

Comportement à l'infini du graphe gordien des nœuds ^{*}

Julien Marché [†]

8 mars 2005

Abstract

We study the gordian graph of all knots in \mathbb{R}^3 : two knots are adjacent if they differ by a single crossing change. We prove that this graph contains isometrically an infinite countable tree with infinite valency, and that the complement of any finite subset is connected.

Résumé

On étudie le graphe gordien des nœuds dans \mathbb{R}^3 : deux nœuds sont adjacents si on passe de l'un à l'autre en changeant un croisement. On prouve que ce graphe contient isométriquement un arbre infini dénombrable de valence infinie et que le complémentaire de tout sous-ensemble fini est connexe.

Soit \mathcal{K} l'ensemble des classes d'isotopie de nœuds orientés dans S^3 . On considère le *graphe gordien* dont les sommets sont les éléments de \mathcal{K} et tel que deux nœuds sont reliés par une arête si on peut passer de l'un à l'autre en changeant un croisement. On notera U le nœud trivial et d_K la distance induite sur \mathcal{K} par le graphe. On appelle gordien tout nœud L vérifiant $d_K(L, U) = 1$.

Depuis que le graphe gordien a été introduit (voir [3]), peu de résultats ont été obtenus sur sa structure. On s'est essentiellement intéressé à la structure locale du graphe en montrant par exemple que chaque arête de \mathcal{K} fait partie d'un sous-graphe complet infini.

A contrario, J.M. Gambaudo et É. Ghys ont proposé de s'intéresser au comportement à l'infini du graphe, c'est-à-dire, à quasi-isométrie près. Dans cette optique, ils ont prouvé qu'on pouvait plonger le graphe \mathbb{Z}^n quasi-isométriquement dans \mathcal{K} pour toute valeur de n ([1, 2]).

Répondant à une question d'É. Ghys, on démontre dans cet article que l'on peut plonger isométriquement un arbre infini dénombrable de valence infinie dans le graphe gordien. Avec les mêmes techniques, on prouve que le complémentaire de tout ensemble fini dans \mathcal{K} est connexe.

On rappelle qu'il existe un invariant de K appelé *signature* $\sigma_K : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$. Cet invariant vérifie pour tout $z \in S^1$ et $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ l'inégalité suivante:

$$|\sigma_{K_1}(z) - \sigma_{K_2}(z)| \leq 2d_{\mathcal{K}}(K_1, K_2).$$

^{*}*keywords* : nœud gordien, quasi-isométrie, signature. 2000 *Mathematics Subject Classification* : 57M27.

[†]Institut de Mathématiques de Jussieu, Équipe "Topologie et Géométries Algébriques" Case 7012, Université Paris VII, 75251 Paris CEDEX 05, France. e-mail : marche@math.jussieu.fr

1 Plongement d'un arbre infini dans le graphe gordien

Soit T l'arbre trivalent infini dénombrable sur lequel on a ajouté un sommet sur une arête appelé *racine*. De cette manière, chaque sommet a deux *enfants* et tous les sommets ont un unique *parent* sauf la racine.

Théorème 1.1 *Il existe un plongement quasi-isométrique de T dans \mathcal{K} .*

Remarque 1 *La même preuve permet de montrer que l'on peut plonger un arbre régulier de valence infinie. Ce plongement est en fait isométrique si on multiplie par 2 la distance de T .*

Le reste de cette partie consiste à prouver cette proposition. La méthode consiste à construire ce plongement récursivement à partir du nœud trivial qui est associé à la racine. Chaque autre sommet sera obtenu en faisant la somme connexe de son parent avec deux nœuds gordiens de sorte que sa signature soit “assez compliquée”. Pour préciser ceci, on utilise le lemme suivant qui sera prouvé dans la troisième section.

Lemme 1.2 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- Soit Δ un polynôme normalisé, c'est-à-dire un polynôme $\Delta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ vérifiant $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$ et $\Delta(1) = 1$. Il existe alors un nœud gordien qui admette Δ pour polynôme d'Alexander.
- La fonction signature d'un nœud gordien de polynôme d'Alexander normalisé Δ est la fonction qui à tout nombre complexe z de module 1 associe $1 - \text{Sign}(\Delta(z))$ ou la fonction opposée.

