

MÉMOIRE

présenté pour obtenir

LE DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

par Julien MARCHÉ

LIMITE SEMI-CLASSIQUE DES THÉORIES QUANTIQUES DES CHAMPS TOPOLOGIQUES

Soutenue le 8 décembre 2011 devant un jury composé de

Jørgen Ellegard ANDERSEN	Professeur, Aarhus University
Nicolas BERGERON	Professeur, Université Pierre et Marie Curie
Louis FUNAR	Directeur de recherches CNRS, Institut Fourier
Thang Tu Quoc LE	Professeur, Georgia Institute of Technology
Xiaonan MA	Professeur, Université Paris Diderot
Pierre VOGEL	Professeur, Université Paris Diderot

Rapporteurs

Louis FUNAR	Directeur de recherches CNRS, Institut Fourier
Thang Tu Quoc LE	Professeur, Georgia Institute of Technology
Vladimir TOURAEV	Professeur, Indiana University

Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à Pierre Vogel, Gregor Masbaum et Christian Blanchet. Ils forment le cadre dans lequel j'ai fait toute ma recherche et je leur suis très reconnaissant pour l'atmosphère stimulante qu'ils ont créée au cours de ma thèse, du séminaire de topologie et de tant de colloques depuis bientôt dix ans.

Je suis très honoré que Louis Funar, Thang Tu Quoc Le et Vladimir Touraev aient accepté d'écrire les rapports de cette habilitation et je les remercie pour le temps et l'attention qu'ils ont consacrés à cette tâche. Je remercie en particulier Thang Tu Quoc Le pour avoir accepté de faire ce travail en si peu de temps. Merci également à Jørgen Ellegard Andersen, Nicolas Bergeron, Xiaonan Ma et à nouveau Louis Funar, Thang Tu Quoc Le et Pierre Vogel d'avoir accepté d'être membres du jury.

Mes remerciements vont aussi à mes collaborateurs, Sebastien Baader, François Costantino, Majid Narimannejad, Thierry Paul, Pierre Will et surtout Laurent Charles pour tout ce temps partagé à faire - entre autres - des mathématiques, ainsi qu'à tous ceux trop nombreux pour être cités avec lesquels j'ai eu le plaisir de discuter de mathématiques ou d'autres choses.

Merci à l'équipe Analyse algébrique de l'UPMC pour l'ambiance chaleureuse et propice à la recherche dont j'ai pu profiter pendant quatre ans ainsi qu'aux membres du laboratoire du CMLS. Merci à Catherine Salzard, puis Michèle Lavalette et Carole Juppín pour leur aide efficace dans les tâches administratives et leur bonne humeur.

Je voudrais enfin remercier tous mes amis (dont les membres de Popayan et Madera Suena) pour leur soutien, les moments de détente extra-mathématiques et exprimer toute mon affection à mes proches. Enfin merci à Marianne pour -entre autres- m'avoir constamment poussé à écrire ce mémoire d'habilitation.

Chapitre 1

Introduction

La théorie quantique des champs topologique (TQFT) est une théorie relativement récente puisqu'elle voit le jour avec l'article d'E. Witten en 1989, [W89]. Son travail est motivé par la recherche d'une interprétation physique du polynôme de Jones.

Rappelons que si on peut dire que la théorie des nœuds naît à la fin du 19^{ème} siècle avec les travaux de W. Thomson et P. G. Tait, elle ne se développe sur des bases solides qu'au début du 20^{ème} siècle avec les travaux de M. Dehn, J. A. Alexander et K. Reidemeister. Les outils mis en place à l'époque tels que le polynôme d'Alexander allient à la fois une grande simplicité de calcul et une interprétation géométrique simple comme en témoignent les très nombreuses façons de les calculer. Le développement conséquent de la topologie algébrique au cours des décennies suivantes a curieusement très peu apporté à la théorie des nœuds qui n'a pas beaucoup progressé jusqu'à l'introduction du polynôme de Jones en 1984.

Ce polynôme a trois traits particuliers : il est en théorie très facile à calculer par un procédé combinatoire, ce procédé est très inefficace quand le nœud auquel on l'applique est complexe et l'« information topologique » qu'il contient est très confuse - il est difficile de savoir par exemple dans quelle mesure ce polynôme distingue les nœuds. La découverte du polynôme de Jones a engendré celle de nombreux autres invariants qui partagent ces trois propriétés et que l'on qualifie souvent de « quantiques ». Peu de temps après, V. A. Vassiliev met en place la théorie des invariants de type fini. Ces derniers invariants sont fortement reliés aux invariants quantiques mais il n'en sera presque pas question dans ce mémoire.

Influencé par les travaux de M. Atiyah, E. Witten propose une interprétation de l'évaluation du polynôme de Jones aux racines de l'unité en terme d'une « théorie de Chern-Simons quantique » associée à un groupe G , ici SU_2 , et un niveau k . Son approche - basée sur l'utilisation des intégrales de Feynman - est non rigoureuse mais généralise le polynôme de Jones à un invariant de variétés de dimension 3 munis d'entrelacs coloriés par les représentations de G . E. Witten met en évidence une axiomatique très contraignante satisfaite par ces invariants que M. Atiyah formalise un peu plus tard en une série d'axiomes qui forment depuis la définition mathématique de la TQFT.

A partir de cette axiomatique, N. Y. Reshitikhin et V. G. Turaev définissent rigou-

reusement la TQFT à partir de la théorie des représentations des groupes quantiques [RT91]. Ces travaux seront repris en particulier par R. Kirby et P. Melvin dans [KM91] et C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel dans [BHMV]. C'est cette dernière construction que l'on prendra comme référence dans ce mémoire. De nombreux travaux ont généralisé ces constructions, dégagant la structure de catégorie modulaire comme la donnée « algébrique » fondamentale permettant de construire une TQFT. Ce ne sont pas ces questions qui sont traitées dans ce mémoire mais plutôt le problème de l'interprétation géométrique de la TQFT. Cette dernière étant construite de façon très indirecte et combinatoire (notamment via la présentation chirurgicale des variétés) il est particulièrement difficile de dire quelle information contiennent les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev de niveau k des variétés de dimension 3 comme le font R. Kirby et P. Melvin dans [KM91] pour $G = \text{SU}_2$ et $k \leq 6$.

La théorie quantique d'E. Witten a pour « constante de Planck » le paramètre $\hbar = \frac{1}{k}$. Il est attendu que la TQFT se comporte dans la limite $k \rightarrow \infty$ comme une théorie des champs « classique ». Le formalisme des intégrales de chemins allié à la méthode de la phase stationnaire formelle permet d'identifier les espaces de phases concernés à des espaces de représentations de groupes de surfaces dans G tandis que les entrelacs correspondent à des fonctions traces sur ces espaces. Un enjeu des travaux exposés dans ce mémoire est d'expliquer rigoureusement ces relations. L'étude de la limite semi-classique permet d'extraire des invariants quantiques des invariants de nature plus géométrique dont les propriétés sont mieux comprises. Donnons deux exemples qui seront développés dans ce mémoire.

- Pour toute surface Σ de genre g , la TQFT induit une famille de représentations projectives du groupe de difféotopie de Σ noté $\text{MCG}(\Sigma)$ indexée par un niveau $k \in \mathbb{N}$. Le théorème de fidélité asymptotique affirme que l'intersection des noyaux de ces représentations pour tous les niveaux k est réduit à au plus deux éléments. Ce résultat, prouvé par J. E. Andersen [A06, FWW] est redémontré dans [MN08] par une méthode élémentaire fortement liée à la géométrie des espaces de représentations.
- Pour toute variété de dimension 3, l'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev noté $Z_k(M)$ a d'après une conjecture d'E. Witten un développement asymptotique explicite faisant intervenir les représentations de $\pi_1(M)$ dans G , leurs invariants de Chern-Simons et leurs torsions de Reidemeister. Dans un cadre combinatoire, ce résultat n'a été prouvé que pour certaines variétés de Seifert. On met en place dans [CM11a, CM11b] une méthode qui la démontre pour presque tous les remplissages du nœud de huit.

Ce mémoire introductif présente mes travaux ayant trait à la TQFT dans un ordre qui répond à la logique de la quantification géométrique. Cette procédure développée par B. Kostant et J. M. Souriau dans les années 1970 est bâtie sur l'idée que tout espace des phases peut être « quantifié » et qu'en quelque sorte on peut reconstruire le « quantique » à partir du « classique ». Cette théorie a été fructueuse pour l'étude des représentations de groupe construites à partir des orbites coadjointes (méthode des orbites) mais elle n'a pas eu tous les succès escomptés. En ce qui concerne les espaces de représentations, elle donne de très bons résultats ce qui justifie le découpage de ce mémoire en trois parties : classique, préquantique et quantique. Dans une certaine

mesure, chaque section correspond à un article. Les trois articles présentés qui ne concernent pas la TQFT sont résumés à la fin du mémoire.

Le premier chapitre présente les espaces de représentations de façon élémentaire. Dans la première section on rappelle certaines propriétés concernant la structure différentiable des espaces de représentations et la cohomologie tordue telles qu'expliquées par W. Goldman dans [G84]. On définit ensuite les modules d'écheveaux : on rappelle leurs propriétés élémentaires ainsi que leur lien avec l'algèbre des fonctions trace à savoir le théorème de Bullock, cf [Bul97]. La troisième section présente une structure omniprésente dans ce mémoire : le système intégrable formé par les « fonctions traces » associées à une décomposition en pantalons d'une surface. La présentation suit les travaux de W. Goldman, L. Jeffrey et J. Weitsman, [G86, JW94]. Enfin, on explique un résultat démontré dans [CM09] concernant la décomposition en séries de Fourier des fonctions traces par rapport aux coordonnées angulaires du système intégrable. On en déduit que les fonctions traces associées aux multicourbes sont linéairement indépendantes, un résultat conjecturé dans [PS00]. La dernière section concerne les compléments de nœuds. On énonce une conjecture concernant la structure du module d'écheveau des compléments de nœuds. Enfin on explique la stratégie mise en œuvre dans [M10a] pour démontrer cette conjecture dans le cas des nœuds toriques ainsi que certaines perspectives de recherche.

Le deuxième chapitre concerne la structure préquantique des espaces des modules. On entend par là la donnée d'un fibré préquantifiant, c'est-à-dire un fibré en droite hermitien muni d'une connexion dont la courbure représente la forme symplectique, ainsi qu'une structure métaplectique. La première section expose les généralités de la théorie classique de Chern-Simons. Suivant [AB83], on explique comment la théorie de jauge fournit naturellement une structure symplectique sur l'espace de représentations par quotient symplectique d'un espace de connexions (de dimension infinie). Puis on rappelle comme dans [Fre95] que la fonctionnelle de Chern-Simons définit un fibré préquantifiant sur l'espace des représentations. La deuxième section explique les résultats obtenus dans [M10b] : il s'agit d'expliquer et de démontrer de façon élémentaire une formule simpliciale due à W. Neumann et implémentée dans Snappea. Cette formule calcule l'invariant de Chern-Simons d'une variété de dimension 3 munie d'une représentation à valeurs dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ à partir d'une triangulation décorée de la variété. La troisième section concerne une étude des structures métaplectiques sur les espaces de modules. On met en valeur l'existence de ces structures pour les espaces de modules d'une façon plus directe que la méthode connue qui passait par un calcul de classe de Chern. On en déduit une détermination des fibres de Bohr-Sommerfeld avec correction métaplectique dans le système intégrable des espaces de représentations. Ce résultat généralise un théorème de L. Jeffrey et J. Weitsman [JW92]. Enfin la dernière section concerne l'algèbre de Kauffman d'une surface aux racines quatrièmes de l'unité. On donne plusieurs descriptions de cette structure qui font intervenir un groupe de type Heisenberg noté \hat{H} , extension centrale de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ par \mathbb{Z}_4 . C'est le pendant géométrique d'un phénomène observé dans [BHMV] (version topologique) et [AM99] (version géométrie algébrique).

Le troisième chapitre concerne la TQFT proprement dite. Dans la première section, on explique brièvement la manière dont cette théorie a été introduite par E. Witten

et les propriétés axiomatiques qui s'en déduisent. On définit alors formellement la TQFT par cette axiomatique, dont on présente les conséquences les plus importantes : invariants des variétés fermées, représentation des groupes de difféotopie, formule de collage. On passe ensuite brièvement en revue la construction combinatoire proposée dans [BHMV]. La deuxième section expose le résultat démontré dans [MN08], à savoir la fidélité asymptotique des représentations quantiques. Ce théorème est assez détaillé car sa courte preuve utilise les notions exposées dans le premier chapitre. On donne ensuite une généralisation de cette formule pour des suites de TQFT tordues par l'action du groupe de Galois cyclotomique, un sujet encore assez peu exploré. La troisième section présente les résultats obtenus dans [CM11a, CM11b]. Il s'agit d'étudier la limite semi-classique de l'état d'un nœud, c'est-à-dire l'image par la TQFT du complémentaire d'un nœud sur son bord. On explique une conjecture générale qui prédit que l'état d'un nœud est un « état Lagrangien » qui se concentre sur la projection de la variété des caractères SU_2 d'un nœud sur son bord, avec pour phase la fonction de Chern-Simons et pour symbole la torsion de Reidemeister. Utilisant les relations aux q -différences satisfaites par les polynômes de Jones colorés et les résultats connus sur les opérateurs de Toeplitz, on en déduit cette conjecture pour le nœud de trèfle et le nœud de huit. On explique que cette conjecture implique la conjecture de Witten pour les remplissages de Dehn du nœud (sous des hypothèses peu restrictives). Enfin la dernière section expose les résultats de l'article [MP11]. Étant donné une surface Σ , la TQFT en niveau k fournit un espace vectoriel hermitien $V_k(\Sigma)$ et pour toute courbe simple $\gamma \subset \Sigma$ un opérateur hermitien $Z_k(\gamma) \in \text{End } V_k(\Sigma)$ dit opérateur courbe. On propose une conjecture générale concernant la matrice d'un opérateur courbe dans la base canonique de $V_k(\Sigma)$ qu'on démontre pour les « petites surfaces », c'est-à-dire le tore épointé et la sphère privée de 4 points. On en déduit dans ce cas là que les opérateurs courbe sont des opérateurs de Toeplitz, ce qui ouvre la porte à des estimations de coefficients comme les 6j-symboles quantiques qui ont de multiples applications en TQFT.

Cette introduction serait incomplète si on ne mentionnait pas l'approche géométrique de la TQFT. En effet, il était connu de E. Witten [W89] et cela a été popularisé par M. Atiyah [A90] que les espaces vectoriels associés aux surfaces par la TQFT sont isomorphes aux blocs conformes de la théorie conforme des champs, ou aux espaces de sections holomorphes du fibré déterminant sur l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang 2 sur une surface de Riemann. Ces modèles sont plus géométriques et du coup l'analyse semi-classique s'y applique plus naturellement mais ils ne permettent pas d'appréhender toute la structure de la TQFT : pour l'instant on ne sait construire que la représentation du groupe de difféotopie, via la connection de Hitchin [H90]. Les récents travaux de J. E. Andersen et K. Ueno semblent établir un isomorphisme entre ces théories, [AU07, AU08, AU10, AU11]. Beaucoup des résultats présentés dans cette habilitation ont un "pendant géométrique", en particulier J. E. Andersen a beaucoup étudié des opérateurs de Toeplitz associés aux fonctions trace qui sont potentiellement isomorphes aux opérateurs courbe. Mentionnons à ce sujet les articles [A05, A09, A10, A11].

Chapitre 2

Espaces de représentations

2.1 Généralités

Dans toute ce mémoire, G désigne le groupe SU_2 sauf mention explicite du contraire. Ce choix tient plus à un souci de concision qu'à une hypothèse technique car beaucoup de résultats se généralisent à tout groupe compact connexe et simplement connexe.

Soit π un groupe de présentation finie. En pratique, le groupe π sera le groupe fondamental d'une variété compacte ou d'un CW-complexe fini. On note $\text{Rep}(\pi, G)$ l'ensemble des représentations de π dans G et $\mathcal{M}(\pi, G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de représentations. Si X est un espace topologique ayant un nombre fini de composantes connexes $X = \bigcup X_i$ où chaque composante X_i a un groupe fondamental de présentation finie, on note

$$\text{Rep}(X, G) = \prod_i \text{Rep}(\pi_1(X_i), G) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(X, G) = \prod_i \mathcal{M}(X_i, G).$$

2.1.1 Structure algébrique

Comme G est un groupe algébrique et que π est de présentation finie, les espaces $\text{Rep}(\pi, G)$ et $\mathcal{M}(\pi, G)$ sont munis d'une structure de variété algébrique réelle.

