autres termes, on a le diagramme exact suivant

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X^n) \arrow[d] & & & H_{n-1}(X,F) & \\
 & H_n(X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & H_n(B) & H_{n-1}(F) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(X) \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{n,0} \arrow[r] & E^n_{n,0} \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[u] & E^n_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & E^\infty_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Rappelons aussi que par définition, on a

$$E^n_{n,0} = \{x \in C_n(X^n), \partial x \in C_{n-1}(X^0)\}/C_n(X^{n-1}) + \partial C_{n+1}(X^{2n-1}).$$

Cela nous donne un morphisme $\alpha : H_n(X^n, F) \to E^n_{n,0}$ qui est surjectif.

On a de même

$$E^n_{0,n-1} = \{x \in C_{n-1}(X^0), \partial x = 0\}/\partial C_n(X^{n-1})$$

qui nous donne un morphisme naturel $\beta : H_{n-1}(F) \to E^n_{0,n-1}$. Son noyau est l'image du morphisme $H_n(X^{n-1}, F) \to H_{n-1}(F)$. On complète alors le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X^n) \arrow[d] \arrow[drr] & & & H_n(X^{n-1},F) \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl] & H_{n-1}(X,F) & \\
 & H_n(X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & H_n(B) & H_n(X^n,F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "\alpha"] & H_{n-1}(F) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(X) \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{n,0} \arrow[r] & E^n_{n,0} \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[u] & & E^n_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & E^\infty_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & & 0 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Il y a dans ce diagramme plus d'information que nécessaire pour terminer la preuve!

□

Voyons une application à un théorème de Freudenthal sur la stabilité des groupes d'homotopie par suspension. En notant ΣX la suspension réduite, à savoir $\Sigma X = X \times [0,1]/A$ avec $A = X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times [0,1] \cup X \times \{1\}$, on a une application tautologique $f : X \to \Omega\Sigma X$ qui induit un morphisme dit de suspension $f_* : \pi_k(X) \to \pi_k \Omega\Sigma X = \pi_{k+1}\Sigma X$. Comme $\Sigma S^{n-1} = S^n$, cela nous permet de comparer certains groupes d'homotopie de sphères entre eux.

Théorème 6. *Le morphisme $\pi_k S^{n-1} \to \pi_{k+1} S^n$ ainsi défini est un isomorphisme si $k \leq 2n-4$, surjectif si $k = 2n-3$.*

Preuve. En considérant le cyclindre Cf de l'application $f : S^{n-1} \to \Omega S^n$, on se ramène à montrer que (Cf, S^{n-1}) est $(2n-3)$-connexe. Par Hurewicz, cela revient à prouver que $H_k(Cf, S^{n-1}) = 0$ si $k \leq 2n-3$, puis finalement à prouver le même résultat que le théorème en remplaçant π_k par H_k.

On a un isomorphisme (de suspension) en homologie $H_{k-1}S^{n-1} \to H_k S^n$ qui composé avec f_* donne un morphisme $H_k(S^n) \to H_{k-1}(\Omega S^n)$ qui ne peut être non nul que pour $k = n$. Si on prouve que le morphisme $\phi_n : H_n(S^n) \to H_{n-1}(\Omega S^n)$ est un isomorphisme et que $H_k(\Omega S^n)$ est nul pour $n \leq k \leq 2n-3$ alors on aura prouvé le théorème.

Considérons la suite spectrale de Serre du fibré $\Omega S^n \to PS^n \to S^n$ avec $n \geq 2$. Comme $\pi_1(S^n)$ est trivial, sa deuxième page est donnée par

$$E^2_{p,q} = H_p(S^n, H_q(\Omega S^n)) = H_p(S^n) \otimes H_q(\Omega S^n)$$

à savoir $E^2_{0,q} = E^2_{n,q} = H_q(\Omega S^n)$ et les autres groupes sont nuls. La seule différentielle pouvant être non nulle est ∂_n , et comme PS^n est contractile, on en déduit d'une part que $H_q(\Omega S^n) = 0$ pour $0 < q < n-1$ et d'autre part que $\partial_n : H_k(\Omega S^n) \to H_{k+n-1}(\Omega S^n)$ est un isomorphisme pour tout $k \geq 0$.

