

Le nombre d'or et la topologie quantique

Julien Marché

La topologie quantique naît avec les travaux de Jones, Kauffman puis Witten à la fin des années 80 : elle associe à des objets de dimension 3 (nœuds, 3-variétés) des “invariants” numériques qui sont relativement faciles à définir mais dont il est difficile de percevoir le sens topologique.

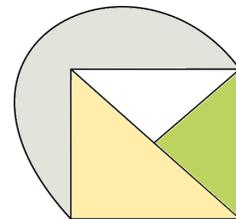
Bien que ces théories soient relativement récentes, on peut en trouver des racines plus lointaines, et c'est ce que cet article propose d'explorer. En partant des problèmes de coloriage de graphes, on entreprend ici une promenade dans le monde de la topologie quantique en se concentrant sur un seul exemple - lié au nombre d'or - mais qui en représente toute la complexité et le mystère.

1 Invariants des graphes planaires

1.1 Le polynôme chromatique

Un des théorèmes mathématiques les plus diffusés vers le grand public est le théorème des 4 couleurs. À juste titre : son énoncé est simple, ancien (1852) et sa démonstration, une des premières assistée par l'ordinateur (1976), est historique. Manifestement, ce théorème continue d'inspirer les mathématiciens qui espèrent encore en trouver une preuve conceptuelle, entièrement accessible à un être humain. Une des premières approches de ce genre a été proposée par Birkhoff en 1912 (voir [Bir13]) : elle introduit le polynôme chromatique, dont on présente une variante ci-dessous.

Étant donné un graphe G fini et planaire comme sur la figure ci-contre, Birkhoff montre que le nombre de façons de colorier les régions complémentaires de G avec n couleurs de sorte que deux régions adjacentes soient de couleurs distinctes est une fonction polynomiale de n .



Comme on peut toujours fixer arbitrairement la couleur d'une région, disons celle qui est non bornée, ce nombre est divisible par n et on l'écrit $nF_G(n)$ pour un certain polynôme F_G , dit polynôme de flot de G . Précisons que G peut contenir des boucles,

i.e. des arêtes ayant leurs extrémités confondues. Il peut aussi contenir des ponts, là où une région devient adjacente à elle-même, auquel cas elle n'admet aucun coloriage. Le lecteur peut s'amuser à vérifier les formules suivantes où \circ , ∞ , \ominus , $\circ-\circ$ représentent les graphes planaires correspondant au symbole :

$$F_{\circ}(t) = t - 1, F_{\circ\circ}(t) = F_{\infty}(t) = (t - 1)^2, F_{\ominus}(t) = (t - 1)(t - 2), F_{\circ-\circ} = 0.$$

Le résultat de Birkhoff est assez peu connu et sa démonstration, très élégante : elle se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes de G . Considérons une arête e de G reliant deux sommets distincts : supposons qu'elle sépare le complémentaire de G en deux régions distinctes R_1 et R_2 , si ce n'est pas le cas on aura $F_G = 0$. On considère alors les coloriage des régions complémentaires de G/e , le graphe obtenu en écrasant l'arête e comme sur la Figure 1.

Ils sont de deux sortes : ceux pour lesquels les couleurs de R_1 et R_2 sont égales, ce qui correspond à un coloriage de $G \setminus e$, et ceux pour lesquels les couleurs de R_1 et R_2 sont distinctes, ce qui correspond à un coloriage de G . On a donc établi la formule dite de contraction-suppression

$$(C-S) \quad F_{G/e}(n) = F_G(n) + F_{G \setminus e}(n).$$

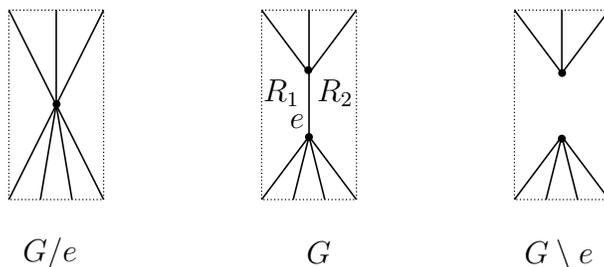


Figure 1: Un graphe avec une arête contractée et supprimée

Comme $G \setminus e$ et G/e ont une arête de moins que G , on se ramène au cas d'un graphe n'ayant que des boucles. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. Si G contient un pont, c'est-à-dire une arête qui sépare la composante connexe de G qui la contient en deux composantes connexes, alors $F_G = 0$.
2. Si G contient une boucle e , alors $F_G(t) = (t - 1)F_{G \setminus e}(t)$.

3. Si G est l'union disjointe de G_1 et G_2 alors $F_G = F_{G_1}F_{G_2}$.

Ces relations permettent de tout calculer, comme le démontre Birkhoff.

Bien sûr, le théorème des 4 couleurs revient à montrer que $F_G(4) > 0$. Birkhoff y a consacré quelques publications tout au long de sa carrière, et Whitney sa thèse. Mais c'est sans doute Tutte qui a le mieux renouvelé cette thématique.