Il est plus agréable dans cette partie de remplacer G par son complexifié $G_{\mathbb{C}} = \text{SL}_2(\mathbb{C})$. Notons $\mathcal{T}(X, G_{\mathbb{C}})$ l'algèbre des fonctions régulières sur la variété algébrique $\mathcal{M}(X, G_{\mathbb{C}})$. On construit facilement un élément $f_{\gamma} \in \mathcal{T}(X, G_{\mathbb{C}})$ pour tout élément $\gamma \in \pi$ par la formule

$$f_{\gamma}(\rho) = -\text{Tr} \rho(\gamma) \quad \forall \rho \in \text{Rep}(\pi, G_{\mathbb{C}})$$

On appelle f_{γ} la « fonction trace » associée à γ . Le signe « $-$ » sera justifié dans la prochaine section. On a le théorème suivant :

Théorème. *L'algèbre $\mathcal{T}(X, G_{\mathbb{C}})$ est linéairement engendrée par les fonctions traces.*

Il s'agit d'un résultat très connu de théorie des invariants dont une preuve est rappelée dans [CM09], Section 6. Le fait que le produit de deux fonctions traces soit

une combinaison de fonctions traces est une conséquence d'une identité de traces bien connue, elle-même conséquence de l'identité de Cayley-Hamilton.

$$\mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AB^{-1}) \quad \text{pour tous } A, B \in G_{\mathbb{C}}.$$

2.1.2 Cohomologie tordue

Rappelons que $G = \mathrm{SU}_2$ et que π est un groupe de présentation finie.

- On dit que $\rho \in \mathrm{Rep}(\pi, G)$ est centrale si elle prend ses valeurs dans le centre de G .
- Elle est dite abélienne si elle prend ses valeurs dans un sous-groupe commutatif de G .
- Enfin on dit que ρ est irréductible si la représentation de π dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ induite par l'inclusion $\mathrm{SU}_2 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est irréductible, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de droite invariante.

On observe qu'une représentation non abélienne est nécessairement irréductible : ce fait est bien particulier à SU_2 . On note $\mathcal{M}(X, G) = \mathcal{M}^{\mathrm{ab}}(X, G) \cup \mathcal{M}^{\mathrm{irr}}(X, G)$ la décomposition en représentations abéliennes et irréductibles.

Soit X un espace topologique homotopiquement équivalent à un CW-complexe fini et ρ un élément de $\mathcal{M}(X, G)$. On définit l'homologie et la cohomologie de X à coefficients tordus de la façon suivante.

Soit V une représentation de G . Supposons que X est connexe et admet pour revêtement universel l'espace \tilde{X} . Le complexe de chaînes singulières $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module et on pose

$$H_*(X, V) = H_* \left(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} V \right) \text{ et } H^*(X, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} (C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}), V)$$

On définit de même l'homologie et la cohomologie tordue de paires d'espaces (X, Y) . Si X est une variété orientée à bord de dimension n , la dualité de Poincaré fournit un isomorphisme

$$H^k(X, V) \simeq H_{n-k}(X, \partial X; V) \text{ et } H^k(X, \partial X; V) \simeq H_{n-k}(X, V)$$

Soit V et W deux représentations de π de dimension finie sur \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) et supposons que l'on a une forme bilinéaire invariante et non-dégénérée qui à $(x, y) \in V \times W$ associe $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$. L'évaluation de la cohomologie sur l'homologie composée avec la forme bilinéaire fournit une dualité parfaite :

$$H^k(X, V) \times H_k(X, W) \rightarrow \mathbb{K}.$$

2.1.3 Structure différentiable et symplectique

Soit x_1, \dots, x_n des générateurs de π et r_1, \dots, r_m des relations de telle sorte que

$$\pi = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle.$$

Notons $R_i : G^n \rightarrow G$ l'application qui à un n -uplet $g = (g_1, \dots, g_n)$ associe le produit obtenu en substituant x_i par g_i dans le mot r_i . On obtient

$$\text{Rep}(\pi, G) = \{g \in G^n \text{ tel que } R_i(g) = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, m\}$$

En particulier, $\text{Rep}(\pi, G)$ est une sous-variété lisse de G^n en g si l'application

$$R : \begin{cases} G^n \rightarrow G^m \\ g \mapsto (R_i(g))_{i=1, \dots, m} \end{cases}$$

est une submersion au n -uplet g . Soit $C_g : G \rightarrow G^n$ l'application définie par $C_g(h) = (hg_i h^{-1})_{i=1, \dots, n}$. Si g est un point lisse de $\text{Rep}(\pi, G)$, alors tous ses conjugués le sont aussi. De plus, si la différentielle de C_g en l'identité est injective, alors $[g]$ est un point lisse de $\mathcal{M}(\pi, G)$ et l'espace tangent de $\mathcal{M}(\pi, G)$ en $[g]$ vérifie :

$$T_{[g]}\mathcal{M}(\pi, G) = \ker D_g R / \text{Im } D_1 C_g.$$

Formons un 2-complexe X de la façon suivante : attachons à un point base autant de 1-cellules que de générateurs x_i . Puis pour chaque relation r_i de longueur l_i , attachons un l_i -gone au 1-squelette de X de la façon décrite par r_i . Un calcul standard montre que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} T_1 G & \xrightarrow{D_1 C_g} & T_g G^n & \xrightarrow{D_g R} & T_1 G \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ C^0(X, \text{Ad}_\rho) & \xrightarrow{d} & C_1(X, \text{Ad}_\rho) & \xrightarrow{d} & C^2(X, \text{Ad}_\rho) \end{array}$$

On note $\rho \in \text{Rep}(\pi, G)$ la représentation définie par $\rho(x_i) = g_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Dans ce diagramme, Ad_ρ désigne la représentation adjointe de π définie par $\gamma \cdot \xi = \text{Ad}_{\rho(\gamma)} \xi$ pour tout $\gamma \in \pi$ et tout $\xi \in \mathfrak{su}_2$.

Cette identification montre que si $H^0(X, \text{Ad}_\rho) = H^2(X, \text{Ad}_\rho) = 0$ alors $[\rho]$ est un point lisse de $\mathcal{M}(\pi, G)$ et $T_{[\rho]}\mathcal{M}(\pi, G) = H^1(X, \text{Ad}_\rho)$. Comme

$$H^0(X, \text{Ad}_\rho) = \{\xi \in \mathfrak{su}_2, \rho(\gamma)\xi = \xi \quad \forall \gamma \in \pi\}$$

on en déduit que $H^0(X, \text{Ad}_\rho) = 0$ si et seulement si ρ est irréductible. Ainsi, l'espace des modules $\mathcal{M}(X, G)$ n'est a priori lisse que sur l'ouvert $\mathcal{M}^{\text{irr}}(X, G)$.

Comme première application, considérons le cas où X est une surface de genre au moins 2.

Soit $B : \mathfrak{su}_2 \times \mathfrak{su}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par $B(\xi, \eta) = \text{Tr}(\xi^* \eta) = -\text{Tr}(\xi \eta)$. La dualité de Poincaré nous donne l'isomorphisme $H^2(X, \text{Ad}_\rho) \simeq H^0(X, \text{Ad}_\rho)^*$. On en déduit que si ρ est irréductible, ces deux espaces de cohomologie s'annulent. De plus, la dualité de Poincaré fournit une forme antisymétrique et non dégénérée $\omega_\rho : H^1(X, \text{Ad}_\rho) \times H^1(X, \text{Ad}_\rho) \rightarrow \mathbb{R}$. En résumé, on a le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit X une surface de genre au moins 2. L'espace $\mathcal{M}^{\text{irr}}(X, G)$ est une variété différentiable de dimension $6g - 6$ muni d'une 2-forme antisymétrique non-dégénérée ω .*

Le calcul de la dimension provient d'un calcul de caractéristique d'Euler. En effet, $\chi(X) = 2g - 2$ et $\chi(C_*(X, \text{Ad}_\rho)) = 3(2 - 2g)$. Comme seul le premier groupe de cohomologie est non nul et qu'il s'identifie à l'espace tangent de $\mathcal{M}(X, G)$ en $[\rho]$, on obtient $\dim \mathcal{M}^{\text{irr}}(X, G) = 6g - 6$. Il est intéressant d'observer que les techniques employées jusqu'ici ne permettent pas de montrer que ω est fermée : on obtiendra cela au deuxième chapitre en adoptant le point de vue de la théorie de jauge.

2.2 Modules d'écheveaux

Soit M une variété orientée de dimension 3 (avec éventuellement un bord). On appelle entrelacs en bande dans M une sous-variété difféomorphe à une réunion disjointe d'anneaux orientés. Soit t une variable formelle, on note $K(M, t)$ le $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -module libre engendré par les classes d'isotopie d'entrelacs en bande dans M modulo le sous-module engendré par les relations locales représentées sur la figure 2.1. Cet objet a été introduit indépendamment par V. Turaev et J. H. Przytycki [TU88, HP92].

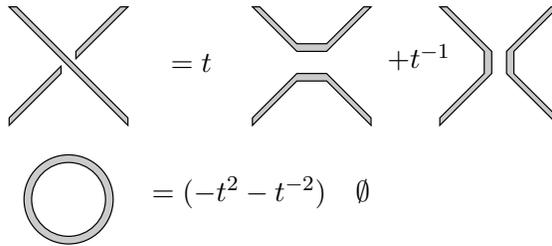


FIGURE 2.1 – Relations de Kauffman

Si $M = \Sigma \times [0, 1]$ où Σ est une surface orientée (avec éventuellement un bord), ce module possède une structure d'algèbre. En effet, si L_1, L_2 sont deux entrelacs dans $\Sigma \times [0, 1]$, on définit leur produit par la relation $L_1 \cdot L_2 = i_1(L_1) \amalg i_2(L_2)$ où $i_1(x, s) = (x, \frac{1+s}{2})$ et $i_2(x, s) = (x, \frac{s}{2})$.

On appelle « multicourbe » dans Σ une sous-variété de dimension 1 dont aucune composante ne borde un disque. A toute multicourbe γ on associe un entrelacs en bande noté aussi γ dans $\Sigma \times [0, 1]$ par la formule $\gamma = \Gamma \times \{\frac{1}{2}\}$ où Γ est un voisinage tubulaire de γ dans Σ .

Tout entrelacs en bande dans $\Sigma \times [0, 1]$ peut à isotopie près être représenté par un diagramme dans Σ , c'est-à-dire une réunion de courbes immergées avec des points doubles transverses sur lesquels on distingue la branche de dessus et la branche de dessous. En appliquant les relations de Kauffman, on constate que tout entrelacs est une combinaison de multicourbes. Le théorème de Reidemeister montre même qu'on a le résultat suivant :

Théorème. *Le module $K(\Sigma \times [0, 1], t)$ est libre et a pour base les classes d'isotopie de multicourbes dans Σ .*

En $t = -1$, le module $K(M, -1)$ a une propriété particulière : si on change un croisement dans un entrelacs en bande de M , on ne change pas sa classe dans $K(M, -1)$.

On peut alors définir une structure d'algèbre sur $K(M, -1)$ de la manière suivante : à deux entrelacs L_1 et L_2 dans M , on associe $L_1 \cup i(L_2)$ où i est une isotopie assurant que $L_1 \cap i(L_2) = \emptyset$. La propriété d'invariance par changement de croisement assure que ce produit est bien défini.

Cette algèbre est intimement reliée à l'algèbre $\mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$. On définit une application $\Phi : K(M, -1) \rightarrow \mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$ de la façon suivante. Soit L un entrelacs en bande, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \pi_1(M)$ des lacets représentant les classes d'homotopie libre des composantes de L . On pose

$$\Phi(L)(\rho) = \prod_{i=1}^n (-\text{Tr } \rho(\gamma_i)) = \prod_{i=1}^n f_{\gamma_i}(\rho).$$

Par extension, on notera aussi $\Phi(L) = f_L$.

Théorème 2. *Soit M une variété orientée de dimension 3. L'application*

$$\Phi : K(M, -1) \rightarrow \mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$$

est un morphisme d'algèbre surjectif dont le noyau est isomorphe au nilradical de $K(M, -1)$.

Ce résultat fondamental de D. Bullock (cf [Bul97]) est néanmoins insuffisant en vue des applications. On conjecture le résultat suivant :

Conjecture 1. *Pour toute variété irréductible M , le $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -module $K(M, t)$ est libre et l'algèbre $K(M, -1)$ est réduite.*

On démontre dans [CM09] et dans [M10a] les résultats suivants :

Théorème 3. *Pour toute surface orientée Σ , l'algèbre $K(\Sigma \times [0, 1], -1)$ est réduite. Soit $E_{p,q}$ le complément dans S^3 du nœud torique de paramètres (p, q) . Cette variété satisfait la Conjecture 1.*

La preuve du premier point passe par l'étude d'un système intégrable associé à $\mathcal{M}(\Sigma, G)$, ce qui fait l'objet du chapitre suivant. Le cas des complémentaires de nœuds fera l'objet de la Section 2.4. Notons que T. Q. T. Le a montré dans [Le06] que la Conjecture 1 était vérifiée pour les compléments des nœuds à deux ponts.

2.3 Système intégrable

2.3.1 Décomposition en pantalons

Soit Σ une surface de genre g munie de points marqués p_1, \dots, p_n . On note $\Sigma' = \Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ et \mathcal{C} une famille maximale de courbes simples de Σ' , n'entourant pas les points marqués, deux à deux non parallèles et disjointes. Alors \mathcal{C} contient nécessairement $3g - 3 + n$ éléments et forme ce que l'on appelle une décomposition en pantalons. La décomposition est convenablement encodée à l'aide d'un graphe trivalent Γ construit de la manière suivante.

- Les sommets de Γ sont les composantes connexes de $\Sigma' \setminus \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}} \gamma$ qui se trouve être une réunion de « pantalons » - c'est-à-dire de sphères privées de trois disques - ainsi que les points marqués. On appelle respectivement ces sommets internes et externes.
- Chaque courbe γ de \mathcal{C} qui borde deux pantalons (éventuellement le même) définit une arête de Γ entre ces deux pantalons dite interne.
Pour tout i , on note γ_i la courbe qui entoure le point p_i . Chaque courbe γ_i définit une arête entre le pantalon qu'elle borde et le point marqué p_i . On l'appelle arête externe.

On note V l'ensemble des sommets de Γ et E l'ensemble des arêtes qu'on identifie aux courbes qu'elles représentent. On définit pour tout $\gamma \in E$ l'application $h_\gamma : \mathcal{M}(\Sigma', G) \rightarrow [0, \pi]$ par $h_\gamma(\rho) = \arccos(\frac{1}{2} \text{Tr} \rho(\gamma))$ ainsi que l'application $H : \mathcal{M}(\Sigma', G) \rightarrow [0, \pi]^E$ par $H(\rho) = (h_\gamma(\rho))_{\gamma \in E}$.

Soit $\Delta \subset [0, \pi]^E$ le polytope défini par les équations suivantes :

$$(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{C}} \in \Delta \iff \forall \gamma, \delta, \zeta \text{ incidentes, on a : } \begin{cases} \alpha_\gamma + \alpha_\delta + \alpha_\zeta \leq 2\pi \\ \alpha_\gamma \leq \alpha_\delta + \alpha_\zeta \end{cases}$$

Théorème 4. [G86, JW94] L'application $H : \mathcal{M}(\Sigma', G) \rightarrow [0, \pi]^E$ a pour image le polytope Δ . Il existe sur $\mathcal{M}(\Sigma', G)$ une structure de Poisson telle que

- les coordonnées de H Poisson-commutent.
- Les feuilles symplectiques sont décrites par les équations $h_{\gamma_i}(\rho) = t_i$ où $t_i \in [0, \pi]$.
- Sur chaque feuille symplectique, les fonctions h_γ où γ est une courbe interne ont un flot hamiltonien 2π -periodique, défini sur $h_\gamma^{-1}(0, \pi)$.

On remet au chapitre suivant l'aspect symplectique (ou de Poisson) de ce théorème pour discuter plus en détail les flots hamiltoniens des fonctions h_γ et leurs applications. En effet, ces flots ont une interprétation naturelle en terme de G -fibrés plats, un point de vue qui fait naturellement le pont entre le point de vue « représentation » de ce chapitre et le point de vue « théorie de jauge » du chapitre suivant.

2.3.2 Actions de tore sur les G -fibrés

On appelle G -fibré sur Σ' une paire (E, θ) où E est un fibré plat et hermitien de rang 2, et θ une section plate et unitaire de $\Lambda^2 E$ que l'on appellera « section volume ». Un isomorphisme entre deux paires est un isomorphisme de fibrés plats hermitiens qui fait commuter les sections volume. L'application qui a une paire (E, θ) associe sa représentation d'holonomie permet d'identifier l'espace $\mathcal{M}(\Sigma', G)$ avec l'ensemble des classes d'équivalence des paires (E, θ) .