Cela montre que $H_k(\Omega S^n) = \mathbb{Z}$ si $n-1$ divise k et 0 sinon, ce qui prouve la deuxième partie du théorème.

Pour la première, on se rappelle que $\partial_n : H_0(\Omega S^n) \to H_{n-1}(\Omega S^n)$ est une transgression, c'est-à-dire qu'elle provient du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
H_n(PS^n, \Omega S^n) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(\Omega S^n) & \pi_{n-1}(\Omega S^n) \arrow[l, "h"'] \\
H_n(S^n, s_0) \arrow[ur, "\tau"] & & \pi_n(S^n, s_0) \arrow[ll, "h"] \arrow[u, "\partial"]
\end{tikzcd}$$

Le diagramme nous convainc que ce morphisme n'est rien d'autre que le morphisme ϕ_n, ce qui achève de prouver le théorème. □

3.4. **Suites spectrales cohomologiques.** Toute la construction des suites spectrales d'un complexe filtré se transpose en cohomologie. On se donne un (co-)complexe $C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \cdots$ muni d'une filtration décroissante $F_p C^* \supset F_{p+1} C^*$ compatible avec la différentielle. On pose alors

$$E_r^{p,q} = \{x \in F_p C^{p+q}, dx \in F_{p+r} C^{p+q+1}\}/(F_{p+1}C^{p+q} + dF_{p-r+1}C^{p+q-1})$$

avec $d^r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$. On a toujours $E_0^{p,q} = F_p C^{p+q}/F_{p+1}C^{p+q}$ et $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_p C^*)$. Tout marche pareil à savoir que E_{r+1} est toujours isomorphe à la cohomologie de E_r dans le même degré. De plus, si la filtration est bornée en tout degré, le groupe $E_r^{p,q}$ se stabilise vers $G_p H^{p+q}$ quand $r \to +\infty$ comme dans le cas homologique.

Comme la cohomologie singulière a le mérite par rapport à l'homologie de posséder une structure multiplicative, on va donc supposer qu'il existe un produit $\star : C^p \times C^q \to C^{p+q}$ compatible avec la différentielle au sens où $d(\alpha \star \beta) = d\alpha \star \beta + (-1)^p \alpha \star d\beta$ et préservant la filtration au sens où $\alpha \star \beta \in F_{p+q}C^*$ si $\alpha \in F_pC^*$ et $\beta \in F_qC^*$.

Lemme 7. *Le produit $\star$ induit pour tout $r \in \mathbb{N}$ une application bilinéaire*

$$\star_r : E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \to E_r^{p+p',q+q'}$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1. *La différentielle d_r est une dérivation au sens où $d(\alpha \star_r \beta) = d\alpha \star_r \beta + (-1)^{p+q} \alpha \star_r d\beta$*
2. *Le produit $\star_{r+1}$ est celui induit par $\star_r$ sur la cohomologie de $E_r^{*,*}$.*
3. *Si la filtration de chaque C^i est borné, le produit $\star_r$ se stabilise vers le produit $G_pH^q \times G_{p'}H^{q'} \to G_{p+p'}H^{q+q'}$.*

Preuve. La preuve est une simple vérification, laissée en exercice. □

Appliquons cette construction à la suite spectrale de Serre. A nouveau, on suppose avoir un fibré $p : X \to B$ dont la base est un CW-complexe connexe par arcs de point base b_0 et dont la fibre $F = p^{-1}(b_0)$ est connexe par arcs. Le complexe de cohomologie singulière $C^*(X)$ est alors filtré par $F_pC^*(X) = C^*(X, X^{p-1})$, à savoir les cochaînes singulières sur X qui s'annulent sur les simplexes de X^{p-1}. Il s'agit bien d'une filtration décroissante. Par construction, on a $E_0^{p,q} = F_pC^{p+q}(X)/F_{p+1}C^{p+q}(X) = C^{p+q}(X^p, X^{p-1})$ donc

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(X^p, X^{p-1}).$$

De même, on trouve comme pour l'homologie $E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$ où $H^q(F)$ est vue comme un $\mathbb{Z}[\pi]$-module.