C'est lui qui a introduit en 1954 (voir [Tut54]) la version du polynôme chromatique présentée ici qui a le mérite de généraliser la définition précédente au cas d'un graphe G abstrait (pas forcément planaire). Soit donc G un tel graphe : ses arêtes ne sont pas orientées mais on peut considérer l'ensemble \vec{E} de ses arêtes munies d'une orientation. On définit un n -flot sur G comme une fonction $f : \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vérifiant

1. $f(-\vec{e}) = -f(\vec{e})$ où $-\vec{e}$ désigne l'arête munie de l'orientation opposée.
2. $f(\vec{e}_1) + \dots + f(\vec{e}_k) = 0$ si $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ sont les arêtes incidentes à un même sommet, munies de l'orientation sortante.

Tutte montre que pour G planaire, le polynôme de flot $F_G(n)$ est le nombre de n -flots sur G vérifiant $f(\vec{e}) \neq 0$ pour toute arête orientée \vec{e} . Il est facile de faire le lien entre les deux définitions : si G est plongé dans un plan et qu'on identifie l'ensemble des couleurs à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on associe à tout coloriage des régions complémentaires de G un n -flot f où, pour toute arête orientée \vec{e} , $f(\vec{e})$ est la différence entre les couleurs des régions situées respectivement à gauche et à droite de \vec{e} . On vérifie que tout n -flot est bien associé à un coloriage, unique à une constante près, d'où l'égalité.

1.2 Évaluation au nombre d'or

Tutte et ses collègues calculent de nombreux polynômes de flot : à l'aide de l'IBM 360, ils observent empiriquement en 1968 que les polynômes chromatiques ont un zéro proche de $\phi + 1$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Tutte justifie rigoureusement cette observation deux ans plus tard en établissant (voir [BT69, Tut70]) :



Théorème 1 (Inégalité d'or) *Pour tout graphe planaire trivalent connexe G avec V sommets, on a :*

$$0 < |F_G(\phi + 1)| \leq \phi^{3-V}.$$

Un graphe est trivalent si tout sommet est incident à trois arêtes : le lecteur est invité à réfléchir pourquoi le théorème des 4 couleurs se réduit facilement au cas des graphes trivalents. Quand V augmente, ϕ^{3-V} devient très petit, ce qui explique que F_G ait un zéro très près de $\phi + 1$ que Tutte appelle le “zéro d’or”. La preuve est une récurrence de quelques pages, subtile et obscure. La même année (1970), Tutte découvre “l’identité d’or” suivante :

Théorème 2 (Identité d’or) *Pour tout graphe planaire trivalent G avec E arêtes on a :*

$$F_G(\phi + 2) = \phi^E F_G(\phi + 1)^2.$$

A nouveau, la preuve est élémentaire et obscure, et l’interprétation très jolie : comme Tutte a établi avec l’inégalité d’or que $F_G(\phi + 1) \neq 0$, on a aussi $F_G(\phi + 2) \neq 0$. On peut donc colorier les régions complémentaires de G avec $\phi + 2 \simeq 3,618\dots$ couleurs!

Y a-t-il une interprétation conceptuelle de ces deux résultats? Quel rôle joue le nombre d’or dans cette histoire? Il a fallu attendre l’arrivée de la topologie quantique vingt ans plus tard pour commencer à y voir plus clair. L’inégalité d’or par exemple est une conséquence non triviale de celle de Cauchy-Schwarz.

Beaucoup reste à comprendre toutefois, dans l’article [AK16] de 2016, Agol et Krushkal proposent la conjecture suivante qui concerne le polynôme de flot dans le cas non planaire : notons $\varphi = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ le conjugué de Galois de ϕ . Comme la substitution $\phi \mapsto \varphi$ est un automorphisme du corps $\mathbb{Q}(\phi)$, l’identité d’or est encore vraie (dans le cas planaire) en remplaçant ϕ par φ .

Conjecture 1 (Agol Krushkal) *Soit G un graphe trivalent sans pont avec E arêtes. On a l’inégalité suivante*

$$F_G(\varphi + 2) \geq \varphi^E F_G(\varphi + 1)^2$$

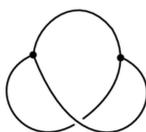
avec égalité si et seulement si G est planaire.

Cette conjecture a été vérifiée numériquement pour des milliers de graphes, et si elle était vraie, elle donnerait un critère de planarité d’un genre nouveau. Elle est pour l’instant complètement ouverte.

2 Les invariants quantiques

2.1 Des graphes planaires aux nœuds

La révolution arrive dans les années 80 avec les percées de Jones, Kauffman puis Witten. On va considérer que G n'est plus un graphe planaire mais un graphe dans l'espace. Précisément on va considérer un graphe *en bande* G tel qu'on l'obtiendrait si on remplaçait les sommets par des disques et les arêtes par des bandelettes. Un tel graphe se représente par un diagramme plan où, en plus des sommets de G , apparaissent des croisements des arêtes. Les bandelettes sont très fines : sur le diagramme, elles ont l'épaisseur du trait. Voici un exemple :



Pour calculer le polynôme F_G associé à ces diagrammes, on va recourir à une relation locale du même type que la relation (C-S), la relation de Kauffman. Elle s'écrit $F_{G_\times} = AF_{G_{||}} + A^{-1}F_{G_=}$ où $G_\times, G_{||}, G_=$ diffèrent uniquement dans une boule, tels qu'ils sont représentés sur la Figure 2.