Considérons pour tout p impair le polynôme normalisé du nœud torique de paramètres $(p, 2)$ défini par $D_p(t) = t^{-(p-1)/2}(t^p + 1)/(t + 1)$. Grâce au lemme on peut choisir un nœud K_p qui est gordien et a D_p pour polynôme d'Alexander (K_p n'est pas le nœud torique de paramètres $(p, 2)$ car ce dernier n'est pas gordien). On suppose de plus que la signature de K_p est positive (sinon, on prend son image dans un miroir). Le dessin ci-dessous représente les endroits du cercle où la signature de K_p vaut 2 (elle vaut 0 sur le complémentaire et 1 aux bornes). Notons A_p ce sous-ensemble du cercle.

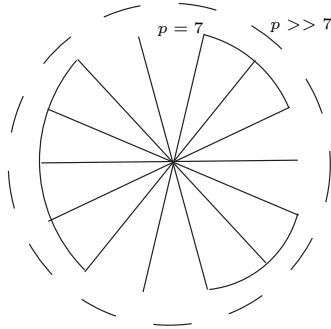


Figure 1: Signature des nœuds K_p

Lemme 1.3 *On peut trouver une suite strictement croissante de nombres impairs p_n telle que pour toute suite finie $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$, on ait:*

$$A_{p_{i_1}}^{\epsilon_1} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}}^{\epsilon_k} \neq \emptyset$$

où $A_p^1 = A_p$ et A_p^{-1} est le complémentaire de A_p .

Démonstration: On construit cette suite récursivement. Prenons par exemple $p_1 = 3$. En choisissant p_2 assez petit, on peut s'assurer que chaque composante connexe de A_{p_1} et $A_{p_1}^{-1}$ intersecte à la fois A_{p_2} et $A_{p_2}^{-1}$. On continue cette construction à partir de p_2 , ce qui prouve le lemme. On peut par exemple définir p_n par la formule $p_n = (2n+1)(2n-1) \dots 3$ pour $n \geq 1$. \square

On construit maintenant une application $\phi : T \rightarrow \mathcal{K}$. On numérote toutes les arêtes de T . Chaque sommet x de T différent de la racine est relié à son parent y par une arête numérotée n . Notons $\#$ la somme connexe et \overline{K} l'image miroir d'un nœud K . On pose

$$\phi(x) = \phi(y) \# K_{p_{2n}} \# \overline{K_{p_{2n+1}}}.$$

Cette construction est résumée dans la figure 1.

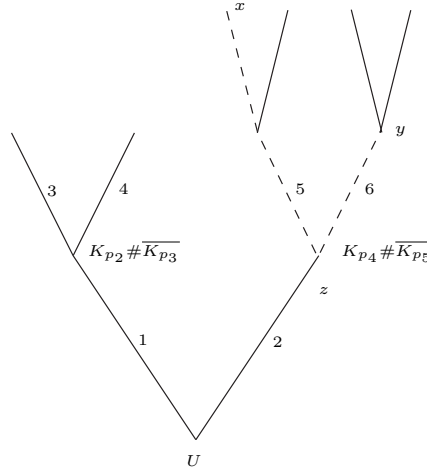


Figure 2: Le plongement ϕ

Comme pour tout p le nœud K_p est gordien, on a $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \leq 2$. Ainsi, on a $\forall x, y \in T$, $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \leq 2d_T(x, y)$. On passe maintenant à l'autre inégalité. Prenons deux éléments quelconques x et y de T et notons z leur premier parent commun. Les nœuds $\phi(x)$ et $\phi(y)$ sont obtenus à partir de $\phi(z)$ par une suite de sommes connexes. Pour expliciter celle-ci, supposons que

$$\phi(x) = \phi(z) \# K_{p_{2n_1}} \# \overline{K_{p_{2n_1+1}}} \# \dots \# K_{p_{2n_k}} \# \overline{K_{p_{2n_k+1}}} \text{ et}$$

$$\phi(y) = \phi(z) \# K_{p_{2m_1}} \# \overline{K_{p_{2m_1+1}}} \# \dots \# K_{p_{2m_l}} \# \overline{K_{p_{2m_l+1}}} \text{ de sorte que } d_T(y, z) = k + l.$$

D'après le lemme, $A_{p_{2n_1}} \cap A_{p_{2n_1+1}}^{-1} \cap \dots \cap A_{p_{2n_k}} \cap A_{p_{2n_k+1}}^{-1} \cap A_{p_{2m_1}}^{-1} \cap A_{p_{2m_1+1}} \cap \dots \cap A_{p_{2m_l}}^{-1} \cap A_{p_{2m_l+1}} \neq \emptyset$. On choisit θ dans cet ensemble de sorte que $\sigma_{\phi(x)}(\theta) = \sigma_{\phi(z)}(\theta) + 4k$ et $\sigma_{\phi(y)}(\theta) = \sigma_{\phi(z)}(\theta) - 4l$.