Le problème que l'on rencontre avec le cup-produit est qu'il ne préserve pas la filtration au niveau 0, mais ce sera le cas au niveau 1, ce qui permet de faire tourner quand même la suite spectrale. Voyons le cup-produit comme la composition

$$H^*(X) \times H^*(X) \xrightarrow{\times} H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$$

où $\alpha \times \beta = p_1^*\alpha \cup p_2^*\beta$ et $\Delta : X \to X \times X$ est le plongement diagonal.

Le produit $X \times X$ est la réunion de ses squelettes $(X \times X)^p = \cup_{i+j=p} X^i \times X^j$ qui sont les préimages des p-squelettes de $B \times B$. Par excision, on a $H^*((X \times X)^p, (X \times X)^{p-1}) = \bigoplus_{i+j=p} H^*(X^i \times X^j, X^i \times X^{j-1} \cup X^{i-1} \times X^j)$. Il existe donc une application naturelle de chaque facteur de droite dans le terme de gauche.

On a donc un morphisme

$$\begin{tikzcd}
H^m(X^p, X^{p-1}) \times H^n(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\times"] & H^{n+m}(X^p \times X^q, X^p \times X^{q-1} \cup X^{p-1} \times X^q) \arrow[d] \\
& H^{n+m}((X \times X)^{p+q}, (X \times X)^{p+q-1}) \arrow[d, "\Delta^*"] \\
& H^{m+n}(X^{p+q}, X^{p+q-1})
\end{tikzcd}$$

Cela nous donne bien $\star_1 : E_1^{p,q} \times E_1^{p',q'} \to E_1^{p+p',q+q'}$. On admet ici que ce produit est bien compatible avec la différentielle ∂_1 et que le produit $\star_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{p',q'}$ qu'il induit est égal à $(-1)^{q'p}$ fois le "double" cup-produit naturel:

$$H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \to H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F)).$$

3.4.1. *Espace projectif infini.* Prenons comme exemple le calcul de la cohomologie de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ en observant que c'est la base d'un fibré $S^1 \to S^\infty \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ dont l'espace total est contractile. La suite spectrale de Serre a pour deuxième page

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), H^q(S^1))$$

En notant x le générateur de $H^1(S^1)$, on a la figure suivante

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))x \arrow[drr, "d_2"] & H^1(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))x \arrow[drr, "d_2"] & H^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))x & H^3(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))x \\
H^0(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) & H^1(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) & H^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) & H^3(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))
\end{tikzcd}$$

Comme les différentielles supérieures sont nécessairement nulles et que la suite doit converger vers 0, on en déduit que d_2 est un isomorphisme, que $H^{2k+1}(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = 0$ et $H^{2k}(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$. Mieux, le générateur de $H^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ est $a = d_2 x$, celui de $H^4(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ est $d_2(xa) = d_2(x)a + x d_2(a) = a^2$. Etc, on trouve que $H^*(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[a]$.

3.4.2. *Groupes* SU_n. Comme $\mathrm{SU}_2 \simeq S^3$, on a $H^*(\mathrm{SU}_2) = H^*(S^3)$. On va prouver par récurrence que $H^*(\mathrm{SU}_n) = H^*(S^3 \times \cdots \times S^{2n-1})$.

Analysons pour cela la suite spectrale de Serre de la fibration $\mathrm{SU}_{n-1} \to SU_n \to S^{2n-1}$. Elle est formée de deux colonnes, toutes deux contenant l'algèbre de cohomologie de SU_{n-1}. On note x_n le générateur de $H^n(S^n)$ et on observe que seule la différentielle d_{2n-1} peut être non nulle.

$$\begin{tikzcd}
H^{2n-2}(\mathrm{SU}_{n-1}) \arrow[ddrr, "d_{2n-1}"] & \cdots & H^{2n-2}(SU_{n-1})x_{2n-1} \\
H^1(\mathrm{SU}_{n-1}) & & H^1(SU_{n-1})x_{2n-1} \\
H^0(\mathrm{SU}_{n-1}) & \cdots & H^0(SU_{n-1})x_{2n-1}
\end{tikzcd}$$

Comme par hypothèse de récurrence $H^*(SU_{n-1})$ est engendrée par des éléments impairs, d_{2n-1} ne peut que les envoyer sur 0. La propriété de dérivation implique que d_{2n-1} est identiquement nulle et donc $H^*(\mathrm{SU}_n) \simeq H^*(\mathrm{SU}_{n-1}) \otimes H^*(S^{2n-1})$.