Soit (E, θ) un G -fibré sur Σ' et $\gamma \subset \Sigma'$ une courbe simple telle que l'holonomie de (E, θ) le long de γ ne soit pas centrale. On définit l'action de $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de la façon suivante. Supposons que γ est orientée : le fibré $E|_\gamma$ est la somme directe de deux sous-fibrés plats E^\pm , dont les fibres sont les espaces propres de l'holonomie le long de γ de valeurs propres $\exp(\pm i h_\gamma(E, \theta))$. Soit R_t l'automorphisme de $E|_\gamma$ qui agit sur E^\pm par multiplication par $e^{\pm it}$.

Soit $\tilde{\Sigma}'$ la surface obtenue à partir de Σ' en coupant le long de γ et notons π la projection de $\tilde{\Sigma}'$ sur Σ' . Soit γ_{\pm} les composantes de bord de $\tilde{\Sigma}'$ telles que $\pi_{\pm} : \gamma_{\pm} \rightarrow \gamma$ se restreigne en un difféomorphisme préservant (resp. inversant) l'orientation. Alors, $t.(E, \theta)$ est le quotient de π^*E par l'identification

$$u \sim \pi_-^* . R_t . (\pi_+^*)^{-1}(u), \quad u \in (\pi^*E)|_{\gamma_+} = \pi_+^*(E|_{\gamma})$$

On vérifie immédiatement que cette définition ne dépend pas de l'orientation de γ et que les actions associées à des courbes disjointes commutent.

2.3.3 Décomposition de Fourier des fonctions trace

Soit Σ une surface munie de points marqués p_1, \dots, p_n et donnons nous une décomposition en pantalons indexée par un ensemble de courbes \mathcal{C} . Définissons :

$$\mathcal{M}^\circ(\Sigma', G) = \{[\rho] \in \mathcal{M}(\Sigma', G), \text{ tel que } \rho(\gamma) \neq \pm 1 \forall \gamma \in \mathcal{C}\}$$

On obtient ainsi un ouvert de $\mathcal{M}^{\text{irr}}(\Sigma', G)$ sur lequel les flots des fonctions h_γ sont bien définis. On note $t.\rho$ l'action de $t = (t_\gamma) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{\mathcal{C}}$ sur ρ .

Le premier résultat est que cette action de tore décrit précisément les fibres de la fonction H , cf [JW93]. On a plus précisément :

Théorème 5. *Soit $\rho \in \mathcal{M}^\circ(\Sigma', G)$ et $\alpha = H(\rho) \in \Delta$. L'application $\mathbb{R}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\Sigma', G)$ qui à t associe $t.\rho$ a pour image $H^{-1}(\alpha)$ et pour noyau le réseau*

$$\Lambda = 2\pi \text{Vect}\{u_\gamma, \gamma \in \mathcal{C}, u_v, v \in V\}$$

où u_γ est le vecteur de base de $\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ associé à la courbe γ et pour tout pantalon v bordé par trois courbes γ, δ, ζ on note $u_v = \frac{1}{2}(u_\gamma + u_\delta + u_\zeta)$ avec la convention $u_\gamma = 0$ si $\gamma \notin \mathcal{C}$.

Soit δ une courbe simple quelconque de Σ' . La fonction f_δ restreinte à $\mathcal{M}^\circ(\Sigma', G)$ admet une décomposition de Fourier $f_\delta = \sum_m \Pi_m(f_\delta)$ où $m \in \mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ et

$$\Pi_m(f)(\rho) = (2\pi)^{-\#\mathcal{C}} \int_{\mathbb{T}^{\mathcal{C}}} f(t.\rho) e^{-it.k} dt$$

On a noté dans cette formule $t.m = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} t_\gamma m_\gamma$.

On démontre dans [CM09] le théorème suivant :

Théorème. *Soit Σ une surface avec des points marqués p_1, \dots, p_n . Soit δ une courbe simple de Σ' et \mathcal{C} une décomposition en pantalons. Supposons que δ coupe chaque courbe de \mathcal{C} de façon transverse et avec le moins de points doubles possible dans sa classe d'isotopie.*

- Alors pour tout $m \in \mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$, s'il existe $\gamma \in \mathcal{C}$ tel que $\#(\gamma \cap \delta) < m_\gamma$ alors $\Pi_m(f_\delta) = 0$.
- Si on a pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$ l'égalité $\#(\gamma \cap \delta) = m_\gamma$ alors au contraire $\Pi_m(f_\delta)$ ne s'annule pas sur $H^{-1}(\text{Int } \Delta)$.

Expliquons informellement la première partie de l'énoncé. Supposons que la courbe δ consiste en la juxtaposition de N arcs $\delta_1, \dots, \delta_N$ qui ne rencontrent les courbes \mathcal{C} qu'en leurs extrémités. Notons P_j les points de départ et d'arrivée des arcs δ_j de telle sorte que δ_j aille de P_j à P_{j+1} . On note aussi $\eta_j \in \mathcal{C}$ la courbe telle que $P_j \in \eta_j$.

Soit $\rho \in \mathcal{M}^\circ(\Sigma', G)$ la représentation d'holonomie d'un fibré (E, θ) et notons $V_i \in \text{Hom}(E_{P_j}, E_{P_{j+1}})$ l'holonomie de (E, θ) le long de δ_j . On a $f_\delta(\rho) = -\text{Tr}(V_N \cdots V_1)$. De plus, d'après la description de l'action de tore sur les G -fibrés expliquée à la Section 2.3.2, l'holonomie de $t.\rho$ le long de δ est $R_N V_N \cdots R_2 V_2 R_1 V_1$ où $R_j \in \text{End}(E_{P_j})$ est conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix} e^{it_{\eta_j}} & 0 \\ 0 & e^{-it_{\eta_j}} \end{pmatrix}$. La formule

$$f_\delta(t.\rho) = -\text{Tr}(R_N V_N \cdots R_2 V_2 R_1 V_1)$$

montre que $f_\delta(t.\rho)$ est un polynôme trigonométrique dans les variables t_γ dont le degré en t_γ n'excède pas le nombre de points d'intersection de δ avec γ . Ceci démontre le premier point.

Le deuxième point nécessite un argument plus délicat qui est détaillé dans [CM09]. En utilisant les coordonnées de Dehn pour décrire l'ensemble des multicourbes sur Σ' et le résultat précédent sur la décomposition de Fourier des fonctions trace, on démontre le résultat suivant :

Théorème. *Les fonctions $f_\gamma : \mathcal{M}(\Sigma', G) \rightarrow \mathbb{R}$ où γ parcourt les classes d'isotopie de multicourbes dans Σ' sont linéairement indépendantes dans l'algèbre des fonctions continues sur $\mathcal{M}(\Sigma', G)$. On en déduit que l'application naturelle $K(\Sigma' \times [0, 1], -1) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma', G_{\mathbb{C}})$ est un isomorphisme d'algèbre.*

Expliquons brièvement la dernière implication. L'inclusion de G dans $G_{\mathbb{C}}$ induit une application $\mathcal{M}(\Sigma', G) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma', G_{\mathbb{C}})$ (qui se trouve être injective). On en déduit que si une famille de fonctions sur $\mathcal{M}(\Sigma', G_{\mathbb{C}})$ est linéairement indépendante comme famille de fonctions sur $\mathcal{M}(\Sigma', G)$, elle l'est nécessairement sur $\mathcal{M}(\Sigma', G_{\mathbb{C}})$. Enfin, on sait d'après le Théorème 2 que l'application naturelle $\Phi : K(\Sigma' \times [0, 1], -1) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma', G_{\mathbb{C}})$ est un morphisme d'algèbre surjectif. Le théorème précédent montre que ce morphisme est aussi injectif.

2.4 Le cas des compléments de nœuds

Peu de modules d'écheveaux sont connus explicitement à part ceux des surfaces épaissies. On y compte $S^2 \times S^1$, les espaces lenticulaires, les complémentaires des nœuds toriques $(2, 2p+1)$ ainsi que des nœuds twists. Dans [Le06], T. Q. T. Le montre la Conjecture 1 dans le cas de tous les complémentaires des nœuds à deux ponts. Dans tous les travaux précédents, la méthode consiste à utiliser le cas connu des surfaces épaissies. Un complémentaire de noeud s'obtient à partir d'un corps en anse H en lui adjoignant une famille de 2-anses, c'est-à-dire de disques épaissis $D^2 \times [0, 1]$ recollés sur leurs bords $S^1 \times [0, 1]$. On en déduit une présentation du module d'écheveau par générateurs et relations : tout entrelacs étant isotope à un entrelacs dans H , l'ajout de

2-anses crée des relations qu'il s'agit de décrire. De plus, comme le corps en anse est lui-même une surface épaissie, son module d'écheveau est bien compris.

L'article [M10a] est basé sur une technique différente que j'aimerais développer prochainement. Cette technique consiste à tirer parti des surfaces incompressibles présentes dans les complémentaires de nœuds. En effet, ces dernières induisent des valuations à la fois sur le module d'écheveau et sur les variétés de caractères. Une compréhension fine des espaces gradués associés à chaque filtration permet de démontrer la Conjecture 1 dans le cas des complémentaires de nœuds toriques.

Théorème. *La conjecture 1 est vraie dans le cas des complémentaires de nœuds toriques.*

Expliquons un peu comment sont construites les valuations. Soit K un nœud dans S^3 et M le complémentaire d'un voisinage tubulaire de K . On se donne S , une surface incompressible dans M que l'on suppose homologue à 0. Posons

$$\mathcal{F}_k = \text{Vect}\{L \in K(M, t), \#(L \cap S) \leq 2k\}.$$

On définit ainsi une filtration croissante que l'on peut étudier dans certains cas. Soit K un nœud torique, c'est-à-dire une courbe plongée dans un tore Σ , lui-même plongé de manière standard dans S^3 . La surface Σ privée d'un voisinage tubulaire de K est un anneau essentiel noté S qui découpe le complémentaire de K en deux tores pleins. En étudiant les modules d'écheveaux relatifs des tores pleins, on peut calculer précisément le gradué de la filtration précédente. En particulier on a

Proposition 1. *Pour tout $k > 1$, le module $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$ est libre de rang $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.*

Le module \mathcal{F}_0 est le module engendré par les courbes qui ne coupent pas l'anneau S . On déduit d'ores et déjà de la proposition que le module d'écheveau des compléments des nœuds toriques est libre.

Comparons-le maintenant avec l'anneau $\mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$. Celui-ci est bien compris dans le cas des nœuds toriques. En effet $\mathcal{M}^{\text{irr}}(M, G_{\mathbb{C}})$ est une réunion de $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ droites affines qui rencontrent chacune la droite affine $\mathcal{M}^{\text{ab}}(M, G_{\mathbb{C}})$ en deux points. On note $C \subset \mathcal{M}^{\text{irr}}(M, G_{\mathbb{C}})$ une composante irréductible.

On définit pour tout $f \in \mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$ le degré

$$\deg f = \max_{C \subset \mathcal{M}^{\text{irr}}(M, G_{\mathbb{C}})} \deg f|_C.$$

On définit ainsi un degré sur l'algèbre $\mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$ pour lequel chaque espace gradué de degré strictement positif est de dimension $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$. On note $F_k = \{f \in \mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}}), \deg f \leq k\}$.

Notons $\epsilon : K(M, t) \rightarrow K(M, -1)$ l'application naturelle. On a le résultat suivant :

Proposition 2. *L'application $\Phi \circ \epsilon : K(M, t) \rightarrow \mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$ est surjective et respecte les filtrations \mathcal{F}_k et F_k . Les espaces gradués étant de même dimension, on en déduit que Φ est un isomorphisme et que l'on a un isomorphisme (non naturel)*

$$K(M, t) \simeq \mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}].$$

Pour un nœud quelconque, si on trouve une surface incompressible pour laquelle on peut calculer la dimension du gradué $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$ et identifier la filtration correspondante sur $\mathcal{T}(M, G_{\mathbb{C}})$ alors on démontre de même la Conjecture 1. Malheureusement, l'exemple du nœud de huit montre qu'il est nécessaire de considérer au moins deux surfaces incompressibles ce qui rend le calcul du gradué beaucoup plus complexe.

J'ai pour projet d'étudier en détail la théorie de Culler et Shalen [CS83] pour comprendre les familles de filtrations induites par les surfaces incompressibles. Remarquons que chaque point idéal de $\mathcal{M}(M, G_{\mathbb{C}})$ fournit une surface incompressible. La dimension du gradué associé aux valuations des points idéaux est donnée par le théorème de Riemann-Roch. Il s'agit donc d'établir un analogue de ce théorème pour les modules d'écheveaux.

Chapitre 3

Préquantification

Ce chapitre concerne l'étude de la structure symplectique sur l'espace des modules des représentations d'une surface. Plus généralement, cet espace est naturellement « préquantifié » au sens où il existe un fibré en droites hermitien avec connexion (\mathcal{L}, ∇) dont la forme de courbure est égale à la forme symplectique. Ces structures proviennent naturellement de la théorie de jauge que l'on rappelle à grands traits dans ce chapitre. Je présenterai trois résultats liés à la structure symplectique.

3.1 Théorie de Chern-Simons

3.1.1 Structure symplectique

Soit M une variété de dimension inférieure ou égale à 3. Tout G -fibré principal P sur M est trivialisable puisque les groupes fondamentaux de G sont triviaux en degré 1 et 2. On ne considère donc plus que des fibrés triviaux.

Une connexion sur $M \times G$ se ramène donc à une 1-forme lisse $\alpha \in \Omega^1(M, \mathcal{G})$ où \mathcal{G} désigne l'algèbre de Lie de G . Le groupe de jauge $\text{Map}(M, G)$ des applications lisses de M dans G agit à droite sur $\Omega^1(M, \mathcal{G})$ par la formule

$$\alpha^g = g^{-1}\alpha g + g^{-1}dg \quad (3.1)$$

Une connexion $\alpha \in \Omega^1(M, \mathcal{G})$ est plate si elle satisfait l'équation $F_\alpha = 0$ où la courbure F_α est définie par :

$$F_\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] \quad (3.2)$$

On notera $\Omega_{\text{p}}^1(M, \mathcal{G})$ l'ensemble des connections plates c'est-à-dire l'ensemble $\{\alpha \in \Omega^1(M, \mathcal{G}), F_\alpha = 0\}$.

Soit Σ une surface sans bord et ω la forme symplectique sur $\Omega^1(\Sigma, \mathcal{G})$ définie par

$$\omega(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(\alpha \wedge \beta).$$

Le groupe de jauge agit sur $\Omega^1(M, \mathcal{G})$ par symplectomorphismes affines et on peut interpréter F_α comme une application moment relative à cette action. Ainsi le quotient symplectique $\Omega_b^1(\Sigma, \mathcal{G})/\text{Map}(\Sigma, G)$ qui n'est rien d'autre que l'espace des modules des G -fibrés plats, soit encore $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ hérite d'une structure symplectique qui s'identifie à celle évoquée dans le Théorème 1.

3.1.2 Fonctionnelle de Chern-Simons

Pour toute variété à bord M de dimension 3 munie d'une forme de connexion plate $\alpha \in \Omega_b^1(M, \mathcal{G})$, on définit

$$\text{CS}(\alpha) = \frac{-1}{24\pi} \int_M \text{Tr}(\alpha \wedge [\alpha \wedge \alpha]).$$

Notons qu'il faut modifier cette formule dans le cas où α n'est pas plate mais on n'aura pas besoin d'une telle extension dans ce mémoire (voir Equation (4.2)).

Cette fonctionnelle est transformée de la manière suivante par l'action de jauge :

$$\text{CS}(\alpha^g) = \text{CS}(\alpha) + c(\alpha, g) \quad \text{où} \quad (3.3)$$

$$c(\alpha, g) = \frac{-1}{4\pi} \int_\Sigma \text{Tr}(g^{-1}\alpha g \wedge g^{-1}dg) + \frac{1}{2\pi} \int_M \text{Tr}(g^{-1}dg \wedge [g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg])$$

Dans cette formule, $c(\alpha, g)$ ne dépend modulo 2π que de la restriction de α et g à Σ . En effet, notons

$$W(g) = \frac{1}{2\pi} \int_M \text{Tr}(g^{-1}dg \wedge [g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg]) = \int_M g^* \chi$$

où $\chi = \frac{1}{24\pi} \text{Tr}(\theta \wedge [\theta \wedge \theta])$ est la forme de Cartan et θ la forme de Maurer-Cartan invariante à gauche de sorte que $g^*\theta = g^{-1}dg$. Cette fonctionnelle s'appelle la fonction de Wess-Zumino-Witten de g . Si on se donne une autre variété N de bord Σ et une fonction $g' : N \rightarrow G$ qui coïncide avec la fonction précédente sur le bord, on aura $W(g) - W(g') = \int_{M \cup (-N)} \tilde{g}^* \chi \in 2\pi\mathbb{Z}$ où \tilde{g} désigne la fonction étendant g et g' . Le fait que l'intégrale soit un multiple de 2π provient du fait que χ est un générateur de $H^3(G, 2\pi\mathbb{Z})$.