L'identité $|\sigma_{\phi(x)}(\theta) - \sigma_{\phi(y)}(\theta)| = 4(k + l) = 4d_T(x, y)$ prouve que $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \geq 2d_T(x, y)$. L'application ϕ vérifie ainsi $\forall x, y \in T$, $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) = 2d_T(x, y)$. C'est donc bien une quasi-isométrie.

2 Connexité à l'infini

Toujours à l'aide du lemme, on peut prouver le résultat suivant:

Proposition 2.1 *Le complémentaire de tout ensemble fini de \mathcal{K} est connexe.*

Démonstration: Soit $\{L_1, \dots, L_n\}$ un sous-ensemble fini de \mathcal{K} . On note alors Δ_i le polynôme d'Alexander de K_i et $l(\Delta_i)$ la plus petite distance entre deux racines de Δ_i consécutives sur le cercle unité. Enfin, on pose $l = \min_i l(\Delta_i)$. Pour p assez grand, on peut trouver comme dans la section précédente un nœud gordien K_p de polynôme d'Alexander D_p tel que $l(D_p) < l$.

Par des simples considérations de signature, on remarque que pour tout i entre 1 et n , on a $L_i \# K_p \notin \{L_1, \dots, L_n\}$.

On conclut alors de la façon suivante: soit $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ un sous-ensemble fini de \mathcal{K} , et $L_\alpha, L_\beta \notin \mathcal{L}$. Par connexité de \mathcal{K} , il existe un chemin $L_\alpha = L_{\alpha_0}, L_{\alpha_1}, \dots, L_{\alpha_k} = L_\beta$ de nœuds contigus.

Appliquant la remarque ci-dessus à l'ensemble $\mathcal{L} \cup \{L_{\alpha_i}\}$, on trouve un nœud gordien K_p qui vérifie $L_{\alpha_i} \# K_p \notin \mathcal{L}$ pour tout i . Le chemin $L_{\alpha_0}, L_{\alpha_0} \# K_p, \dots, L_{\alpha_k} \# K_p, L_{\alpha_k}$ est un chemin qui relie L_α et L_β dans le complémentaire de \mathcal{L} . \square

3 Démonstration du lemme 1.2

Ce résultat utilise des techniques très classiques et, bien que non publié à notre connaissance, il est certainement connu des spécialistes. Par souci de complétude, on donne ici une preuve. Considérons le nœud de la figure 3:

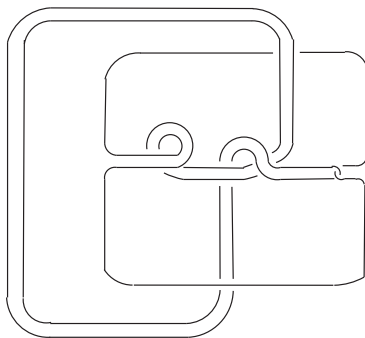


Figure 3: Exemple de nœud gordien

C'est clairement un nœud gordien, et un calcul montre que son polynôme d'Alexander est $-t^{-2} + 3t^{-1} - 3 + 3t - t^2$. Cette construction suggère la généralisation donnée par la figure 4. On utilise pour les calculs la présentation chirurgicale des nœuds. C'est une manière alternative aux matrices de Seifert d'accéder au polynôme d'Alexander et à la signature des nœuds.

Un nœud gordien K se défait par changement d'un croisement. Cela signifie qu'il existe une courbe parallélisée L homologue à 0 dans le complémentaire du nœud trivial qui donne par chirurgie la variété $S^3 \setminus K$.

L'interprétation de la signature et du polynôme d'Alexander de K en fonction de la matrice d'enlacement équivariant des composantes de chirurgie (voir [1]) nous donne l'information clé suivante: soit P l'auto-enlacement équivariant de L . C'est un polynôme de Laurent en t qui vérifie $\Delta(K) = P(1).P$ et $\sigma_K(z) = \text{Sign}(P(z)) - \text{Sign}(P(1)) = \pm(1 - \text{Sign}(\Delta(z)))$.

Il reste donc à établir le premier point. Cela revient à prouver que pour tout polynôme normalisé P , on peut construire une composante de chirurgie non nouée et homologue à 0 dans le complémentaire du nœud trivial qui a P pour auto-enlacement équivariant.