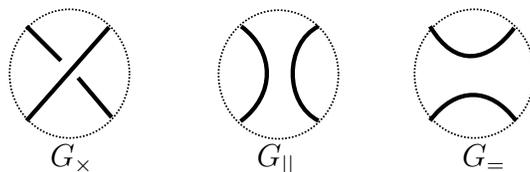


Figure 2: La relation de Kauffman

Dans cette expression, apparaît une nouvelle variable, liée à la variable t du polynôme de flot par la relation $-A^2 - A^{-2} = t - 1$. Si, comme on le supposera bientôt $t = \phi + 1$, alors A est une racine primitive dixième de l'unité : cela vient des identités

$$\phi = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 + q^2 + q^{-2} = -q - q^{-1}.$$

Dans cette expression on a posé $q = A^2 = e^{\frac{6i\pi}{5}}$ (et donc $A = -q^3$) : elle nous servira de racine 5-ième de l'unité de référence. On notera $\langle G \rangle = F_G(\phi + 1)$ (abusivement car cette fois F_G est un polynôme en q) et on appellera ce nombre complexe la *valeur* de G . Le lecteur est encouragé à calculer par lui-même la valeur de certains graphes tri-dimensionnels :

$$\langle \bigcirc \rangle = \phi, \quad \langle \infty \rangle = \phi^2, \quad \langle \ominus \rangle = 1, \quad \langle \bigodot \rangle = -1$$

$$\langle \text{figure 3a} \rangle = 1 + 2q^2, \quad \langle \text{figure 3b} \rangle = 1 + 2q^{-2}.$$

Un point important dans ces calculs est de bien comprendre que les graphes ont une structure en bande : quand on vrille une bande, la valeur est multipliée par q comme dans la Figure 3. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer la relation de Kauffman à l'unique croisement de la figure, remplacer le cercle ainsi produit par $-A^2 - A^{-2}$ et simplifier les termes en utilisant $q = A^2 = -A^{-3}$.

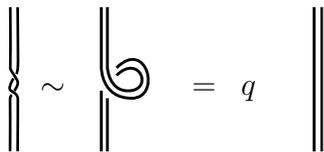


Figure 3: Vriller revient à multiplier par q .

Une autre observation importante est que la valeur de l'image miroir d'un graphe (qui s'obtient en inversant tous les croisements) s'obtient en remplaçant q par q^{-1} . La correspondance entre les graphes en bande et leurs valeurs est - en tout cas pour l'auteur de cet article - tout à fait mystérieuse. On peine un peu à la calculer, beaucoup à lui trouver un sens. On renvoie le lecteur désireux d'avoir plus de détails au livre très pédagogique [Lic97].

2.2 La théorie quantique des champs topologique

En 1989, Witten a donné dans [Wit89] une interprétation de la valeur d'un graphe défini ci-dessus en terme de théorie quantique des champs. A certains égards, cela rend le sujet encore plus attirant et ésotérique : dans cette section, on va essayer d'en donner l'idée générale sans rentrer dans les détails. Le lecteur est encouragé à la sauter si les notions utilisées ne lui sont pas familières, sachant que l'on reviendra a des considérations plus mathématiques dans la section suivante.

Supposons cette fois que le graphe G est un nœud plongé dans une variété orientée fermée à trois dimensions M que l'on peut pour l'instant supposer être $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. On va décrire une particule vivant dans M et ayant un degré de liberté interne dont le groupe de symétrie est le groupe des rotations SO_3 , par exemple une toupie ou une particule de spin entier. Un champ est décrit par une forme différentielle α sur S^3 à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3 = \mathbb{R}^3$. Si on est au point $x \in M$ et qu'on

se déplace dans la direction $X \in T_x M$, la particule subit une rotation infinitésimale $\alpha_x(X)$.

Le long d'un nœud G (un graphe avec une seule arête), la particule soumise au champ α subit une rotation notée $\text{Hol}_G(\alpha) \in \text{SO}_3$ appelée holonomie que l'on calcule mathématiquement de la façon suivante : si G est paramétré par $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$, il existe une unique application $X : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_3$ vérifiant $X(0) = \text{Id}$ et $X'(t) = \alpha(\gamma'(t))X(t)$. On a alors $\text{Hol}_G(\alpha) = X(1)$.

Cette rotation dépend du point de départ choisi sur le nœud mais pas son angle, noté θ . Pour cette raison, on considèrera plutôt la trace de l'holonomie notée $\text{Tr Hol}_G(\alpha) = 1 + 2 \cos(\theta)$.

Le dernier ingrédient à introduire est l'action $\text{CS}(\alpha)$ que l'on doit penser comme un lagrangien du calcul des variations : le système physique en équilibre choisira un point critique de cette fonctionnelle, dite de Chern-Simons.

Retardons la discussion concernant cette fonctionnelle : la formule que Witten propose est la suivante

$$(1) \quad \langle G \rangle = \eta^{-1} \int \text{Tr Hol}_G(\alpha) e^{i \text{CS}(\alpha)} \mathcal{D}\alpha \quad \text{avec } \eta = \int_{S^3} e^{i \text{CS}(\alpha)} \mathcal{D}\alpha.$$

Le symbole $\mathcal{D}\alpha$ signifie qu'on intègre sur toutes les 1-formes. Il n'a pas vraiment de sens : il s'agit d'une intégrale de Feynman qui attend toujours d'être définie rigoureusement. Malgré cela, elle donne des intuitions qui se sont toujours révélées justes et l'auteur n'a pas de meilleure interprétation à donner : la valeur d'un nœud est une valeur moyenne de la quantité $\text{Tr Hol}_G(\alpha)$ par rapport à la "mesure" $e^{i \text{CS}(\alpha)} \mathcal{D}\alpha$.