On définit le fibré \mathcal{L} comme le quotient du fibré trivial $\Omega_b^1(\Sigma, \mathcal{G}) \times \mathbb{C}$ par l'action de $\text{Map}(\Sigma, G)$ suivante :

$$(\alpha, z)^g = (\alpha^g, ze^{ic(\alpha, g)})$$

On obtient par quotient un fibré Hermitien \mathcal{L} sur $\mathcal{M}(\Sigma, G)$. La forme de connexion $d + \eta$ sur le fibré trivial $\Omega_b^1(\Sigma, \mathcal{G}) \times \mathbb{C}$ où η est définie par $\eta_u(v) = \frac{1}{2}\omega(u, v)$ passe au quotient en une connexion ∇ dont la courbure est ω .

Un dernier résultat sera utile par la suite : Soit α_t une famille à un paramètre de connexions plates sur une variété M de bord Σ . Alors

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{CS}(\alpha_t) = -\frac{1}{2} \omega(\alpha_0, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t) \quad (3.4)$$

Cette formule provient du théorème de Stokes. On peut la reformuler de la façon suivante. Soit $r : \mathcal{M}(M, G) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, G)$ l'application de restriction. Alors on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{L} \\ & \nearrow^{e^i \text{CS}} & \downarrow \\ \mathcal{M}(M, G) & \xrightarrow{r} & \mathcal{M}(\Sigma, G) \end{array} \quad (3.5)$$

L'application $e^i \text{CS}$ est plate, au sens où c'est une section plate de $r^* \mathcal{L}$.

Enfin, si M n'a pas de bord et α est une connexion plate, $\text{CS}(\alpha)$ ne dépend pas modulo 2π de la classe de jauge de α . On définit donc une application $\text{CS} : \mathcal{M}(M, G) \rightarrow \mathbb{T}$ qui est localement constante d'après l'équation (3.4) et qu'on appelle invariant de Chern-Simons.

3.2 Calcul combinatoire de l'invariant de Chern-Simons

L'objet de l'article [M10b] que je présente dans ce chapitre est de donner une formule simpliciale permettant un calcul effectif de l'invariant de Chern-Simons. Cette formule a déjà été proposée par W. Neumann dans [Ne92, Ne98, Ne04] mais sa justification repose sur des travaux de J. Dupont et Yoshida (cf. [D87, Y85]). Les démonstrations sont basées sur des techniques qui impliquent entre autres la cohomologie du groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ et le groupe de Bloch étendu. La méthode proposée ici est beaucoup plus directe.

Il s'agit en premier lieu de décrire de façon combinatoire une variété à bord M munie d'une représentation. Comme l'invariant de Chern-Simons n'est pas un invariant numérique mais une section d'un fibré sur la variété des représentations du bord de M , il est nécessaire d'encoder cette donnée, ce que l'on fait à l'aide de la notion d'aplatissement.

3.2.1 Données combinatoires

Une triangulation abstraite est une paire $((\Delta_i)_{i \in I}, \Phi)$ où pour tout i dans l'ensemble fini I , Δ_i désigne un simplexe abstrait orienté, c'est-à-dire un ensemble à 4 éléments numéroté à une permutation paire près. La fonction Φ est un appariement simplicial des faces des simplexes renversant l'orientation.

Pour chaque simplexe Δ_i , on définit $\text{Trunc}(\Delta_i)$ comme le tétraèdre tronqué de sommets les éléments de Δ_i . On appellera triangulation de M un homéomorphisme de M avec la variété à bord

$$\coprod_{i \in I} \text{Trunc}(\Delta_i) / \Phi$$

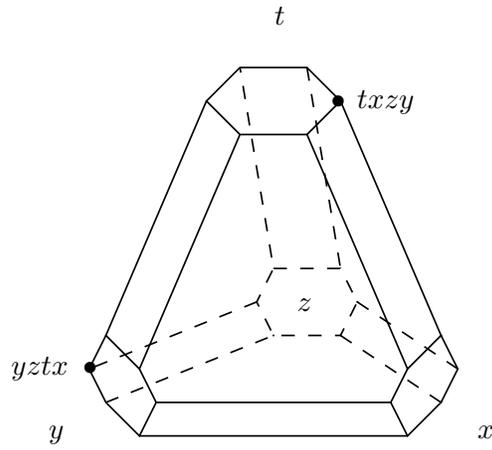


FIGURE 3.1 – Le polyèdre $P(\Delta)$

Pour chaque tétraèdre Δ_i on définit $P(\Delta_i)$ comme le permutaèdre associé à Δ_i . Plus précisément, ses sommets sont les numérotations des éléments de Δ_i : si $\Delta = \{x, y, z, t\}$, on notera $xyzt$ un sommet générique de $P(\Delta)$.

Le permutaèdre $P(\Delta)$ a trois types d'arêtes :

$$A_1 = \{xyzt, yxzt\} \quad A_2 = \{xyzt, xzyt\} \quad A_3 = \{xyzt, xytz\}$$

et trois types de faces :

$$\begin{aligned} F_a &= \{xyzt, yxzt, xytz, yxtz\} && \text{type arête} \\ F_f &= \{xyzt, xzyt, zxyt, zyxt, yzxt, yxzt\} && \text{type face} \\ F_s &= \{xyzt, xytz, xtyz, xtzy, xzty, xzyt\} && \text{type sommet} \end{aligned}$$

On peut réaliser géométriquement ce tétraèdre en tronquant $\text{Trunc}(\Delta)$ le long des arêtes comme dans la Figure 3.1. Enfin, on confondra $P(\Delta)$ avec l'ensemble de ses sommets.

On appelle birapport une application $X : P(\Delta) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ vérifiant pour tous $x, y, z, t \in \Delta$ distincts les relations

$$\begin{aligned} X(xyzt) &= X(yxzt)^{-1} = X(ztxy) \\ X(xzty) &= (1 - X(xyzt))^{-1} \end{aligned}$$

On appelle branchement de Δ un ordre sur les sommets que l'on notera b . Notons que cela induit une orientation des arêtes de $P(\Delta)$ selon l'ordre lexicographique. On appelle aplatissement un quadruplet (Δ, X, b, L) où X est un birapport, b un branchement et $L : P(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}$ est une application vérifiant :

$$\begin{aligned} L(xyzt) &= -L(yxzt) = -L(xytz) \\ i\pi &= L(xyzt) + L(xzyt) + L(xytz) \text{ si } y <_b z <_b t \\ X(xyzt) &= \exp(L(xyzt)) \end{aligned}$$

Considérons maintenant une variété M triangulée par $((\Delta_i)_{i \in I}, \Phi)$. Pour chaque arête interne A de $M = \coprod_{i \in I} \text{Trunc}(\Delta_i) / \Phi$ on considère l'ensemble des arêtes a de $\coprod_{i \in I} \text{Trunc}(\Delta_i)$ qui s'identifient à A . Pour chaque a , on note P_a un voisinage simplicial

de a dans le simplexe auquel a appartient : c'est un prisme à base triangulaire. On note finalement $P_A = \bigcup_a P_a$. On a alors la décomposition

$$M = \prod_{i \in I} \text{Trunc}(\Delta_i) / \Phi = \left(\prod_{i \in I} P(\Delta_i) \amalg \prod_A P_A \right) / \Phi$$

On qualifera de polyédrale la deuxième décomposition.

Notons P la réunion des sommets de $P(\Delta_i)$ pour i dans I . On appelle birapport global une application $X : P \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ qui est un birapport en restriction à chaque simplexe et vérifie pour toute arête A :

$$\prod_i X(xyz_i z_{i+1}) = 1$$

où $xyz_i z_{i+1}$ désigne les simplexes apparaissant dans le prisme P_A et xy se projette sur l'arête A . De même on appelle branchement global un branchement de chaque simplexe Δ_i tel que les branchements de deux simplexes contigus soient compatibles. Finalement, on appelle aplatissement global un triplet (X, b, L) formé d'un birapport global, d'un branchement global et d'une application $L : P \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant pour chaque arête l'équation

$$\sum_i L(xyz_i z_{i+1}) = 0$$

On demande de plus que L soit un aplatissement en restriction à chaque simplexe.

3.2.2 De la combinatoire à la géométrie

Donnons nous un birapport global X . On définit un 1-cocycle c sur la décomposition polyédrale de M en associant à chaque arête un élément de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} c(xyzt, yxzt) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ c(xyzt, xzyt) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ c(xyzt, xytz) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X(xyzt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De cette manière, un birapport global permet de définir un élément de $\mathcal{M}(M, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$. On remarque que la restriction de ce cocycle au bord de M prend ses valeurs dans le groupe $B_2(\mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures. Notons r l'application de restriction de $\mathcal{M}(M, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$ dans $\mathcal{M}(\partial M, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$.

Proposition 3. *Un aplatissement global (X, b, L) d'une variété M définit un couple (ρ, s) où $\rho \in \mathcal{M}(M, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ vérifie $r(\rho) \in \mathcal{M}(\partial M, B_2(\mathbb{C}))$ et $s \in \mathcal{L}_{r(\rho)}$.*

Plus précisément, et c'est cela qui sera le plus important dans la section qui suit, on peut construire explicitement une connexion plate sur M notée α telle que le couple (ρ, s) soit représenté par le couple $(\alpha, \alpha|_{\partial M} \times 1)$. L'étape cruciale de cette construction est de définir la connexion α sur le 1-squelette de la décomposition polyédrale de M : c'est à ce moment qu'intervient le branchement et l'aplatissement. On définit α de la façon suivante, où φ désigne une fonction variant de 0 à 1 le long de l'arête concernée qui reste constante au voisinage des extrémités. De plus l'orientation des arêtes est donnée par le branchement.

$$\begin{aligned}\alpha(xyzt, yxzt) &= \begin{pmatrix} 0 & i\pi/2 \\ i\pi/2 & 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ \alpha(xyzt, xzyt) &= \begin{pmatrix} i\pi/2 & -i\pi/2 \\ 0 & -i\pi/2 \end{pmatrix} d\varphi \\ \alpha(xyzt, xytz) &= \begin{pmatrix} L(xyzt)/2 & 0 \\ 0 & -L(xyzt)/2 \end{pmatrix} d\varphi\end{aligned}$$

On peut alors « remplir » le polyèdre $P(\Delta)$ et définir $\alpha \in \Omega_b^1(P(\Delta), \mathcal{G})$ d'une façon qui ne dépend essentiellement que de l'aplatissement.

3.2.3 Dilogarithme et invariant de Chern-Simons

Étant donné un simplexe branché (Δ, b) , l'ensemble $\Lambda(\Delta, b)$ des couples (X, L) compatibles forme une surface de Riemann. Écrivons $\Delta = \{x, y, z, t\}$ avec $x < y < z < t$ selon b . L'application qui à une paire (X, L) associe $X(xyzt)$ identifie $\Lambda(\Delta, b)$ au revêtement abélien universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Si on définit l'intégrale $\text{CS}(X, L) = \int_{P(\Delta)} \alpha$,

on déduit de l'équation (3.4) la formule

$$\delta \text{CS}(X, L) = \frac{1}{4\pi} (L(xzty)\delta L(xyzt) - L(xyzt)\delta L(xzyt) - i\pi\delta L(xyzt))$$

Cette formule permet d'identifier $\text{CS}(X, L)$ au prolongement analytique du dilogarithme de Rogers, c'est-à-dire

$$\text{CS}(X, L) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{X(xyzt)} \left(\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log(t)}{1-t} \right) dt.$$

L'invariant de Chern-Simons global de la paire (ρ, s) , noté $\text{CS}(\rho, s)$ est par définition égal à l'intégrale $\int_M \alpha$. Cette intégrale se décompose en une intégrale sur les permutaèdres que l'on a calculée ci-dessus et une intégrale sur les prismes P_A dont on peut montrer qu'elle s'annule. On en déduit donc le résultat suivant :

Proposition 4. *Soit M une variété triangulée par $((\Delta_i)_{i \in I}, \Phi)$ et (X, b, L) un triplet encodant une paire (ρ, s) comme dans la Proposition 3. On a alors la formule simpliciale suivante :*

$$\text{CS}(\rho, s) = \sum_{i \in I} \text{CS}(X_i, L_i)$$

3.3 Structures méta-plectiques

La procédure de quantification géométrique d'une variété symplectique (M, ω) comprend trois étapes. En premier lieu, on doit trouver un fibré préquantifiant (\mathcal{L}, ∇) : celui-ci est produit par la théorie de Chern-Simons comme expliqué dans la section précédente. La deuxième étape consiste à choisir une structure méta-plectique tandis que la dernière étape introduit le choix d'une polarisation. Dans cette section, on étudie la structure méta-plectique : il s'agit en fait de la conjonction d'une structure spin avec une structure symplectique.

On peut montrer qu'une telle structure existe sur M si et seulement si la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ s'annule. De plus, l'ensemble des classes d'homotopie de telles structures est un espace affine dirigé par $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. On sait que les espaces de représentations en genre au moins 2 sont simplement connexes. Ainsi, si la structure méta-plectique existe, elle est unique à homotopie près. Un calcul indirect de classe de Chern montre que la classe w_2 est nulle, cf [RSW89]. On sait donc qu'il existe une unique structure méta-plectique à homotopie près, mais la méthode n'est pas constructive et ne permet aucun calcul. A la fin de l'article de revue [M09], j'explique une méthode élémentaire pour exhiber cette structure et l'applique au calcul des orbites de Bohr-Sommerfeld. L'objet de cette section est de résumer ce travail.

3.3.1 Structures spin

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique groupe $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R})$ qui est un revêtement double de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec les deux propriétés suivantes.

- La restriction du revêtement à SO_n est un revêtement non trivial
- La préimage de toute réflexion dans $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R})$ est d'ordre 2.

Pour tout espace vectoriel réel V de dimension n on note $\mathcal{R}(V)$ l'ensemble des bases de V : il s'agit d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ -torseur. On appelle « structure spin » sur V tout $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R})$ -torseur $\widetilde{\mathcal{R}}(V)$ muni d'une projection équivariante $p : \widetilde{\mathcal{R}}(V) \rightarrow \mathcal{R}(V)$.

Pour toute variété M , on appelle structure spin la donnée d'un fibré $\widetilde{\mathcal{R}}(M)$ sur M où la fibre en x notée $\widetilde{\mathcal{R}}(M)_x$ est une structure spin sur $T_x M$.

On note $\mathrm{Spin}(V)$ la catégorie des structures spin sur V . Cette catégorie est équivalente à la catégorie avec un seul objet et deux automorphismes. Une construction classique basée sur un produit fibré fournit un bifoncteur

$$\mathrm{Spin}(V) \times \mathrm{Spin}(W) \rightarrow \mathrm{Spin}(V \oplus W).$$

Plus généralement, si on a une suite exacte $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$, toute section $s : W \rightarrow V$ fournit un foncteur $\mathrm{Spin}(U) \times \mathrm{Spin}(W) \rightarrow \mathrm{Spin}(V)$. Comme l'ensemble des sections est un espace affine, ce foncteur est unique à transformation naturelle près. L'argument concernant les suites exactes courtes se généralise et on a le résultat suivant :

Proposition 5. *Soit $C^* = C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^n$ un complexe et H^* sa cohomologie. Il existe une équivalence de catégories unique à transformation naturelle près*

$$\mathrm{Spin}\left(\bigoplus_i H^i\right) \rightarrow \mathrm{Spin}\left(\bigoplus_i C^i\right)$$

Considérons une surface Σ de genre au moins 2 et l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma, G)$. Alors, d'après la Section 2.1.3, pour toute représentation irréductible $\rho \in \mathcal{M}(\Sigma, G)$ le complexe $C^* = C^*(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho)$ vérifie $H^0 = H^2 = 0$ et $H^1 = T_\rho \mathcal{M}(\Sigma, G)$. De plus, dans le complexe $C^*(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho)$, seules les différentielles dépendent de ρ : il en est donc de même de la catégorie $\mathrm{Spin}(\bigoplus_i C^i)$. On déduit de la Proposition 5 que l'on a une équivalence de catégories entre $\mathrm{Spin}(T_\rho \mathcal{M}(\Sigma, G))$ et $\mathrm{Spin}(\bigoplus_i H^i(\Sigma, \mathcal{G}))$. Dans cette dernière catégorie, on a considéré la représentation triviale dont la cohomologie tordue est $H^i(\Sigma, \mathcal{G})$.