Fixons une famille d'entiers a_0, \dots, a_n et considérons la courbe de la figure 4 dans laquelle on a identifié la partie supérieure et la partie inférieure. De cette manière, la courbe est naturellement plongée dans un tore plein.

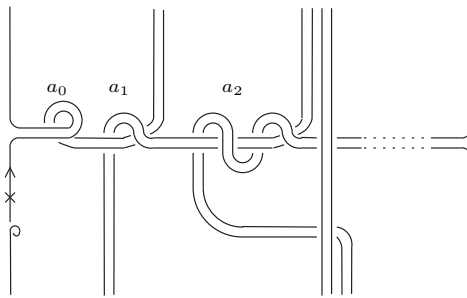


Figure 4: Courbe de chirurgie

On calcule l'auto-enlacement équivariant de cette courbe en comptant le nombre de points d'intersections avec l'information relative au plongement. Utilisant le formalisme des diagrammes de cordes, on code les croisements à l'aide du diagramme de la figure 5.

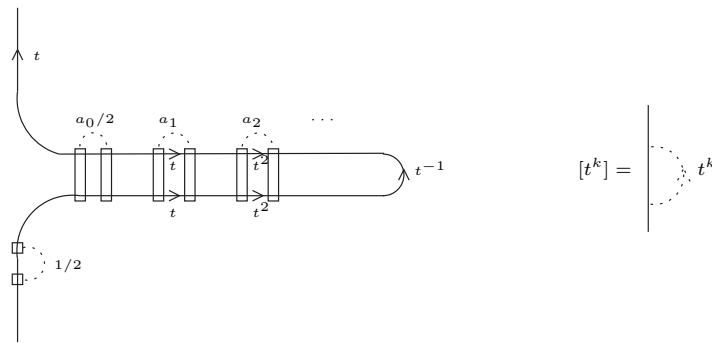


Figure 5: Calcul de l'auto-enlacement équivariant

Le symbole t désigne le générateur du groupe fondamental du tore plein dirigé vers le haut. Les boîtes reliées par une ligne pointillée désignent l'ensemble des arêtes devant être relié par un diagramme de cordes. Chaque corde relie deux points sur la courbe L : le coloriage de la corde désigne la classe d'homotopie du cycle formé par la composante coupée et la corde.

En développant ces diagrammes, on obtient le calcul détaillé dans la figure 6.

Dans les notations de la figure 5, le diagramme de corde de la figure 6 est égal à l'expression $[t^i] - [t^i t] - [t^{-i} t] + [t^{-i}] = [(t^i + t^{-i})(1 - t)]$.

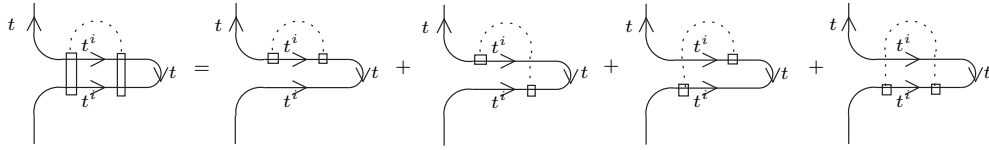


Figure 6: Contributions à l'auto-intersection

Au final, le diagramme de corde associé à la figure 5 est $\frac{1}{2}[1] + \frac{a_0}{2}[2(1-t)] + \sum_{i \geq 1} a_i[(t^i + t^{-i})(1-t)]$.

On obtient le polynôme d'Alexander en prenant la partie symétrique de cette expression à savoir $1 + a_0(2 - t - t^{-1}) + \sum_{i \geq 1} a_i(t^i + t^{-i})(2 - t - t^{-1})$. Or, il est clair que tout polynôme normalisé s'écrit de manière unique sous cette forme pour un choix convenable des coefficients a_i . Cela prouve bien que tout polynôme normalisé est le polynôme d'Alexander d'un nœud gordien.

Remerciements

Je tiens à remercier É. Ghys pour avoir initié et suivi cette étude, ainsi que G. Masbaum et P. Vogel pour leurs remarques utiles.

References

- [1] S. GAROUFALIDIS et A. KRICKER – “A surgery view of boundary links”, *Math. Ann.* **327** (2003), no. 1, p. 103–115.
- [1] J.M. GAMBAUDO et É. GHYS – “Braids and signatures” à paraître dans le Bulletin de la SMF (2005)
- [2] É. GHYS – Communication privée (2004)
- [3] M. HIRASAWA et Y. USHIDA – “The Gordian complex of knots”, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no. 3, p. 363–368.
- [4] D. ROLFSEN – *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.