Notons en passant qu'on peut généraliser cette formule au cas des graphes trivalents en remplaçant la trace par une opération de "contraction" utilisant la forme trilinéaire $(X, Y, Z) \mapsto \langle [X, Y], Z \rangle$ dans laquelle $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3 \simeq \text{so}(3)$.

Donnons enfin quelques indications sur la définition de l'action de Chern-Simons, bien qu'on ne s'en servira pas plus loin dans cet article. La façon la plus rapide de la définir est une formule :

$$\text{CS}(\alpha) = \int_M \langle \alpha \wedge d\alpha + \frac{2}{3} [\alpha \wedge \alpha] \wedge \alpha \rangle.$$

Ce n'est pas la plus éclairante, pour en avoir une compréhension conceptuelle, il faut faire intervenir la théorie des classes caractéristiques et faire un bref passage vers la quatrième dimension.

C'est un fait non trivial que toute variété M de dimension 3 peut être vue comme le bord d'une variété W de dimension 4; tout champ α défini sur M peut être prolongé à W . La forme α peut être vue comme une connexion sur le fibré principal $W \times \text{SO}(3)$, il est alors naturel d'introduire sa courbure $F_\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]$ qui est une 2-forme sur W à valeurs dans $\text{so}(3)$.

D'après la théorie de Chern-Weil, si W est une variété de dimension 4 sans bord et si α est une connexion sur un $\text{SO}(3)$ fibré principal quelconque, la 4-forme $\langle F_\alpha \wedge F_\alpha \rangle$ représente une classe caractéristique du fibré (la première classe de Pontryagin), en particulier, on peut normaliser le produit scalaire pour avoir pour toute variété W compacte sans bord de dimension 4 :

$$\int_W \langle F_\alpha \wedge F_\alpha \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Revenons maintenant au cas où $\partial W = M$, la quantité $\text{CS}(\alpha) = \int_W \langle F_\alpha \wedge F_\alpha \rangle$ ne dépend pas de W modulo $2\pi\mathbb{Z}$: en effet, si on se donne une autre variété W' de même bord, on aura

$$\int_W \langle F_\alpha \wedge F_\alpha \rangle - \int_{W'} \langle F_\alpha \wedge F_\alpha \rangle = \int_{W \cup (-W')} \langle F_\alpha \wedge F_\alpha \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

C'est probablement la définition la plus satisfaisante de cette fonctionnelle. On peut aussi constater que ses points critiques sont les connexions plates, celles vérifiant $F_\alpha = 0$.

L'article révolutionnaire de Witten consiste à introduire l'intégrale (1) formellement, et à en dégager suffisamment de propriétés pour la calculer a posteriori. Une conséquence remarquable est que l'on peut même oublier le graphe G et considérer simplement la quantité $\eta = \int_M e^{i\text{CS}(\alpha)} \mathcal{D}\alpha$ pour une variété M de dimension 3. On obtient ainsi un invariant topologique des 3-variétés d'un genre nouveau.

Peu de temps après l'article de Witten, Reshetikhin et Turaev ont expliqué comment définir cet invariant rigoureusement à partir d'une présentation par chirurgie. L'idée de base est que dans toute variété M de dimension 3, on peut trouver un entrelacs $L \subset M$ et un entrelacs $L' \subset S^3$ tels que $M \setminus L$ et $S^3 \setminus L'$ soient homéomorphes. L'invariant de Witten de M s'obtient comme une combinaison linéaire astucieuse des valeurs $\langle L'' \rangle$ de tous les sous-entrelacs $L'' \subset L'$.

Pour terminer cette partie « quantique », il est temps de dire qu'on peut définir des invariants de graphes et de variétés de dimension 3 en remplaçant le nombre d'or $\phi = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ par tout nombre de la forme $1 + q + q^{-1}$ où q est une racine de l'unité d'ordre k . Dans la théorie de Witten, cela revient à multiplier la fonctionnelle de Chern-Simons par un entier k , souvent appelé niveau.

Quand on écrit

$$\langle M \rangle_k = \int e^{ik \text{CS}(\alpha)} \mathcal{D}\alpha$$

il est naturel de faire tendre k vers l'infini et espérer un phénomène de type phase stationnaire. Witten en avait bien conscience dès son premier article et a proposé un comportement asymptotique qu'on ne sait pas encore prouver rigoureusement. C'est une variante de la conjecture dite du volume qui est devenue une question centrale dans le domaine de la topologie « quantique ». On renvoie le lecteur intéressé par cet aspect du sujet au très inspirant livre d'Atiyah [Ati90].

3 Graphes sur les surfaces et groupe modulaire

Comme sous-produit de cette théorie quantique des champs topologique, on trouve des objets mathématiques très intéressants, et qu'on ne sait pas construire autrement : des représentations projectives de dimension finie des groupes modulaires des surfaces, précisons.