Ceci prouve bien que $\mathcal{M}^{\mathrm{irr}}(\Sigma, G)$ admet une structure spin comme annoncé.

3.3.2 Fibrés de demi-formes

Considérons le morphisme de groupes $\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ consistant à associer à la matrice A la matrice ayant pour blocs diagonaux les matrices A et $(A^T)^{-1}$. Le fibré $\pi^* \widetilde{\mathrm{GL}}_{2n}(\mathbb{R})$ est un revêtement double de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ que l'on note $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R})$ et qu'on appelle groupe métalinéaire.

Ce groupe est différent de $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R})$ car il est isomorphe au groupe produit $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_4$ muni de la projection sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donnée par $(A, x) \rightarrow (-1)^x A$.

L'importance de ce groupe réside dans le fait qu'il existe un morphisme de groupe $\det^{1/2} : \widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ dont le carré est le tiré en arrière du déterminant usuel sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ce morphisme est défini par

$$\det^{1/2}(A, x) = i^x \sqrt{\det(A)}$$

Soit $(V, \omega, \widetilde{R}(V))$ un espace vectoriel métaplectique de dimension $2n$, c'est-à-dire muni d'une structure symplectique et d'une structure spin. Étant donné deux Lagrangiens transverses L et L' dans V , on obtient par restriction de $\widetilde{R}(V)$ aux bases symplectiques adaptées à la décomposition $V = L \oplus L'$ une structure métalinéaire sur L . Il s'agit d'un espace homogène $\widehat{\mathcal{R}}(L)$ sur le groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{R})$ muni d'une projection équivariante sur $\mathcal{R}(L)$.

Une telle structure définit un espace de demi-formes noté $\det^{1/2}(L)$. Cet espace est obtenu en quotientant le produit $\widehat{\mathcal{R}}(L) \times \mathbb{C}$ par la relation $(h.r, z) \sim (r, \det^{1/2} h z)$. On l'appelle espace de demi-formes car on a l'isomorphisme naturel suivant : $(\det^{1/2} L)^{\otimes 2} \simeq \det(L) = \Lambda^n L$.

3.3.3 Fibrés de Bohr-Sommerfeld sur les espaces de représentations

Soit $(M, \omega, \widetilde{R}(M), \mathcal{L})$ une variété métaplectique préquantifiée et $\pi : M \rightarrow B$ une submersion propre dont les fibres régulières sont lagrangiennes.

Notons M^{reg} la réunion des fibres régulières. Pour chaque $x \in M^{\text{reg}}$, le noyau de la différentielle $D_x \pi$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ noté L_x . On peut choisir continûment par rapport à x un lagrangien transverse noté L'_x car pour tout x l'ensemble des lagrangiens transverses à L_x est un espace affine. On définit alors un fibré sur M^{reg} noté δ par $\delta_x = \det^{1/2}(L_x)$ et on l'appelle fibré de demi-formes. Comme le fibré L restreint à chaque fibre de π est trivial car isomorphe à $T_b^* B$, il admet une connexion plate que l'on appelle connexion de Bott.

On dit qu'une fibre régulière $\pi^{-1}(b)$ est de Bohr-Sommerfeld de niveau k si le fibré plat $\mathcal{L}^k \otimes \delta$ admet une section plate non triviale. L'ensemble des sections des fibres de Bohr-Sommerfeld forme un espace de Hilbert. De plus les espaces de Hilbert associés à deux fibrations transverses sont reliés par un appariement dit de Blattner-Kostant-Sternberg, cf [GS90].

Dans le cas des espaces de représentations, on montre dans [M09] le résultat suivant :

Proposition 6. *Soit Σ une surface fermée et décomposée en pantalons par une famille de courbes \mathcal{C} . Soit $H : \mathcal{M}(\Sigma, G) \rightarrow [0, \pi]^{\mathcal{C}}$ l'application d'image Δ définie dans le Théorème 4. Soit $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{C}} \in \text{Int } \Delta$ et u_γ, u_v les générateurs du réseau $\frac{1}{2\pi}\Lambda$ défini dans le Théorème 5. Pour tout $x \in H^{-1}(\text{Int } \Delta)$, ces générateurs correspondent à des lacets issus de x que l'on note de la même façon.*

- L'holonomie de \mathcal{L} le long de u_γ est $e^{-2i\alpha_\gamma}$.
- L'holonomie de \mathcal{L} le long de u_v est $e^{-i(\alpha_\gamma + \alpha_\delta + \alpha_\zeta)}$ où γ, δ, ζ sont les courbes incidentes au pantalon v .
- L'holonomie de δ est 1 le long de e_γ et -1 le long de e_v .

On en déduit qu'une famille $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{C}} \in \text{Int } \Delta$ représente une orbite de Bohr-Sommerfeld de niveau k si et seulement si

- $\alpha_\gamma \in \frac{\pi}{k}\mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$.
- $\alpha_\gamma + \alpha_\delta + \alpha_\zeta \in \frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\mathbb{Z}$ pour tout pantalon bordé par les courbes γ, δ, ζ .

Ces conditions correspondent très précisément aux conditions d'admissibilité définissant les base de la TQFT, cf Théorème 11. De ce fait conforme à la philosophie de la quantification géométrique, je n'ai toujours pas d'explication convaincante.

3.4 Algèbre de Kauffman des surfaces en $\sqrt{-1}$

Le but de cette section est d'interpréter géométriquement la structure de l'algèbre de Kauffman en $-i$. Soit Σ une surface de genre g . On note \mathcal{A} la \mathbb{C} -algèbre engendrée par les symboles $[\gamma]$ pour $\gamma \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ et quotientée par les relations :

$$[\gamma]^2 = 1 \quad \text{et} \quad [\gamma][\delta] = i^{-\gamma \cdot \delta} [\gamma + \delta]$$

Cette algèbre est graduée par $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ où par définition, le degré de $[\gamma]$ est égal à la classe de γ modulo 2. On remarque que l'algèbre de Kauffman $K(\Sigma, t)$ est aussi graduée par $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ puisque les relations de Kauffman préservent la classe des entrelacs en bande modulo 2. On définit l'algèbre $\mathcal{A}(\Sigma)$ comme la partie de degré 0 du

produit tensoriel $K(\Sigma, -i) \otimes \mathcal{A}$. Dans [M08], on démontre en premier lieu la proposition suivante :

Proposition 7. *L'application $\Psi : K(\Sigma, -i) \rightarrow \mathcal{A}(\Sigma)$ définie par $\Psi(\gamma) = (-1)^{n(\gamma)} \gamma \otimes [\gamma]$ est un isomorphisme d'algèbre où γ est une multicourbe comportant $n(\gamma)$ composantes.*

On démontre cette formule par le calcul explicite du produit de deux multicourbes à l'aide des relations de Kauffman.

L'interprétation géométrique de l'algèbre $K(\Sigma, -i)$ est fondée sur la relation entre $\mathcal{M}(\Sigma, \text{SO}_3)$ et $\mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2)$. En fait, la projection $\text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_3$ induit une application $p : \mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, \text{SO}_3)$. Réciproquement, une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{SO}_3$ se relève à SU_2 si et seulement si une obstruction dans $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ s'annule. Notons $\mathcal{M}^{\text{lift}}(\Sigma, \text{SO}_3)$ l'ensemble des classes de conjugaisons de représentations dans SO_3 se relevant à SU_2 . L'application $p : \mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2) \rightarrow \mathcal{M}^{\text{lift}}(\Sigma, \text{SO}_3)$ est un revêtement de groupe $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Un élément $\lambda \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Rep}(\Sigma, \{\pm 1\})$ agit sur une représentation ρ par multiplication.

Si on essaie d'étendre l'action de $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ sur $\mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2)$ au fibré préquantifiant, on doit remplacer $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ par le groupe \hat{H} défini par

$$\hat{H} = \langle \lambda, \tau \mid \lambda \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}), \tau \text{ central}, \tau^4 = \lambda^2 = 1, \lambda \cdot \mu = \tau^{-\lambda \cdot \mu}(\lambda + \mu) \rangle$$

L'action de \hat{H} sur \mathcal{L} qui passe par la théorie de jauge est décrite dans l'article [M08] : l'élément τ agit sur chaque fibre par multiplication par i . Citons le résultat suivant qui permet de calculer le relevé au fibré préquantifiant du flot hamiltonien de h_γ pendant une demi-période.

Proposition 8. *Soit Σ une surface fermée, γ une courbe simple, $\rho \in \mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2)$ une représentation telle que $\rho(\gamma) \neq \pm 1$ et $s \in \mathcal{L}_\rho$. Alors notant Ψ_γ^t le relèvement à \mathcal{L} de l'action associée à la courbe γ au temps t , on a :*

$$\Psi_\gamma^\pi(s) = e^{-ih_\gamma(\rho)} \gamma^\# s$$

où $\gamma^\#$ est le dual de Poincaré de γ dans $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$, vu dans \hat{H} .

Ce résultat nous permet de retrouver le calcul de l'holonomie de \mathcal{L} présenté dans la Proposition 6.

On en déduit le résultat suivant en mettant ensemble les Propositions 7 et 8. Étant donné une courbe γ , on note \mathcal{O}_γ l'opérateur agissant sur $L^2(\mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2), \mathcal{L})$ par la formule

$$\mathcal{O}_\gamma s(\rho) = \Psi_\gamma^{-\pi} s(\gamma^\# \rho) + \Psi_\gamma^\pi s(\gamma^\# \rho) = \text{Tr } \rho(\gamma) \gamma^\# s(\gamma^\# \rho).$$

Proposition 9. *L'application $K(\Sigma, -i) \rightarrow \text{End } L^2(\mathcal{M}(\Sigma, \text{SU}_2), \mathcal{L})$ qui envoie la courbe γ sur l'opérateur \mathcal{O}_γ est un morphisme d'algèbres.*

Ce travail a été motivé par le fait que dans le cas où Σ est un tore, cette interprétation s'étend à $K(\Sigma, u)$ pour tout u de module 1. Malheureusement, ce n'est manifestement pas le cas en genre supérieur. De manière étonnante, on montrera dans la Section 4.2.3 une formule qui semble pourtant corroborer un tel résultat.

Chapitre 4

Théorie quantique des champs topologique

4.1 Généralités

Les deux chapitres précédents sont motivés par l'étude de la TQFT. Dès son introduction par E. Witten (cf [W89]), la TQFT a été reliée aux espaces de représentations qui jouait le rôle d'« espace des phases » sous-jacent. Cette relation s'est obscurcie avec la construction rigoureuse des TQFT : on commence donc par rappeler la construction originale d'E. Witten.

4.1.1 Définition issue de la théorie quantique des champs

Étant donnée une variété fermée de dimension 3, on définit pour tout entier k la fonction de partition

$$Z_k(M) = \int e^{ik \text{CS}(\alpha)} d\alpha \quad (4.1)$$

Dans cette formule, α est une connexion dans $\Omega^1(M, \mathcal{G})$ qui n'est pas nécessairement plate : on étend alors la définition de la fonctionnelle de Chern-Simons par la formule :

$$\text{CS}(\alpha) = \frac{-1}{4\pi} \int_M \text{Tr}(\alpha \wedge d\alpha + \frac{2}{3} \alpha \wedge [\alpha \wedge \alpha]). \quad (4.2)$$

L'intégrale de l'équation (4.1) est seulement formelle puisque le domaine d'intégration est un espace affine de dimension infinie. La fonctionnelle de Chern-Simons étant invariante par le groupe de jauge, on peut a priori intégrer sur les classes d'équivalence de jauge. Si M est une variété de bord Σ , on peut définir formellement $Z_k(M)$ comme une fonction sur l'ensemble des connexions $\beta \in \Omega^1(\Sigma)$. On écrit alors

$$Z_k(M)(\beta) = \int_{\alpha|_{\Sigma}=\beta} e^{ik \text{CS}(\alpha)} d\alpha$$

Vu que l'invariant de Chern-Simons se transforme par l'action de jauge de la manière décrite par la Formule 3.3, on en déduit que la restriction de $Z_k(M)$ aux connexions plates se réduit formellement à une section du fibré \mathcal{L}^k sur l'espace $\mathcal{M}(\Sigma, G)$. Les techniques issues de la théorie des champs montrent qu'une telle section ne peut pas être définie sans choix supplémentaire, à savoir le choix d'une polarisation. En d'autres termes, l'invariant $Z_k(M)$ est naturellement un élément de la quantification géométrique de niveau k de $\mathcal{M}(\Sigma, G)$.

On peut ajouter à cette construction des entrelacs coloriés par des représentations de G , plongés dans M et transverses au bord. La définition « physique » de la TQFT est de toute façon incomplète puisqu'elle ne fait pas apparaître clairement l'existence d'une « anomalie » : l'invariant $Z_k(M)$ dépend d'une structure supplémentaire sur la variété M - que l'on peut réduire à un entier - et les entrelacs doivent être en bande. On passe donc directement à une définition axiomatique de la TQFT : on utilisera une construction combinatoire passant par le crochet de Kauffman et la chirurgie, ce qu'on expliquera brièvement à la Section 4.1.3.

4.1.2 Définition axiomatique

Fixons un entier k appelé niveau et notons $\mathcal{C}_k = \{1, \dots, k-1\}$ un ensemble que l'on appellera ensemble des couleurs. On peut penser à chaque entier $\ell \in \mathcal{C}_k$ comme indexant la représentation de SU_2 de dimension ℓ . On définit alors la catégorie de cobordismes Cob_k comme ci-dessous.

Objets : les quadruplets (Σ, p, c, Λ) où Σ est une surface orientée sans bord munie de points marqués orientés p^1, \dots, p^n . On appelle point orienté un couple (p, ξ) où $p \in \Sigma$ et $\xi \in T_p \Sigma \setminus \{0\}$. A chaque point marqué p^i est associé une couleur $c^i \in \mathcal{C}_k$. On choisit de plus un sous-espace lagrangien $\Lambda \in H_1(\Sigma, \mathbb{R})$.

Morphismes : un morphisme entre $(\Sigma_0, p_0, c_0, \Lambda_0)$ et $(\Sigma_1, p_1, c_1, \Lambda_1)$ est une classe d'isomorphisme de quadruplets (M, Γ, c, n) où :

- M est une variété de dimension 3 munie d'un difféomorphisme $\partial M \simeq -\Sigma_0 \amalg \Sigma_1$
- Γ est un graphe en bande trivalent transverse au bord dont la restriction à Σ_0 est p_0 et la restriction à Σ_1 est p_1 (l'orientation du bord de la bande coïncide avec celle des points marqués).
- c est une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans \mathcal{C}_k telle que la couleur de toute arête touchant le bord coïncide avec la couleur du point correspondant.
- n est un entier relatif (responsable de l'anomalie).

Composition : donnons nous trois objets $O_i = (\Sigma_i, p_i, c_i, \Lambda_i)$ pour $i = 0, 1, 2$ et deux morphismes $(M, \Gamma, c, n) \in \text{Hom}(O_0, O_1)$ et $(M', \Gamma', c', n') \in \text{Hom}(O_1, O_2)$. On définit alors leur composition comme le quadruplet $(M \cup M', \Gamma \cup \Gamma', c \cup c', n'')$ où on a posé

$$n'' = n + n' - \mu(\Lambda_M \circ \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \circ \Lambda_{M'}). \quad (4.3)$$

Dans cette formule, Λ_M est le noyau de l'application induite par l'inclusion $H_1(\Sigma_0) \oplus H_1(\Sigma_1) \rightarrow H_1(M)$, $\Lambda_{M'}$ est défini de façon similaire et μ est l'indice de Maslov des Lagrangiens dans $H_1(\Sigma_1)$, cf [GM10].

Cette catégorie est monoïdale : le produit tensoriel correspond à l'union disjointe.

De plus, on obtient un endofoncteur de Cob_k en changeant l'orientation des surfaces et des cobordismes. On peut enfin définir formellement la TQFT qui sera l'objet de ce troisième chapitre :

Définition 1. Une TQFT de niveau k est un foncteur monoïdal (V_k, Z_k) de la catégorie Cob_k dans la catégorie des espaces vectoriels complexes. On demande de plus que le changement d'orientation corresponde à la conjugaison complexe.

On désigne traditionnellement par $V_k(\Sigma)$ l'image d'un objet et par $Z_k(M)$ l'image d'un morphisme, remplaçant quand il n'y a pas d'ambiguïté les objets et les morphismes par les variétés qui les composent. Dérivons quelques conséquences de l'axiomatique.