Exercice 30. *Montrer que les groupes $H^p(K(\mathbb{Z},3))$ valent $\mathbb{Z},0,0,\mathbb{Z},0,0,\mathbb{Z}/2$ à partir de la suite spectrale de Serre de la fibration $K(\mathbb{Z},2) \to PK(\mathbb{Z},3) \to K(\mathbb{Z},3)$. On peut trouver ces groupes jusqu'à $p = 13$!*

3.4.3. $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons $\pi = \pi_4(S^3)$: en ajoutant des cellules de dimension 6 au moins à S^3 on construit un espace Y qui vérifie $\pi_4(Y) = \pi$ et $\pi_k(Y) = 0$ pour tout $k > 4$. Ce faisant, on ne change pas non plus l'homologie en bas degré, on a précisément $H_4(Y) = H_5(Y) = 0$. On a aussi $H^3(Y) = \mathbb{Z}$ et donnons nous une application $f : Y \to K(\mathbb{Z},3)$ qui représente cette classe. On peut, quitte à changer Y par un espace homotopiquement équivalent supposer que f est une fibration. Analysant la suite exacte longue d'homotopie de cette fibration, on trouve que la fibre F est un $K(\pi,4)$. Avec les coefficients universels, on trouve que l'homologie de $K(\mathbb{Z},3)$ commence par $\mathbb{Z},0,0,\mathbb{Z},0,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La suite spectrale de Serre a donc la deuxième page suivante:

$$\begin{tikzcd}
\pi & 0 & 0 & \pi & 0 & ? \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}/2 \arrow[uuuulllll, "\partial_5"]
\end{tikzcd}$$

La seule façon de vérifier $H_5(Y) = 0$ est de faire en sorte que $\partial_5 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \pi$ soit un isomorphisme!

3.5. **Classes caractéristiques.** On définit sur une base quelconque la notion de fibré vectoriel réel, fibré vectoriel réel orienté et fibré vectoriel complexe.

Des exemples "universels" sont fournis par :

(1) L'espace $G_k(\mathbb{R}^n)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, et sa limite quand $n \to \infty$: $G_k = \lim\limits_{\to} G_k(\mathbb{R}^n)$.
(2) L'espace $G_k^+(\mathbb{R}^n)$ des sous-espaces vectoriels orientés de dimension k de $\mathbb{R}^n$, et sa limite $G_k^+ = \lim\limits_{\to} G_k^+(\mathbb{R}^n)$.
(3) L'espace $G_k(\mathbb{C}^n)$ des sous-espaces vectoriels complexes de dimension k de $\mathbb{C}^n$, et sa limite $G_k^{\mathbb{C}} = \lim\limits_{\to} G_k^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.

Enfin, on admet le théorème suivant:

Théorème 7. *Soit B un espace paracompact et $p : E \to B$ un fibré vectoriel réel. Alors il existe une application dite classifiante $\xi : B \to G_k$, unique à homotopie près telle que E soit isomorphe à $\xi^* E_k$, où $E_k \to G_k$ désigne le fibré tautologique. La même chose est vraie pour les versions orientées et complexes.*

Définition 5. *Une classe caractéristique de degré p est un élément $x \in H^p(G_k)$.*

A tout fibré $E \to B$, on lui associe la classe $\xi^* x \in H^p(B)$. C'est bien défini, invariant par isomorphisme et compatible avec les tirés en arrière. Pour comprendre les classes caractéristiques, il est donc indispensable de calculer la cohomologie des grassmaniennes G_k, G_k^+ et $G_k^{\mathbb{C}}$.