Si on se donne une surface compacte orientée S de genre g et $x_1, \dots, x_n \in S$ des points distincts, le groupe $\text{Mod}(S, x_1, \dots, x_n)$, dit groupe modulaire, est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de S préservant l'orientation et permutant les points. Deux homéomorphismes f, g sont isotopes s'il existe $H : S \times [0, 1] \rightarrow S$ continue telle que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ et pour tout $t \in [0, 1]$ l'application $x \mapsto H(x, t)$ est un homéomorphisme préservant l'orientation et permutant les points.

On notera aussi ce groupe $\text{Mod}(S_{g,n})$: c'est un groupe de type fini jouant un rôle central en topologie de basse dimension, et pour lequel de nombreuses questions sont encore ouvertes. Par exemple, on ne sait pas s'il est isomorphe à un sous-groupe de $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ pour un certain entier m . On se propose de montrer comment en construire des représentations projectives de dimension finie, c'est-à-dire des morphismes (non-injectifs) $\rho : \text{Mod}(S_{g,n}) \rightarrow \text{PGL}_m(\mathbb{C})$.

3.1 Formule de fusion

Avant d'expliquer comment construire ces représentations, revenons sur des propriétés des polynômes de flot.

La relation (C-S) de contraction-suppression et les trois propriétés qui la suivent suffisent à calculer le polynôme de flot de n'importe quel graphe planaire. Rappelons qu'on a noté $\langle G \rangle = F_G(\phi + 1)$.

La structure de la récurrence permettant de calculer la valeur de n'importe quel graphe mérite d'être analysée. Supposons qu'on ait un graphe planaire G qui coupe

un cercle en quatre points. On peut appliquer la relation (C-S) à l'intérieur de ce cercle pour simplifier le graphe jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arêtes entièrement à l'intérieur. On ramène ainsi le graphe intérieur à l'un des trois graphes $G_{\times}, G_{\parallel}, G_{=}$ où $G_{\parallel}, G_{=}$ sont comme dans la Figure 2 et G_{\times} est représenté par un sommet quadri-valent.

On peut faire le même raisonnement à l'extérieur, on obtient trois possibilités pour le graphe à l'intérieur et trois possibilités pour le graphe à l'extérieur. L'ensemble de tous les graphes obtenus en recollant $G_{\times}, G_{\parallel}, G_{=}$ à l'intérieur avec $G_{\times}, G_{\parallel}, G_{=}$ à l'extérieur est représenté dans la matrice de graphes planaires suivante.

$$\begin{array}{ccc} G_{\times} & G_{\parallel} & G_{=} \\ \left(\begin{array}{ccc} \textcircled{\circ} & \infty & \infty \\ \infty & \circ\circ & \circ \\ \infty & \circ & \circ\circ \end{array} \right) & \begin{array}{l} G_{\times} \\ G_{\parallel} \\ G_{=} \end{array} \end{array}$$

En calculant la matrice des polynômes de flot de ces graphes, on trouve une matrice qui est non inversible précisément pour $t = \phi + 1$. Il y a donc une relation entre ses lignes (ou ses colonnes) que l'on peut écrire graphiquement de plusieurs façons : l'une est symétrique et dit $G_{\times} = \phi^{-1}G_{\parallel} + \phi^{-1}G_{=}$. Il y a là un gros abus de notation, il faut comprendre l'égalité comme celle des valeurs des graphes obtenus en substituant G_{\times} par G_{\parallel} et $G_{=}$. L'autre relation s'appelle formule de fusion et joue un rôle central dans la suite. Elle s'écrit $G_I = -\phi^{-2}G_{\parallel} + \phi^{-1}G_{=}$ mais se comprend mieux avec un dessin où sont représentés les trois graphes G_I, G_{\parallel} et $G_{=}$.

$$\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{---} \\ \text{Y} \end{array} = -\phi^{-2} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + \phi^{-1} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Figure 4: Formule de fusion

3.2 Modules d'écheveaux

Pour un graphe en bande dans \mathbb{R}^3 , il n'existe qu'un seul invariant qui vérifie la relation de contraction-suppression de la Figure 1, la relation de Kauffman de la Figure 2 et la relation de fusion de la Figure 4. Il est naturel de se demander si c'est toujours le cas pour un graphe en bande dans une variété de dimension 3 orientée quelconque

M . Il sera avantageux de généraliser encore un peu plus en introduisant des points $x_1, \dots, x_n \in \partial M$ munis d'une direction tangente (sous-entendue).

Définition 1 On définit le module d'écheveaux $\text{Sk}(M, x_1, \dots, x_n)$ comme étant le \mathbb{C} -espace vectoriel librement engendré par les classes d'isotopie de graphes en bande $G \subset M$ vérifiant $G \cap \partial M = \{x_1, \dots, x_n\}$ modulo les relations locales de contraction-suppression, de Kauffman et de fusion, plus les deux suivantes qui remplacent les relations de pont et de boucle.

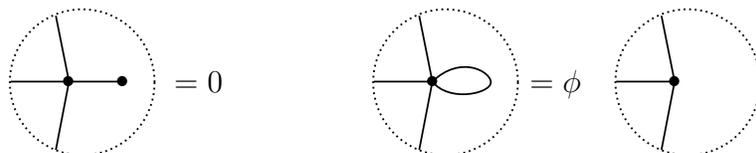


Figure 5: Relations de pont et de boucle

Autrement dit, une forme linéaire sur $\text{Sk}(M)$ est la même chose qu'un invariant de graphes en bande dans M vérifiant toutes les relations mentionnées dans la définition précédente. L'unicité d'un tel invariant dans le cas où $M = S^3$ s'écrit $\text{Sk}(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{C}$, le générateur étant donné par le graphe vide. Il est instructif de regarder d'autres exemples simples.