- On a $V_k(\emptyset) = \mathbb{C}$. Ainsi toute variété fermée M induit un automorphisme de \mathbb{C} . C'est donc la multiplication par un scalaire $Z_k(M) = Z_k(M, \emptyset, \emptyset, 0)$ qui est un invariant topologique de M appelé invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev.
- L'espace $V_k(\Sigma)$ est un espace vectoriel hermitien de dimension finie, la structure hermitienne étant donnée par $\langle \cdot, \cdot \rangle_k = Z_k(\Sigma \times [0, 1])$. De plus pour toutes variétés M, N de bord Σ on a

$$Z_k(M \cup (-N)) = \langle Z_k(M), Z_k(N) \rangle_k$$

- Étant donné f dans le groupe de difféotopie de Σ noté $\text{MCG}(\Sigma)$, on définit $C_f = \Sigma \times [0, 1]$ avec $\partial C_f \underset{\text{Id} \amalg f}{\simeq} -\Sigma \amalg \Sigma$. Le morphisme $\varphi_k(f, n) = Z_k(C_f, \emptyset, \emptyset, n)$ définit une représentation d'une extension centrale par \mathbb{Z} de $\text{MCG}(\Sigma)$ dans $V_k(\Sigma)$.

4.1.3 Construction combinatoire

La construction combinatoire la plus générale fait intervenir la notion de catégorie modulaire. Il s'agit d'une notion fondamentale qui reflète bien la structure de la TQFT cependant dans ce chapitre, on s'intéressera moins à la construction de la TQFT qu'à sa relation avec la géométrie des espaces de représentations. On se contente donc d'une esquisse de construction, basée sur l'article [BHMV].

Commençons par définir l'invariant $Z_k(M, \Gamma, c, n)$ d'une variété de dimension 3 fermée et orientée munie d'un entrelacs en bande colorié. Cet invariant se ramène à l'évaluation du crochet de Kauffman d'une combinaison d'entrelacs dans S^3 . Les deux étapes consistent à réduire Γ à une combinaison d'entrelacs dans M , puis M à S^3 grâce à la chirurgie.

Idempotents de Jones-Wenzl et graphes coloriés

Posons $\zeta_k = -e^{i\pi/2k}$ et définissons la catégorie de Temperley-Lieb de niveau k dont les objets sont les entiers naturels.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ choisissons un ensemble à ℓ éléments $P_\ell \subset (0, 1)$. On définit $\mathcal{T}_{\ell_0, \ell_1}^k$ comme le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par les entrelacs en bande dans $[0, 1]^3$ transverse au bord et dont la restriction au bord est l'ensemble $P_{\ell_0} \times \{(1/2, 0)\} \cup P_{\ell_1} \times \{(1/2, 1)\}$. Les relations sont les relations de Kauffman de la Figure 2.1 avec $t = \zeta_k$.

La composition $\mathcal{T}_{\ell_0, \ell_1}^k \times \mathcal{T}_{\ell_1, \ell_2}^k \rightarrow \mathcal{T}_{\ell_0, \ell_2}^k$ correspond à l'empilement des entrelacs, le premier se plaçant au-dessus du deuxième. On définit les idempotents de Jones-Wenzl par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et la formule récursive représentée à la Figure 4.1 où on a posé $[\ell] = \frac{t^{2\ell} - t^{-2\ell}}{t^2 - t^{-2}}$. Il apparaît que ces idempotents ne sont définis que pour $\ell < k$ car $[k] = 0$.

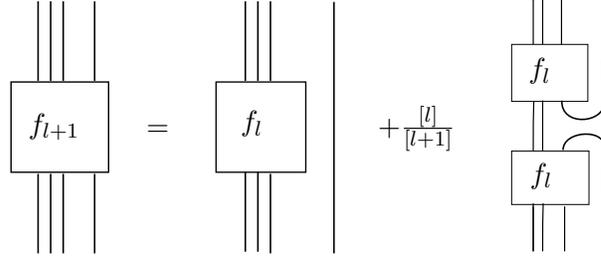


FIGURE 4.1 – Idempotents de Jones-Wenzl

Étant donné un graphe trivalent en bande $\Gamma \subset M$ colorié par une application c des arêtes de Γ dans \mathcal{C}_k , on définit alors $(\Gamma, c)_k \in K(M, \zeta_k)$ de la façon suivante. Chaque arête e coloriée par c_e est coupée en $c_e - 1$ bandes parallèles et on insère en son milieu l'élément $(-1)^{c_e-1} f_{c_e-1} \in \mathcal{T}_{c_e-1}^k$. A chaque sommet où les trois arêtes incidentes sont coloriées respectivement par a, b, c on relie les brins de l'unique façon qui évite les croisements. Cela est possible si et seulement si on a :

$$\begin{aligned} a + b + c \text{ est impair} \\ a < b + c, b < a + c, c < a + b \end{aligned}$$

Si en plus on a la condition

$$a + b + c < 2k$$

on dira que le coloriage de Γ est k -admissible. De cette façon, si $M = S^3$, on définit $Z_k(S^3, \Gamma, c, 0)$ comme le crochet de Kauffman de la combinaison $\eta(\Gamma, c)_k \in K(S^3, \zeta_k) = \mathbb{C}$ avec $\eta = \sqrt{\frac{2}{k}} \sin(\pi/k)$.

Chirurgie et couleur de Kirby

D'après un théorème de Lickorish et Wallace, toute variété M est difféomorphe à la variété obtenue à partir de S^3 par chirurgie sur un entrelacs en bande L . Un théorème de Kirby affirme que deux entrelacs définissent la même variété si et seulement s'ils sont reliés par une suite de deux mouvements élémentaires. On réfère à [Li] pour ces résultats.

Soit γ l'âme d'un tore solide $D^2 \times S^1$. On introduit la couleur de Kirby

$$\omega = \eta \sum_{\ell=1}^{k-1} (-1)^{\ell-1} [\ell](\gamma, \ell) \in K(D^2 \times S^1, \zeta_k).$$

Soit L un entrelacs dans S^3 . On note $(L, \omega)_k \in K(S^3, \zeta_k) = \mathbb{C}$ le crochet de Kauffman de la combinaison d'entrelacs obtenue en remplaçant chaque composante de L par

la couleur de Kirby ω . On peut démontrer que le crochet de Kauffman $(L, \omega)_k$ est invariant par le deuxième mouvement de Kirby. Soit (M, Γ, c, n) un quadruplet avec M sans bord. La variété M est isomorphe à la variété obtenue par chirurgie sur un entrelacs L . Dans cette présentation, Γ est isotope à un graphe $\Gamma' \subset S^3 \setminus L$. On pose alors

$$Z_k(M, \Gamma, c, n) = \eta \kappa^{n-\sigma(L)} (L \cup \Gamma', \omega \cup c)_k \quad (4.4)$$

où $\kappa = e^{\frac{3i\pi}{4} - \frac{3i\pi}{2k}}$ et $\sigma(L)$ est la signature de la matrice d'enlacement de L . On a alors la première proposition suivante :

Proposition 10. [BHMV] *La quantité donnée par l'équation (4.4) est un invariant topologique du quadruplet (M, Γ, c, n) .*

La TQFT est alors construite par la construction universelle suivante. Soit $O = (\Sigma, p, c, \Lambda)$ un objet de la catégorie Cob_k . Notons $W_k(O)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par les morphismes de \emptyset vers O . Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ la forme hermitienne définie par

$$\langle M_1, M_2 \rangle = Z_k(M_1 \circ (-M_2)).$$

On pose alors

$$V_k(O) = W_k(O) / \ker \langle \cdot, \cdot \rangle_k.$$

On vérifie immédiatement qu'étant donné $N \in \text{Hom}(O_1, O_2)$, l'application

$$Z_k(N) : \begin{cases} W_k(O_1) \rightarrow W_k(O_2) \\ M \mapsto M \circ N \end{cases}$$

passse au quotient et définit un foncteur $(V_k, Z_k) : \text{Cob}_k \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$. La compatibilité avec le changement d'orientation est immédiat. Ce qui reste à démontrer est le caractère monoïdal. On renvoie pour cela à l'article [BHMV].

Décomposition en pantalons et bases

Soit $O = (\Sigma, p, c, \Lambda)$ un objet de Cob_k . On obtient une base de $V_k(O)$ de la manière suivante. Soit H un corps en anse de bord Σ , (Γ, \check{c}) un graphe en bande colorié dont la restriction au bord est (p, c) et tel que H se rétracte par déformation sur Γ .

Proposition 11. [BHMV] *L'ensemble des vecteurs $\varphi_{\check{c}} = Z_k(H, \Gamma, \check{c}, 0)$ où \check{c} parcourt l'ensemble des coloriages k -admissibles des arêtes de Γ forme une base orthogonale de $V_k(O)$. De plus*

$$\|\varphi_{\check{c}}\|^2 = \left(\frac{2}{k}\right)^{\chi(\Gamma)/2} \frac{\prod_v \langle \check{c}_v^1, \check{c}_v^2, \check{c}_v^3 \rangle}{\prod_e \langle \check{c}_e \rangle} \quad (4.5)$$

où pour tout sommet trivalent v de Γ on note $\check{c}_v^1, \check{c}_v^2, \check{c}_v^3$ les couleurs des arêtes incidentes à v et pour toute arête interne e , \check{c}_e la couleur de cette arête. On définit aussi $\langle n \rangle = \sin(\pi n/r)$, $\langle n \rangle! = \prod_{k=1}^n \langle k \rangle$ et

$$\langle a, b, c \rangle = \frac{\langle i+j+k+1 \rangle! \langle i \rangle! \langle j \rangle! \langle k \rangle!}{\langle j+k \rangle! \langle i+k \rangle! \langle i+j \rangle!}$$

pour i, j, k définis par $a = j+k+1, b = i+k+1$ et $c = i+j+1$.

4.2 Fidélité asymptotique

4.2.1 Énoncé

L'objet de cette section est d'expliquer l'article [MN08]. Comme expliqué dans la section 4.1.2, pour toute surface fermée Σ de genre g , la TQFT (V_k, Z_k) induit une représentation d'une extension de $\text{MCG}(\Sigma)$ dans $V_k(\Sigma)$ notée φ_k . Notons $N_k^g \subset \text{MCG}(\Sigma)$ le noyau de la représentation $\varphi_k \otimes \varphi_k^*$: le théorème suivant est résumé dans la phrase « fidélité asymptotique des représentations quantiques ».

Théorème 6 (Andersen). [A06, FWW, MN08] *Soit Σ une surface de genre g . On a*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k^g = \begin{cases} \{\text{Identité, involution elliptique}\} & \text{si } g = 1 \\ \{\text{Identité, involution hyperelliptique}\} & \text{si } g = 2 \\ \{\text{Identité}\} & \text{si } g > 2 \end{cases}$$

L'article [MN08] est une troisième démonstration de ce résultat mais qui est plus élémentaire que les deux premières. Dans le reste de cette section, on esquisse cette démonstration.

Donnons nous une multicourbe $\gamma \subset \Sigma$. On a vu dans la Section 2.2 que cette multicourbe peut être vue comme un entrelacs en bande dans $\Sigma \times [0, 1]$. Posons

$$Z_k(\gamma) = Z_k(\Sigma \times [0, 1], \gamma, 2, 0) \in \text{End } V_k(\Sigma).$$

Cet opérateur hermitien s'appelle l'opérateur courbe associé à γ . Il joue un rôle primordial dans tout ce chapitre. On a l'estimation suivante :

Théorème 7.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{d(g)} \text{Tr}(Z_k(\gamma)Z_k(\delta)) = \int_{\mathcal{M}(\Sigma, G)} f_\gamma f_\delta \mu$$

où $\mu = \frac{\omega^{d(g)}}{d(g)!}$ est la mesure de Liouville associée à la forme symplectique sur $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ et $d(g)$ est la moitié de la dimension de $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ à savoir 1 si $g = 1$ et $3g - 3$ sinon.

Expliquons d'abord comment déduire le Théorème 6 du Théorème 7. Soit $g \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k^g$. Comme $Z_k(g(\gamma)) = \varphi_k(g)Z_k(\gamma)\varphi_k(g)^*$, on a $Z_k(g(\gamma)) = Z_k(\gamma)$ pour tout γ . On déduit du Théorème 7 que

$$\forall \gamma, \delta \quad \int f_\gamma f_\delta \mu = \int f_{g(\gamma)} f_\delta \mu$$

Or l'ensemble des f_δ est une famille totale dans $L^2(\mathcal{M}(\Sigma, G), \mu)$: on a donc l'identité $f_\gamma = f_{g(\gamma)}$ pour tout γ . Comme l'application $\Phi : K(\Sigma, -1) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma, G_{\mathbb{C}})$ est un isomorphisme d'après le Théorème 3, on en déduit $\gamma = g(\gamma)$. Il est alors bien connu qu'un élément non trivial de $\text{MCG}(\Sigma)$ agit non trivialement sur les courbes à moins que ce soit l'involution elliptique ou hyperelliptique, cf [FM].

4.2.2 Preuve du Théorème 7

Le théorème se montre en deux étapes : on commence par établir le lemme suivant qui consiste à choisir $\delta = \emptyset$.

Lemme 1.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{d(g)} \text{Tr}(Z_k(\gamma)) = \int_{\mathcal{M}(\Sigma, G)} f_\gamma \mu$$

Démonstration. Toute multicourbe γ est adaptée à une décomposition en pantalons. On entend par là qu'il existe une décomposition en pantalons indexée par un ensemble de courbes \mathcal{C} telle que la multicourbe γ soit égale à $\coprod_{\delta \in \mathcal{C}} \delta^{m_\delta}$ où m_δ est un entier éventuellement nul et δ^{m_δ} désigne m_δ copies parallèles de la courbe δ .

A une telle décomposition est associée une base privilégiée de l'espace vectoriel $V_k(\Sigma)$. En effet soit H un corps en anse tel que chaque $\delta \in \mathcal{C}$ borde un disque dans H et soit Γ le graphe trivalent de la décomposition en pantalons plongé dans H . Soit (φ_c) la base de $V_k(\Sigma)$ donnée par la Proposition 11. Un calcul utilisant les relations de Kauffman montre que

$$Z_k(\gamma)\varphi_c = \prod_{\delta \in \mathcal{C}} \left(-2 \cos\left(\frac{\pi c_\delta}{k}\right) \right)^{m_\delta} \varphi_c$$

On en déduit la formule

$$\text{Tr} Z_k(\gamma) = \sum_c \prod_{\delta \in \mathcal{C}} \left(-2 \cos\left(\frac{\pi c_\delta}{k}\right) \right)^{m_\delta}$$

Or cette dernière somme est une somme de Riemann. Quand $c : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_k$ parcourt les coloriage k -admissibles, la famille $(\frac{\pi c_\delta}{k})_{\delta \in \mathcal{C}}$ parcourt un maillage de Δ d'autant plus fin que k tend vers l'infini. Le volume de la maille du réseau est $(\frac{\pi}{k})^{d(g)}$. À cause de la relation d'imparité satisfaite par la somme des couleurs incidentes à chaque sommet, on obtient la formule

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{k} \right)^{d(g)} \text{Tr} Z_k(\gamma) = 2^{g-d(g)} \int_{\Delta} F_\gamma(\tau) d\tau.$$

où $F_\gamma(\tau) = \prod_{\delta \in \mathcal{C}} (-2 \cos(\tau))^{m_\delta}$. On reconnaît dans cette formule l'intégrale de la fonction f_γ sur les fibres de l'application $H : \mathcal{M}(\Sigma, G) \rightarrow \Delta$. En effet, on a $f_\gamma = F_\gamma \circ H$ et le volume d'une fibre de H est égal à $\text{Vol}(\mathbb{R}^C/\Lambda) = 2^g$. Ceci démontre le lemme. \square

Le théorème se déduit du lemme de la façon suivante : soit γ et δ deux multicourbes dans Σ . En les considérant comme des éléments de $K(\Sigma, t)$, on peut écrire $\gamma \cdot \delta = \sum_\zeta P_\zeta(t)\zeta \in K(\Sigma, t)$. Cette somme est finie et P_ζ est un polynôme de Laurent en t . La construction même de la TQFT implique que l'application $\gamma \mapsto Z_k(\gamma)$ est une représentation de l'algèbre de Kauffman $K(\Sigma, \zeta_k)$. En d'autres termes, on a l'équation :

$$Z_k(\gamma)Z_k(\delta) = \sum_\zeta P_\zeta(\zeta_k)Z_k(\zeta)$$

Prenant la trace de cette expression et la limite quand k tend vers l'infini on a d'après le Lemme 1 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{d(g)} \text{Tr}(Z_k(\gamma)Z_k(\delta)) = \sum_{\zeta} P_{\zeta}(-1) \int_{\mathcal{M}(\Sigma, G)} f_{\zeta} \mu.$$

Comme $\Phi : K(\Sigma, -1) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma, G_{\mathbb{C}})$ est un isomorphisme d'algèbre, on a $f_{\gamma}f_{\delta} = \sum_{\zeta} P_{\zeta}(-1)f_{\zeta}$ d'où on tire le résultat final en intégrant sur $\mathcal{M}(\Sigma, G)$.