3.5.1. *Cohomologie de $G_k^{\mathbb{C}}$.* On a déjà $G_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ dont on a calculé la cohomologie dans la section précédente, et trouvé $\mathbb{Z}[a]$ avec a de degré 2. Cette classe est plutôt notée c_1 et appelée première classe de Chern.

L'espace $G_k^{\mathbb{C}}$ peut être vu comme l'ensemble des sous-espaces V de dimension k de $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Le fibré tautologique $E_k^{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des paires (v, V) avec $v \in V$.

Considérons la structure unitaire standard sur $\mathbb{C}^\infty$ et le sous-espace de $E_k^{\mathbb{C}}$ suivant : $U_k^{\mathbb{C}} = \{(v, V), v \in V, ||v|| = 1\}$. On a deux fibrations naturelles: l'une $U_k^{\mathbb{C}} \to S^\infty$ envoie (v, V) sur v et a pour fibre $G_{k-1}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^\infty/\mathbb{C}v) \simeq G_{k-1}^{\mathbb{C}}$. Comme S^∞ est contractile, cela montre que $U_k^{\mathbb{C}}$ et $G_{k-1}^{\mathbb{C}}$ sont homotopiquement équivalents.

L'autre est l'application $U_k^{\mathbb{C}} \to G_k^{\mathbb{C}}$ qui envoie (v, V) sur V. Sa fibre est formée des vecteurs unitaires de V, à savoir S^{2k-1}.

Théorème 8. *Pour tout $k \geq 1$, $H^*(G_k^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$ où c_i est de degré $2i$.*

Preuve. On l'a prouvé pour $k = 1$, supposons le vrai pour $k - 1$ et voyons la suite spectrale de Serre de la fibration $S^{2k-1} \to G_{k-1}^{\mathbb{C}} \to G_k^{\mathbb{C}}$. Comme $E_2^{p,q} = H^p(G_k^{\mathbb{C}}, H^q(S^{2k-1}))$ on voit que la première différentielle potentiellement non triviale est d_{2k}.

On en déduit déjà l'isomorphisme $H^p(G_k^{\mathbb{C}}) \simeq H^p(G_{k-1}^{\mathbb{C}})$ pour $p \leq 2k-2$. On note $c_1, \dots, c_{k-1}$ les classes correspondantes dans $H^*(G_k^{\mathbb{C}})$. Notons $c_k = d_{2k}(x)$ où x est le générateur de $E_2^{0,2k-1}$. Comme la différentielle est une dérivation, on en déduit que le morphisme $d_{2k} : H^p(G_k^{\mathbb{C}}) \to H^{p+2k}(G_k^{\mathbb{C}})$ est le morphisme de multiplication par c_k.

Ensuite, comme la cohomologie de $G_{k-1}^{\mathbb{C}}$ est nulle en degré impair, on en déduit que la multiplication par c_k est injective sur les pairs et surjective sur les impairs. Tout élément impair $x \in H^{2p+1}(G_k^{\mathbb{C}})$ s'écrit donc $x = c_k x'$ avec $x' \in H^{2p+1-2k}(G_k^{\mathbb{C}})$. En itérant ce procédé, on trouve que $x = (c^k)^r z$ avec z de degré impair $< 2k$. Cela montre que $z = 0$ puis $x = 0$. Ainsi la cohomologie de $G_k^{\mathbb{C}}$ n'est formée que d'éléments pairs.

De plus, la multiplication par c_k y est injective et on a $H^*(G_k^{\mathbb{C}})/(c_k) = H^*(G_{k-1}^{\mathbb{C}})$. Cela prouve bien l'isomorphisme $H^*(G_k^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k]$. □

3.5.2. *Cohomologie de G_k.* Commençons par calculer avec les suites spectrales la cohomologie de $G_1 = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$. On sait qu'on peut représenter le morphisme non trivial $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par une application continue $K(\mathbb{Z}, 1) \to K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, par exemple, la composition $f : S^1 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$.