Proposition 1 En notant B^3 la boule unité dans \mathbb{R}^3 et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points distincts de B^3 , on a

$$\dim \text{Sk}(B^3, x_1, \dots, x_n) = F_n$$

où $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1, F_1 = 0, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Nous encourageons le lecteur à faire lui-même la preuve pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ car ces cas sont plutôt faciles et instructifs. Le fait que $\text{Sk}(B^3, x_1) = 0$ provient de la relation de pont, le fait que la dimension de $\text{Sk}(B^3, x_1, \dots, x_4)$ soit 2 plutôt que 3 provient de la relation de fusion. Cherchons en des bases : les générateurs de $\text{Sk}(B^3, x_1, x_2)$ et $\text{Sk}(B^3, x_2, x_2, x_3)$ sont donnés respectivement par un graphe formé par une arête reliant x_1 et x_2 et d'un graphe en forme de Y reliant les trois points marqués. Pour base de $\text{Sk}(B^3, x_1, \dots, x_4)$, on peut prendre les graphes $G_{||}$ et $G_{=}$ de la Figure 2.

Un autre cas très important de module d'écheveaux est celui d'un corps en anse H_g tel qu'on l'obtient en prenant l'intérieur d'une surface de genre g plongée de façon standard dans \mathbb{R}^3 . À homéomorphisme près, cette variété peut être représentée sous la forme $H_g = \Gamma \times [0, 1]$ pour un certain graphe en bande trivalent Γ (non unique).

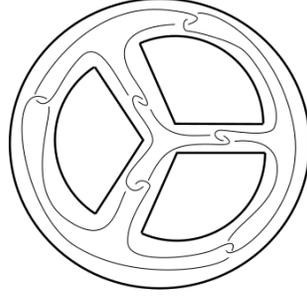


Figure 6: Un entrelacs dans un corps en anse de genre 3

Tout graphe en bande $G \subset \Gamma \times [0, 1]$ peut être représenté par un diagramme dessiné sur Γ , comme dans la Figure 6.

La relation de Kauffman permet de se débarrasser des croisements, la relation de contraction-suppression d'éliminer les sommets de valence dépassant 3 et, plus subtilement, la relation de fusion permet de fusionner deux brins parallèles de sorte qu'au plus une arête de G passe par chaque arête de Γ . A la fin, tout graphe en bande s'exprime comme combinaison de sous-graphes trivalents $\Gamma' \subset \Gamma$, ce qu'on résume dans le résultat suivant :

Proposition 2 *Soit Γ un graphe en bande muni de sommets univalents x_1, \dots, x_n et dont tous les autres sommets sont trivalents. L'ensemble des sous-graphes trivalents $\Gamma' \subset \Gamma$ ayant les mêmes sommets univalents forme une base de $\text{Sk}(\Gamma \times [0, 1], x_1, \dots, x_n)$.*

Par exemple, la Figure 7 montre un exemple de base de $\text{Sk}(H_2, x_1, x_2)$ en prenant comme graphe Γ le premier graphe représenté à gauche.

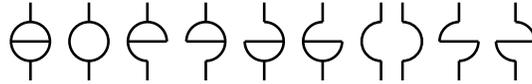


Figure 7: Base de $\text{Sk}(H_2, x_1, x_2)$

On obtient alors une table des dimensions $\dim \text{Sk}(H_g, x_1, \dots, x_n)$: on laisse le lecteur découvrir toutes les récurrences linéaires qu'il recèle.

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$g = 0$	1	0	1	1	2	3	5
$g = 1$	2	1	3	4	7	11	18
$g = 2$	5	5	10	15	25	40	65
$g = 3$	15	20	35	55	90	145	235

3.3 Représentations des groupes de tresses

Notons $S = \partial B^3$ la sphère standard et choisissons des points x_1, \dots, x_n dans S . On note $V_{0,n} = \text{Sk}(B^3, x_1, \dots, x_n)$ et on va montrer qu'il s'agit d'une représentation projective de $\text{Mod}(S_{0,n})$, c'est-à-dire qu'on va construire un morphisme

$$\rho : \text{Mod}(S_{0,n}) \rightarrow \text{PGL}(V_{0,n}).$$

Donnons-nous $f : S^2 \rightarrow S^2$ un homéomorphisme préservant l'orientation et permutant les points x_1, \dots, x_n . Si on oublie la contrainte de permuter les points, il est connu qu'un tel homéomorphisme f est isotope à l'identité, c'est-à-dire qu'on peut définir une famille continue d'homéomorphismes f_t vérifiant $f_0 = \text{Id}$ et $f_1 = f$. Pour définir $\rho(f)(\Gamma)$ avec Γ un graphe en bande dans B^3 d'extrémités x_1, \dots, x_n , il suffit de «déplacer les extrémités» de Γ de la façon décrite par f_t .