4.2.3 Extension aux racines de l'unité

Dans l'article [M08], le Théorème 7 est étendu à certaines limites de TQFT pour lesquelles la racine primitive ζ_k ne tend pas vers -1 . Il est clair par construction que la TQFT que l'on a considéré a priori comme un foncteur à valeurs dans les espaces vectoriels sur \mathbb{C} prend en fait ses valeurs dans les espaces vectoriels sur le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_k)$. Le groupe de Galois cyclotomique agit non trivialement sur les représentations quantiques de la TQFT : la question d'interpréter géométriquement des limites semi-classiques tordues par cette action me semble être une question ouverte intéressante. Le théorème ci-dessous démontré à la fin de [M08] va dans ce sens :

Théorème 8. *Soit $a/b \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel sous forme irréductible avec $b > 0$ et donnons nous une suite k_n tendant vers $+\infty$ telle que la fraction $\theta_n = \frac{a}{b} + \frac{1}{2k_n}$ ait pour plus petit dénominateur $2k_n$. Notons ζ_n la racine $e^{i\pi\theta_n}$ et notons (V_n, Z_n) la TQFT associée à ce choix de racine. Alors on a pour toute courbe simple $\gamma \subset \Sigma$ l'égalité suivante :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{k_n} \right)^{d(g)} \text{Tr}(Z_n(\gamma)) = \text{Tr}(\mathcal{O}_{\gamma})$$

Dans cette formule, \mathcal{O}_{γ} est l'opérateur agissant sur $L^2(\mathcal{M}(\Sigma, G), \mathcal{L} \otimes \delta)$ par la formule

$$\mathcal{O}_{\gamma}(s)(\rho) = \Psi_{\gamma}^{2\pi a/b} s(\Psi_{\gamma}^{-2\pi a/b}(\rho)) + \Psi_{\gamma}^{-2\pi a/b} s(\Psi_{\gamma}^{2\pi a/b}(\rho)).$$

et Ψ_{γ}^t est l'opérateur de transport parallèle sur $\mathcal{L} \otimes \delta$ le long du flot hamiltonien de h_{γ} pendant un temps t .

Ce résultat est assez étonnant et ne se généralise pas à une formule pour la trace du produit de deux opérateurs courbe comme dans le Théorème 7 car l'application $\gamma \mapsto \mathcal{O}_{\gamma}$ n'est pas une représentation de l'algèbre de Kauffman $K(\Sigma, e^{i\pi a/b})$ comme on le rappelle à la fin de la Section 3.4.

4.3 Asymptotique de l'état d'un nœud

Dans les deux articles [CM11a, CM11b], on étudie la limite quand k tend vers l'infini non plus des traces des opérateurs courbe mais des invariants associés aux variétés fermées de dimension 3 ainsi qu'aux complémentaires de nœuds. Rappelons la conjecture de Witten concernant l'asymptotique des invariants quantiques des variétés de dimension 3.

Partant de la formule heuristique $Z_k(M) = \int e^{ik \text{CS}(\alpha)} d\alpha$, on obtient par la méthode de la phase stationnaire formelle que l'intégrale se concentre sur les points critiques de la fonctionnelle de Chern-Simons, à savoir les connexions plates. Comme l'intégrale est invariante par le groupe de jauge, la formule asymptotique pour $Z_k(M)$ fait apparaître une somme sur l'espace des modules $\mathcal{M}(M, G)$. Plus précisément, E. Witten conjecture la formule suivante :

Conjecture 2. *Soit M une variété de dimension 3 vérifiant l'hypothèse*

$$\forall \rho \in \mathcal{M}(M, G), \quad H^1(M, \text{Ad}_\rho) = 0. \quad (\text{H})$$

Alors,

$$Z_k(M) = \frac{1}{2} \sum_{\rho \in \mathcal{M}(M, G)} e^{im(\rho)\frac{\pi}{4}} \left(\frac{k}{2}\right)^{n(\rho)} \lambda_k(\rho) e^{ik \text{CS}(\rho)} + O(k^{-\infty})$$

où pour tout $\rho \in \mathcal{M}(M, G)$, $m(\rho)$ est un entier, $n(\rho)$ vaut 0, $-1/2$ ou $-3/2$ suivant que ρ est irréductible, abélien ou central. De plus $\lambda_k(\rho)$ est une suite de nombres complexes ayant un développement asymptotique en puissances de k dont le premier terme est :

- $\mathbb{T}(\rho)^{1/2}$ si ρ est non centrale
- $\pi/p^{3/2}$ si ρ est centrale avec $p = \#H_1(M, \mathbb{Z})$.

où $\mathbb{T}(\rho)$ désigne la torsion de Reidemeister de M tordue par ρ .

Cette conjecture a été démontrée pour de nombreuses variétés de Seifert. Cette étude a commencé avec L. Jeffrey ([J92]) puis L. Rozansky [R96] et R. Lawrence et D. Zagier ([LZ99]). Leur étude a été poursuivie par H. Hikami [H05], S. Hansen et T. Takata ([HT01]). Par l'approche géométrique, le résultat a été démontré pour les tores d'applications d'ordre fini, [A95] et pour les tores d'applications satisfaisant une hypothèse de transversalité, [C10b]. Les idées présentées dans cette section ont permis de démontrer le résultat suivant :

Théorème 9. *La Conjecture 2 est vérifiée pour toutes les variétés obtenues par remplissage de Dehn sur le nœud de huit qui vérifient (H).*

On prouve en particulier la conjecture pour une infinité de variétés hyperboliques. Cette famille de variétés a été étudiée auparavant dans [AH06] avec des méthodes très différentes. Le reste de cette section présente les grandes lignes des articles [CM11a, CM11b].

4.3.1 Quantification géométrique du tore

Soit K un nœud orienté dans S^3 et E_K le complémentaire d'un voisinage tubulaire de K . Il existe un difféomorphisme unique à isotopie près de ∂E_K avec le tore standard $\Sigma = S^1 \times S^1$ qui envoie les deux facteurs respectivement sur le méridien et la longitude de K . La TQFT nous permet de considérer le vecteur $Z_k(E_K) \in V_k(\Sigma)$ que l'on appelle « état du nœud ». L'objectif principal des articles [CM11a, CM11b] est de décrire l'asymptotique de l'état du nœud quand k tend vers l'infini à l'aide d'outils semi-classiques. La première étape consiste à se donner un modèle concret pour la

suite d'espaces vectoriels $V_k(\Sigma)$ que l'on va identifier à la quantification géométrique de l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma, G)$.

Soit E l'espace vectoriel $H_1(\Sigma, \mathbb{R})$ muni de la structure symplectique $\omega(\gamma, \delta) = 4\pi \gamma \cdot \delta$ où \cdot désigne le produit d'intersection. Notons R le réseau $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ et faisons agir le groupe \mathbb{Z}_2 sur E par inversion. L'application

$$\pi : \begin{cases} E \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, G) \\ x \mapsto [\gamma \mapsto \exp((\gamma \cdot x)D)] \end{cases}$$

où D est la matrice diagonale d'entrées $2i\pi, -2i\pi$ identifie $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ avec le quotient de E par le groupe $R \rtimes \mathbb{Z}_2$. Pour quantifier $\mathcal{M}(\Sigma, G)$, on quantifie $E/R \rtimes \mathbb{Z}_2$ ce qu'on fait en quantifiant E et l'action de $R \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Soit j une structure complexe sur E et (δ, φ) une droite complexe de demi-forme, c'est-à-dire que δ est une droite complexe et φ est un isomorphisme de δ^2 avec la droite canonique $K_j = \{\alpha \in E^* \otimes \mathbb{C}, \alpha(j \cdot) = i\alpha\}$. Soit L le fibré hermitien trivial $E \times \mathbb{C}$ muni de la forme de connexion $d + \frac{1}{i}\alpha$ où $\alpha_x(y) = \frac{1}{2}\omega(x, y)$.

On définit le groupe d'Heisenberg $E \times U(1)$ par la formule :

$$(x, u).(y, v) = (x + y, uv \exp(\frac{i}{2}\omega(x, y))).$$

La même formule définit une action de E sur L . On fait par contre agir E trivialement sur δ . On déclare au contraire que l'inversion agit trivialement sur L et par -1 sur δ . Cela nous donne une action de $R \rtimes \mathbb{Z}_2$ sur $L^k \otimes \delta$.

Notons \mathcal{H}_k et $\mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ les sections holomorphes de $L^k \otimes \delta$ qui sont respectivement R -invariantes et $R \rtimes \mathbb{Z}_2$ -invariantes. On munit \mathcal{H}_k du produit hermitien $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int_P \langle \Psi_1(x), \Psi_2(x) \rangle_\delta |\omega|$ où P est un domaine fondamental pour l'action de R sur E .

Soit μ et $\lambda \in R$ le méridien et la longitude respectivement. Les éléments $(\mu/2k, 1)$ et $(-\lambda/2k, 1)$ du groupe d'Heisenberg agissent sur $L^k \otimes \delta$ et préservent le sous-espace \mathcal{H}_k . Notons M et L les restrictions de ces opérateurs à ce sous-espace. La proposition suivante est un résultat bien connu sur les fonctions Θ .

Proposition 12. *Soit $\Omega_\lambda \in \delta$ un élément tel que $\varphi(\Omega_\lambda^2)(\lambda) = 1$. Alors il existe une unique base orthonormée $(\Psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}_{2k}}$ de \mathcal{H}_k telle que*

$$\begin{aligned} M\Psi_\ell &= e^{i\ell\frac{\pi}{k}}\Psi_\ell & L\Psi_\ell &= \Psi_{\ell-1} \text{ et} \\ \Psi_0(0) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} \Omega_\mu \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi kn^2\tau} \end{aligned}$$

où $\tau = \alpha + i\beta$ avec α, β déterminés par l'équation $\lambda = \alpha\mu + \beta j\mu$.

Soit H le corps en anse $D^2 \times S^1$ et Γ le graphe $\{0\} \times S^1$. Le Théorème 11 indique que la famille $e_\ell = Z_k(H, \Gamma, \ell, 0)$ pour $\ell \in \mathcal{C}_k$ est une base orthonormée de $V_k(\Sigma)$. Soit I_k l'isométrie suivante :

$$I_k : \begin{cases} V_k(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}_k^{\text{alt}} \\ e_\ell \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_\ell - \Psi_{-\ell}) \end{cases}$$

On peut montrer le résultat suivant :

Proposition 13. *L'isomorphisme $I_k : V_k(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ ne dépend pas du difféomorphisme entre Σ et $S^1 \times S^1$. En d'autres termes, c'est un isomorphisme de représentations (projectives) de $\text{MCG}(\Sigma) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Sous-entendant l'isomorphisme $I_k : V_k(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} Z_k(\mu) &= -M - M^{-1} \\ Z_k(\lambda) &= -L - L^{-1} \end{aligned}$$

Ces opérateurs courbe joueront un rôle prépondérant dans la Section 4.3.3. Ils permettent d'encoder les relations aux q-différences satisfaites par les polynômes de Jones coloriés et - en tant qu'opérateurs de Toeplitz - permettent de démontrer les propriétés semi-classiques conjecturées dans la section suivante.

4.3.2 Conjectures de Witten généralisées

On se propose d'établir dans cette partie l'équivalent de la Conjecture 2 pour les complémentaires de nœuds. Si pour un nœud K , cette nouvelle conjecture est vérifiée, alors la Conjecture 2 sera vérifiée pour tous les remplissage de Dehn de K vérifiant l'hypothèse (H), on aura aussi une nouvelle preuve du théorème de Melvin-Morton-Rozansky reliant les polynôme de Jones coloriés au polynôme d'Alexander.

Soit $r : \mathcal{M}(E_K, G) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, G)$ l'application de restriction. Donnons nous $x \in E$ et $\rho \in \mathcal{M}(E_K, G)$ tels que $\pi(x) = r(\rho)$. On dira que x est un point « régulier » si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $r^{-1}(r(\rho)) = \{\rho\}$
- $\dim H^1(E_K, \text{Ad}_\rho) = 1$

On peut montrer que le fibré $L \rightarrow E$ descend en un orbi-fibré sur $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ qui s'identifie au fibré de Chern-Simons \mathcal{L} . Si $x \in E$ vérifie $\pi(x) = r(\rho)$ pour un unique ρ , on peut alors définir $\text{CS}(x) = \text{CS}(\rho)$ d'après le diagramme 3.5. On obtient ainsi une section plate et $R \rtimes \mathbb{Z}_2$ -équivariante de L au-dessus de la partie régulière de $\pi^{-1}(r(\mathcal{M}(E_K, G)))$.

Dans ce mémoire, on ne rappelle pas faute de place la construction de la torsion de Reidemeister non abélienne. Il s'agit d'un invariant associant à toute représentation régulière $\rho \in \mathcal{M}(E_K, G)$ un élément $\mathbb{T}(\rho) \in H^1(E_K, \text{Ad}_\rho)^* = T_\rho^* \mathcal{M}(E_K, G)$, cf [CM11b].

Conjecture 3. *Soit $K \subset S^3$ un noeud et E_K son complémentaire. Notons $Z_k(E_K) \in V_k(\Sigma) \simeq \mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ la famille des états de K . On a les estimations suivantes pour tout $x \in E$:*

- Si $\pi(x) \notin r(\mathcal{M}(E_K), G)$ alors $Z_k(E_K)(x) = O(k^{-\infty})$
- Si x est irréductible et régulier avec $\pi(x) = r(\rho)$ alors

$$Z_k(E_K)(x) \sim e^{im\pi/4} \frac{k^{3/4}}{4\pi^{3/4}} e^{ik \text{CS}(\rho)} \tau_\rho^{1/2}$$

- Si x est abélien et régulier avec $\pi(x) = r(\rho)$ alors

$$Z_k(E_K)(x) \sim e^{im\pi/4} \frac{k^{1/4}}{2^{3/2}\pi^{3/4}} e^{ik \text{CS}(\rho)} \tau_\rho^{1/2}$$

où $m \in \mathbb{Z}$ et $\tau_\rho \in \delta^2$ vérifie $r^*\varphi(\tau_\rho) = \pm\mathbb{T}(\rho)$ via l'isomorphisme

$$\delta^2 \simeq (T_\rho^{1,0}\mathcal{M}(\Sigma, G))^* \simeq T_\rho^*\mathcal{M}(E_K, G) \otimes \mathbb{C}$$

Cette conjecture est une version allégée des Conjectures 4.1, 4.2 et 4.3 de [CM11b]. Dans ces dernières, on donne une estimation uniforme au voisinage de chaque point ainsi qu'un développement asymptotique.

La principale application de la Conjecture 3 (complète) est la suivante :

Théorème 10. *Soit K un noeud dans S^3 vérifiant la Conjecture 3.*

Supposons que le remplissage de Dehn $M_{p/q}$ de K de pente p/q vérifie l'hypothèse (H) et que l'application $\mathcal{M}(M_{p/q}, G) \rightarrow \mathcal{M}(L, G)$ induite par l'inclusion de l'âme de la chirurgie $L \subset M_{p/q}$ soit injective.

Alors $M_{p/q}$ vérifie la Conjecture 2.

4.3.3 Relations aux q -différences des polynômes de Jones

Relations aux q -différences

Soit K un noeud dans S^3 et $(J_K^\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]^{\mathbb{Z}}$ la famille des polynômes de Jones coloriés de K . Ces polynômes vérifient pour tout $\ell \in \mathbb{C}_k$:

$$Z_k(S^3, K, \ell, 0) = \eta J_K^\ell(\zeta_k).$$

où on a posé $\eta = \sqrt{\frac{2}{k}} \sin(\frac{\pi}{k})$ et $\zeta_k = -e^{i\pi/2k}$. On a les symétries suivantes :

$$J_K^{-\ell} = -J_K^\ell, \quad J_K^{\ell+2k}(\zeta_k) = J_K^\ell(\zeta_k). \quad (4.6)$$

Notons \mathcal{P} l'ensemble des $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ vérifiant les équations (4.6). On définit pour tout $f \in \mathcal{P}$:

$$Z_k(f) = \eta \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_{2k}} f_\ell(\zeta_k) \Psi_\ell \in \mathcal{H}_k.$$

De telle sorte qu'on a $Z_k(E_K) = Z_k(J_K)$. Notons M et L les opérateurs agissant sur f par

$$(Mf)_n = t^{2n} f_n \quad (Lf)_n = f_{n+1}$$

Les opérateurs M et L engendrent le tore quantique \mathcal{T} , c'est-à-dire qu'ils vérifient la relation $LM = t^2 ML$. L'application $f \mapsto Z_k(f)$ commute à l'action de \mathcal{T} .