Ensuite on peut remplacer S^1 par un espace homotopiquement équivalent (la fibre homotopique) de sorte que f devienne une fibration. Il s'agit de l'espace $X = \{(x, \gamma) \in S^1 \times \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})^{[0,1]}, f(x) = \gamma(0)\}$ muni de la projection $p(x, \gamma) = \gamma(1)$. La suite exacte de la fibration nous assure que la fibre F de p vérifie $0 \to \pi_1(F) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_k(F) = 0$ pour $k \geq 2$. En d'autres termes, $F = K(\mathbb{Z}, 1)$.

Pour être sur que les systèmes locaux $H^0(F)$ et $H^1(F)$ sont triviaux, on considère les coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La suite spectrale de Serre prend donc la forme suivante

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^\infty) \arrow[drr, "d_2"] & H^1(\mathbb{P}^\infty) \arrow[drr, "d_2"] & H^2(\mathbb{P}^\infty) & \cdots \\
H^0(\mathbb{P}^\infty) & H^1(\mathbb{P}^\infty) & H^2(\mathbb{P}^\infty) & \cdots
\end{tikzcd}$$

Comme $H^0(\mathbb{P}^1) = H^1(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}/2$, on a déjà là la cohomologie de l'espace total. La suite doit dégénérer en E_3 et toutes les différentielles d_2 représentées sont des isomorphismes.

Comme plus haut, la différentielle d_2 agit par multiplication par $x = d_2(1)$. On en déduit que $H^n(\mathbb{P}^\infty)$ est engendré par x^n, i.e. $H^*(\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.

Cette classe est appelée première classe de Stiefel-Whitney w_1 et on peut montrer comme pour le cas complexe que $H^*(G_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[w_1, \ldots, w_k]$ avec $w_i \in H^i(G_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Dans le cas réel orienté, on rappelle qu'on a déjà défini une classe. Soit $E_k^+ \to G_k^+$ le fibré vectoriel tautologique. L'obstruction à trouver une section non nulle est une classe eu $\in H^k(G_k^+, \mathbb{Z})$. Comparons maintenant les trois grassmaniennes.

(1) En oubliant l'orientation d'un fibré vectoriel, on obtient un revêtement double $G_k^+ \to G_k$ qui est aussi le revêtement universel. On peut montrer

que $H^*(G_k^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_k]$ où $\tilde{w}_i$ est le tiré en arrière de $w_i \in H^i(G_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(2) En tensorisant un fibré réel par $\mathbb{C}$ on obtient un fibré complexe et donc une application $G_k \to G_k^{\mathbb{C}}$.

(3) Enfin en oubliant la structure complexe d'un fibré, on obtient un fibré orienté et donc une application $G_k^{\mathbb{C}} \to G_k^{\mathbb{R}}$.

Via ces applications, on peut comparer les classes caractéristiques de chaque contexte.

(1) Si $p : E \to B$ est un fibré orienté de rang n, on dispose de sa classe d'Euler $\mathrm{eu}(E) \in H^{2n}(B, \mathbb{Z})$ et de sa classe de Stiefel-Whitney $w_{2n}(E) \in H^{2n}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On peut montrer que l'un est la réduction de l'autre modulo 2.

(2) Si $p : E \to B$ est un fibré complexe de rang n, on a $\mathrm{eu}(E) = c_n(E) \in H^{2n}(B, \mathbb{Z})$.

3.5.3. *Classes de Pontryagin.* Si E est un fibré réel de rang n, on pose $p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E)$. On peut aussi montrer que $p_i(E)$ modulo 2 devient égal à $w_{2i}(E)^2$. Si E est orientable de rang $2n$, on a $p_n(E) = e(E)^2$.

Théorème 9. *La torsion de $H^*(G_k, \mathbb{Z})$ est constituée d'éléments d'ordre 2. En quotientant par la torsion, on trouve l'algèbre $\mathbb{Z}[p_1, \dots, p_n]$ avec $k = 2n$ ou $k = 2n+1$.*

La torsion de $H^*(G_k^+, \mathbb{Z})$ est constituée d'éléments d'ordre 2. En quotientant par la torsion, on trouve l'algèbre $\mathbb{Z}[\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n]$ si $k = 2n+1$ et $\mathbb{Z}[\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}, \mathrm{eu}]$ si $k = 2n$.