Le lecteur peut se guider sur l'exemple suivant de $\text{Mod}(S_{0,4})$ qui est pour l'essentiel engendré par σ_1 et σ_2 consistant à échanger x_1, x_2 et x_2, x_3 respectivement. L'isotopie $(\sigma_1)_t$ consiste à faire passer x_1 devant x_2 . Leur action sur la base $G_{\parallel}, G_{=}$ de $V_{0,4}$ se représente graphiquement comme dans la Figure 8.

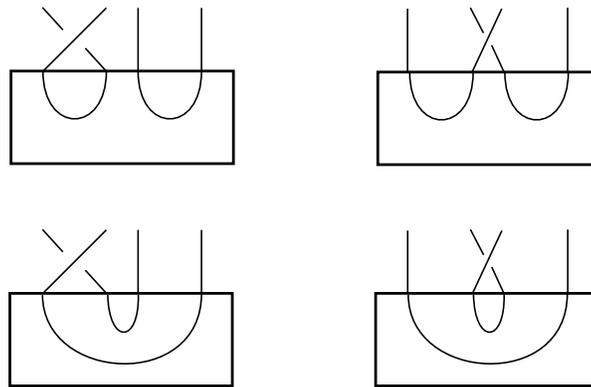


Figure 8: Représentation de la matrice $\begin{pmatrix} \rho(\sigma_1)(G_{\parallel}) & \rho(\sigma_2)(G_{\parallel}) \\ \rho(\sigma_1)(G_{=}) & \rho(\sigma_2)(G_{=}) \end{pmatrix}$.

Ceci nous donne après application directe de la relation de Kauffman la formule

$$\rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -A^{-3} & A^{-1} \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A^{-1} & -A^{-3} \end{pmatrix}.$$

Un problème que l'on a feint d'ignorer jusque là est que dans notre description des modules d'écheveaux, les points marqués étaient munis de vecteur tangents. De

manière équivalente, on a oublié de prendre en compte la structure en bande dans nos dessins. Ce n'est pas si grave puisque l'action de vriller une bande n'importe où multiplie globalement les valeurs par une puissance de q : on a donc au moins obtenu des représentations projectives $\rho : \text{Mod}(S_{0,n}) \rightarrow \text{PGL}(V_{0,n})$.

Celle que l'on vient d'écrire est difficile à reconnaître mais elle est bien connue des géomètres. Le groupe $\text{Mod}(S_{0,4})$ est un produit semi-direct de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, voir [FM12, Section 2.2.5]. Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ agit par symétries axiales sur la sphère et ces dernières n'agissent pas sur $V_{0,4}$. Rappelons la présentation bien connue $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle u, v \mid u^2 = v^3 = 1 \rangle$ (on a $u = \sigma_1\sigma_2$ et $v = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$). Comme la représentation ρ vérifie l'identité supplémentaire $\rho(u^{-1}v)^{10} = 1$, l'image de ρ est un groupe triangulaire de paramètres $(2, 3, 10)$. On peut penser à notre représentation comme l'uniformisation de la courbe modulaire dans laquelle on a remplacé le cusp par un point conique d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Cette étrange coïncidence n'est que la pointe de l'iceberg : on peut montrer que la représentation de $\text{Mod}(S_{0,5})$ est l'holonomie d'une surface hyperbolique complexe introduite par Hirzebruch dans [Hir83] qui s'interprète aussi comme la compactification de Deligne-Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ dans laquelle tous les diviseurs de bord ont une structure conique d'ordre 5.

3.4 Le cas du genre supérieur

Il est toujours plus difficile de comprendre le groupe $\text{Mod}(S_{g,n})$ quand $g > 0$. On va essayer d'en donner une idée en se limitant au cas $n = 0$ pour simplifier.

La clé se trouve dans le module d'écheveaux $\text{Sk}(S_g \times [0, 1])$ que l'on notera dorénavant $\text{Sk}(S_g)$. Ce n'est pas aussi facile de trouver une base que dans les cas précédents cependant, cet espace vectoriel de dimension finie est muni de structures supplémentaires dont on va tirer parti.

Tout d'abord c'est une algèbre où le produit de deux graphes en bande G_1, G_2 consiste à empiler l'un au-dessus de l'autre. Formellement, c'est la réunion $\Phi_1(G_1) \cup \Phi_2(G_2)$ avec $\Phi_1(x, t) = (x, t/2)$ et $\Phi_2(x, t) = (x, (1+t)/2)$. Ensuite, c'est une représentation de $\text{Mod}(S_g)$ où un homéomorphisme $f : S_g \rightarrow S_g$ agit sur $G \in \text{Sk}(S_g)$ par $G \mapsto \tilde{f}(G)$ avec $\tilde{f}(x, t) = (f(x), t)$. Cette action préserve bien la structure d'algèbre.

La propriété clé de cette algèbre est la suivante :

Proposition 3 *Supposons que S_g soit le bord d'un corps en anse H_g . Le morphisme naturel $\Psi : \text{Sk}(S_g) \rightarrow \text{End}(\text{Sk}(H_g))$ défini par $\Psi(G)(\Gamma) = G \cup \Gamma$ est un isomorphisme.*

Notons que, comme dans le cas du genre nul, on a fait dans la définition de Ψ un abus de notation en identifiant $H_g \cup S_g \times [0, 1]$ avec H_g à l'aide d'un voisinage tubulaire

du bord. Cette proposition implique en particulier que $\text{Sk}(S_g)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $M_k(\mathbb{C})$ avec $k = \dim \text{Sk}(H_g)$. D'après le théorème de Skolem-Noether, pour tout $f \in \text{Mod}(S_g)$, il existe $\rho(f) \in \text{GL}(\text{Sk}(H_g))$ tel que pour tout $x \in \text{Sk}(S_g)$ on ait :

$$\Psi(f(x)) = \rho(f)\Psi(x)\rho(f)^{-1}.$$

L'élément $\rho(f)$ est unique à multiplication près par un scalaire, cela nous donne la représentation ρ désirée.

Bien sûr, avec cette définition moins directe que dans le cas $g = 0$, il est plus difficile de calculer explicitement l'image des générateurs de $\text{Mod}(S_{g,n})$ mais c'est quand même faisable. Une propriété fondamentale des représentations ainsi construites est la suivante : les groupes modulaires sont engendrés par des twists de Dehn T_γ le long de courbes simples $\gamma \subset S \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. On peut montrer que $\rho(T_\gamma)$ est toujours diagonalisable, avec deux espaces propres associés aux valeurs propres 1 et q , presque comme une réflexion complexe. En particulier, $\rho(T_\gamma)^5 = \text{Id}$.

Regardons le cas de $g = 1$ pour lequel on a l'isomorphisme $\text{Mod}(S_1) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Les twists de Dehn correspondent aux matrices conjuguées à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Leur image est d'ordre 5 et la représentation $\rho : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{PGL}(V_{1,0})$ se factorise par $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ où elle devient injective. Les spécialistes auront reconnu le groupe A_5 et la représentation ρ réalise ce groupe comme celui des isométries du dodécaèdre.

Pour $g \geq 2$, on ne sait pas grand chose sur l'image des représentations quantiques. Ce qu'on peut dire c'est qu'elles préservent un réseau arithmétique (i. e. elles prennent leurs valeurs dans $\text{PGL}_k(\mathbb{Z}[q])$) et qu'elles préservent une forme (pseudo-)hermitienne. Si on ne peut pas espérer qu'elles soient toujours l'holonomie de structures géométriques sur des espaces de modules de courbes, on peut se demander quel est leur sens géométrique en général.

4 Conclusion

Comme le lecteur qui est arrivé jusqu'ici l'aura compris, le but de cet article est moins de présenter des recherches récentes que de raconter quelques mathématiques qui, bien qu'elles ont maintenant une trentaine d'années, sont encore peu connues et méritent une petite place au panthéon des maths. Si toutes ces choses ont été beaucoup étudiées depuis trente ans, c'est surtout dans le sens de la généralisation. Comme on l'a indiqué dans la section 2.2, on peut déjà introduire un paramètre k , mais on peut aussi remplacer le groupe SO_3 par n'importe quel groupe de Lie

compact. Un formalisme qui englobe tout cela est celui des catégories modulaires, on renvoie pour cela le lecteur motivé au livre [Tur16]. Pour ceux qui veulent plutôt prolonger la promenade, on renvoie aux articles d’exposition [Mas03, Fun21]. Pour une construction auto-contenue des seules représentations quantiques liées à SU_2 , on peut consulter [Mar21].

Ces généralisations évoquées, rappelons que même l’exemple le plus simple qui est développé ici a encore beaucoup de secrets à révéler et mérite bien de nouvelles recherches.

References

- [AK16] Ian Agol and Vyacheslav Krushkal. Tutte relations, TQFT, and planarity of cubic graphs. *Illinois J. Math.*, 60(1):273–288, 2016.
- [Ati90] Michael Atiyah. *The geometry and physics of knots*. Lezioni Lincee. [Lincei Lectures]. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Bir13] George D. Birkhoff. A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Ann. of Math. (2)*, 14(1-4):42–46, 1912/13.
- [BT69] G. Berman and W. T. Tutte. The golden root of a chromatic polynomial. *J. Combinatorial Theory*, 6:301–302, 1969.
- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Fun21] Louis Funar. On mapping class group quotients by powers of dehn twists and their representations. In *Topology and geometry - A collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*, ed. A. Papadopoulos, pages 273–308. European Mathematical Society Publishing House, Berlin, 2021.
- [Hir83] F. Hirzebruch. Arrangements of lines and algebraic surfaces. In *Arithmetic and geometry, Vol. II*, volume 36 of *Progr. Math.*, pages 113–140. Birkhäuser, Boston, Mass., 1983.
- [Lic97] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [Mar21] Julien Marché. Introduction to quantum representations of mapping class groups. In *Topology and geometry - A collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*, ed. A. Papadopoulos, pages 273–308. European Mathematical Society Publishing House, Berlin, 2021.
- [Mas03] Gregor Masbaum. Quantum representations of mapping class groups. In *Groupes et géométrie*, volume 2003 of *SMF Journ. Annu.*, pages 19–36. Soc. Math. France, Paris, 2003.
- [Tur16] Vladimir G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, 2016. Third edition [of MR1292673].
- [Tut54] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math.*, 6:80–91, 1954.
- [Tut70] W. T. Tutte. On chromatic polynomials and the golden ratio. *J. Combinatorial Theory*, 9:289–296, 1970.
- [Wit89] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.