On appelle relation aux q -différences inhomogène satisfaite par f une paire (P, R) où $P \in \mathcal{T}$ et $R \in \mathcal{P}$ telle que $Pf = R$. Une telle relation satisfaite par les polynômes de Jones coloriés de K donne lieu à une équation de la forme

$$P(M, L)Z_k(E_K) = Z_k(R).$$

par exemple, dans le cas du noeud de huit, on a $QZ_k(E_8) = RZ_k^0$ où

$$\begin{aligned}
Q &= (q^{-1}M^2 - qM^{-2})L + (qM^2 - q^{-1}M^{-2})L^{-1} + (M^2 - M^{-2})(-M^4 \\
&\quad - M^{-4} + M^2 + M^{-2} + q^2 + q^{-2}), \\
R &= (M^5 + M^{-5} + M^3 + M^{-3} - (q^2 + q^{-2})(M + M^{-1}))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

avec $q = \zeta_k^2 = e^{i\pi/k}$ et Z_k^0 la section de \mathcal{H}_k définie par

$$Z_k^0 = \frac{1}{2i\sqrt{k}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}} \Psi_\ell.$$

S. Garoufalidis et T. Q. T. Le ont montré dans [GL05] que de telles relations existent pour tous les nœuds. Ces relations ont été calculées explicitement pour les nœuds toriques par T. Hikami dans [Hi04] et pour le nœud de huit (plus généralement les nœuds twists) par S. Garoufalidis et X. Sun, cf [GS10]. Pour les nœuds à deux ponts, T. Q. T. Le a étudié ces relations au travers de la Conjecture AJ dans [Le06]. Ce dernier travail relie les relations aux q -différences des polynômes de Jones coloriés d'un nœud K au module d'écheveau du complémentaire E_K . Il s'agit de la motivation principale de la Conjecture 1, un thème que je souhaite explorer prochainement.

Opérateurs de Toeplitz et sections lagrangiennes

Dans cette partie, on décrit brièvement les outils analytiques permettant de déduire la Conjecture 3 pour le nœud de trèfle et le nœud de huit. Ceux-ci sont développés dans [C03, C06].

Soit \mathcal{H}_k^2 l'ensemble des sections $L^k \otimes \delta \rightarrow E$ qui sont R -invariantes et localement L^2 . Notons $T = E/R$: on verra les éléments de \mathcal{H}_k^2 comme des sections au-dessus de T . Soit $\Pi_k : \mathcal{H}_k^2 \rightarrow \mathcal{H}_k$ le projecteur L^2 sur le sous-espace de dimension finie formé par les sections holomorphes. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$, on note $\text{Mult}(f)$ l'opérateur de multiplication par f agissant sur \mathcal{H}_k^2 .

Un opérateur de Toeplitz est une famille $(T_k \in \text{End}(\mathcal{H}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ de la forme

$$T_k = \Pi_k \text{Mult}(f(\cdot, k)) + R_k \tag{4.8}$$

où $(f(\cdot, k))$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(T)$ ayant un développement asymptotique de la forme

$$f(\cdot, k) = f_0 + k^{-1}f_1 + \dots$$

pour la topologie \mathcal{C}^∞ . De plus la famille R_k vérifie pour tout N l'estimation $\|R_k\| = O(k^{-N})$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme des opérateurs. Les coefficients f_0, f_1, \dots sont déterminés par la famille T_k . On appelle f_0 le symbole principal de (T_k) et $f_1 - \frac{1}{2}\Delta f_0$ le symbole sous-principal.

On montre dans [CM11a] le résultat (classique) suivant :

Proposition 14. *Les opérateurs M et L agissant sur \mathcal{H}_k sont des opérateurs de Toeplitz de symboles principaux $e^{-2i\pi q}$ et $e^{-2i\pi p}$ où q, p sont les coordonnées duales de la base (μ, λ) de E . Leurs symboles sous-principaux s'annulent.*

Soit (S_k) et (T_k) deux opérateurs de Toeplitz de symboles principaux respectifs f_0, g_0 et sous-principaux f_1, g_1 . Alors il est bien connu que $(S_k T_k)$ est un opérateur de Toeplitz de symbole principal $f_0 f_1$ et sous-principal

$$f_0 g_1 + f_1 g_0 + \frac{1}{2i} \{f_0, g_0\}$$

On peut déterminer ainsi les symboles principaux et sous-principaux de tous les opérateurs de la forme $P(M, L)$ où $P \in \mathcal{T}$.

Les vecteurs propres des opérateurs de Toeplitz, sont sous des hypothèses favorables des états lagrangiens, une notion classique en analyse semi-classique que l'on définit ci-dessous.

Soit U un ouvert de T , $L \subset U$ une sous-variété lagrangienne, F une section plate de $\mathcal{L}|_L$ et $g(\cdot, k) \in \mathcal{C}^\infty(L, \delta)$ une famille de fonctions lisses ayant un développement asymptotique en puissances de k dont le premier terme est de la forme $g = k^r g_0$ pour un certain $r \in \mathbb{Q}$ et $g_0 \in \mathcal{C}^\infty(T, \delta)$.

On dit que $\Psi_k \in \mathcal{H}_k$ restreint à U est un « état lagrangien » de données semi-classiques (L, F, g) si

$$\forall x \in U, \Psi_k(x) = \tilde{F}^k(x) \tilde{g}(x, k) + R_k(x)$$

où

- \tilde{F} est une section holomorphe de $\mathcal{L}|_U$ étendant F
- $\tilde{g}(\cdot, k)$ est une famille de sections holomorphes de $\delta|_U$ étendant $g(\cdot, k)$
- Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in U, |R_k(x)| \leq C k^{-N}$.

En particulier, si L est vide, on écrira $\Psi_k|_U = O(k^{-\infty})$.

Les opérateurs de Toeplitz préservent les états Lagrangiens au sens où si (T_k) est un opérateur de Toeplitz de symbole principal f et Ψ_k un état Lagrangien de données (L, F, g) alors $T_k \Psi_k$ est Lagrangien et a pour données (L, F, fg) .

On a alors la proposition suivante :

Proposition 15. *Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un opérateur de Toeplitz de symboles principal et sous-principal f_0 et f_1 . Soit $\Psi_k \in \mathcal{H}_k$ une famille de vecteurs qui, restreints à un ouvert $U \subset T$ forment un état Lagrangien de données semi-classiques (L, F, g) . Soit Φ_k une solution de l'équation*

$$T_k \Phi_k = \Psi_k.$$

Alors pour tout $x \in U$, il existe un ouvert V tel que $x \in V \subset U$ et tel que :

- Si $f_0(x) \neq 0$, Φ_k est un état Lagrangien de données $(L, F, g/f_0)$.
- Si $f_0(x) = 0$, $D_x f_0 \neq 0$ et $x \notin L$ alors il existe une suite λ_k telle que $\lambda_k \Phi_k$ soit un état Lagrangien de données (L, F, g) où $L = V \cap \{f_0 = 0\}$, F est une section plate de $\mathcal{L}|_L$ et g satisfait l'équation de transport :

$$L_{X_{f_0}} g + 2i f_1 g = 0 \tag{4.9}$$

où X_{f_0} est le champ de vecteur Hamiltonien associé à f_0 .

Application aux états de nœuds

La Proposition 15 permet de tirer parti des relations q -différentielles pour décrire semi-classiquement l'état d'un nœud. En pratique, il est nécessaire d'utiliser plusieurs équations (ou systèmes d'équations) pour parvenir à démontrer la Conjecture 3. Expliquons ce que l'on peut tirer de l'équation 4.7.

Soit (q, p) les coordonnées duales de la base (μ, λ) de E . Les symboles principaux et sous-principaux de Q sont

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -4i \sin(4\pi q)(\cos(2\pi p) - \cos(8\pi q) + \cos(4\pi q) + 1) \\ f_1(x) &= -8\pi \cos(4\pi q) \sin(2\pi p) \end{aligned}$$

tandis que le symbole principal de R est $h = 2 \cos(10\pi q) + 2 \cos(6\pi q) - 4 \cos(2\pi q)$. On montre dans le Théorème 5.4 de [CM11a] que Z_k^0 est un état Lagrangien de données $(\mathbb{R}\lambda, t_\lambda, g)$ où t_λ est la section plate de $\mathbb{R}\lambda$ qui vaut 1 en 0 et $g = \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} \Omega_\lambda$.

Partie abélienne : On déduit de l'équation (4.7) que si $q \notin \frac{1}{4}\mathbb{Z}$, l'état du nœud au voisinage de $q\lambda$ est lagrangien de données $(\mathbb{R}\lambda, t_\lambda, g_8)$ avec

$$g_8 = \frac{gh}{f_0} = \frac{e^{im\pi/4}}{\sqrt{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} \frac{\sin(2\pi q)}{\Delta_8(e^{4i\pi q})} \Omega_\lambda$$

où $\Delta_8(t) = -t^{-1} + 3 - t$ est le polynôme d'Alexander du nœud de huit et $m \in \mathbb{Z}$. Ceci est en accord avec le cas abélien de la Conjecture 3 d'après la formule reliant la torsion de Reidemeister abélienne avec le polynôme d'Alexander, cf Formule (12) dans [CM11b].

Partie irréductible : La sous-variété $L = r(\mathcal{M}^{\text{irr}}(E_8, G))$ est décrite par l'équation $f_0 = 0$ tant que $q \notin \frac{1}{4}\mathbb{Z}$. Cette hypothèse est levée par l'introduction d'autres équations q -différentielles dont on ne parle pas dans ce mémoire introductif. La Proposition 15 nous apprend qu'il existe une suite λ_k telle que l'état $\lambda_k Z_k(E_8)$ soit Lagrangien de données (L, F, g) où F est une section plate que l'on peut identifier à la section de Chern-Simons et g est une fonction inconnue satisfaisant l'équation (4.9). On démontre la Conjecture 3 pour la partie irréductible à partir des deux ingrédients non triviaux suivants :

- La racine carrée de la torsion de Reidemeister, vue comme section de $\delta|_L$ vérifie l'équation de transport (4.9).
- La chirurgie de pente ± 1 sur le nœud de huit produit la sphère de Brieskorn $\Sigma(2, 3, 7)$ pour laquelle la conjecture de Witten est satisfaite (cf [H05]) et cela permet de fixer la valeur asymptotique de la suite λ_k ainsi que d'initialiser l'équation différentielle (4.9).

Les techniques semi-classiques permettent donc de donner une description asymptotique des états des nœuds de huit et toriques et d'en déduire la conjecture de Witten pour leurs remplissages de Dehn. Je souhaite généraliser ces techniques à plus de nœuds. Cela passe par une compréhension profonde des relations aux q -différences, elles-mêmes reliées aux modules d'écheveaux, cf [Le06].

4.4 Opérateurs courbe et opérateurs de Toeplitz

Dans la section précédente, on a utilisé de manière cruciale le fait que pour un tore Σ , l'espace vectoriel $V_k(\Sigma)$ s'identifiait à la quantification géométrique en niveau k de l'espace des représentations $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ et que pour toute multicourbe $\gamma \subset \Sigma$, les opérateurs $Z_k(\gamma) \in \text{End } V_k(\Sigma)$ étaient des opérateurs de Toeplitz. Un tel résultat pour Σ quelconque constituerait une étape importante pour prouver des formules asymptotiques d'invariants de la forme $Z_k(M, \Gamma, kc, 0)$ quand le niveau k tend vers l'infini. Pour l'instant, ce résultat est hors de portée mais on propose dans [MP11] une stratégie générale que l'on met en œuvre dans le cas où Σ est une sphère avec 4 points marqués ou un tore avec un point marqué. On dira pour simplifier que Σ est une « petite surface ». On en déduit une formule asymptotique pour les éléments de matrices des représentations quantiques du groupe de difféotopie des petites surfaces. Cela comprend une nouvelle preuve de l'asymptotique des 6j-symboles quantiques ainsi qu'une formule asymptotique originale pour la S -matrice épointée.

Comme évoqué dans l'introduction, J. E. Andersen a introduit et étudié des opérateurs courbe qui sont par définition des opérateurs de Toeplitz, voir [A06, A10, A05, A09, A11]. Il s'agit par exemple d'un point clé dans sa preuve du théorème de fidélité asymptotique (cf. Théorème 6). Cependant, comme l'isomorphisme entre la TQFT combinatoire et la TQFT géométrique n'est pas clair, il s'agit a priori d'opérateurs différents.

4.4.1 Les opérateurs courbe sont trigonométriques

Soit Σ une surface munie de points marqués p_1, \dots, p_n , k un niveau et $c \in \mathcal{C}_k^n$ un coloriage des points marqués. Soit \mathcal{C} une famille de courbes découpant Σ en pantalons : notons Γ le graphe trivalent associé et E l'ensemble de ses arêtes. Rappelons que \mathcal{C} s'identifie à une partie de E : les arêtes internes, les autres étant en bijection avec les points marqués, voir Figure 4.2.

Rappelons aussi qu'on a défini dans la Section 2.3.1 une application

$$H : \mathcal{M}(\Sigma', G) \rightarrow \Delta \subset [0, \pi]^E.$$

Considérons la corestriction \widehat{H} de cette application à l'ensemble $\widehat{\Delta}$ des $(\alpha_e)_{e \in E}$ vérifiant $\alpha_i = \frac{\pi c_i}{k}$ pour $i = 1, \dots, n$. On se servira du lemme suivant :

Lemme 2. *Il existe une section de \widehat{H} privilégiée $s : \text{Int}(\widehat{\Delta}) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma', G)$ définie de la façon suivante. Pour toute courbe $\delta \in \mathcal{C}$, il existe une courbe $\widehat{\delta}$ construite comme dans la Figure 4.2 : elle ne coupe que δ parmi les courbes de la décomposition en pantalons. Pour tout $\alpha \in \text{Int}(\widehat{\Delta})$, $s(\alpha)$ est la représentation dans $\widehat{H}^{-1}(\alpha)$ qui minimise simultanément les fonctions $h_{\widehat{\delta}}$ pour $\delta \in \mathcal{C}$.*

Ce lemme nous permet d'identifier le sous-ensemble $\widehat{H}^{-1}(\text{Int}(\widehat{\Delta})) \subset \mathcal{M}(\Sigma', G)$ au produit $\text{Int}(\widehat{\Delta}) \times (\mathbb{R}^{\mathcal{C}}/\Lambda)$. On notera $(\alpha_\gamma, \theta_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{C}}$ les coordonnées symplectiques associées. Rappelons que la décomposition en pantalons de Σ ci-dessus définit d'après le Théorème 11 une base hermitienne $(\varphi_{\vec{c}})$ de $V_k(\Sigma, p, c, \Lambda)$ paramétrée par les coloriages

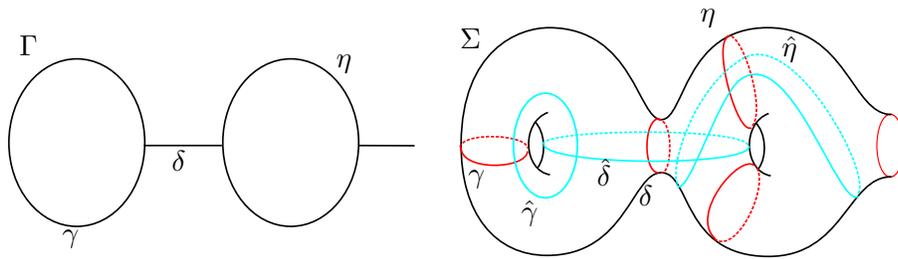


FIGURE 4.2 – Décomposition en pantalons

k -admissibles de Γ compatibles avec le coloriage des points marqués c . On note $\psi_{\check{c}}$ la base normalisée issue de la base $(\varphi_{\check{c}})$.

On dit qu'un opérateur $T_k \in \text{End}(V_k(\Sigma))$ est « trigonométrique » s'il existe un ouvert $V \subset \widehat{\Delta} \times [0, 1]$ contenant $\widehat{\Delta} \times \{0\}$ et une famille de fonctions $F_m : V \rightarrow \mathbb{C}$ indexée par les applications $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que pour tout coloriage k -admissible \check{c} on a

$$T_k \psi_{\check{c}} = \sum_m F_m\left(\frac{\check{c}}{k}, \frac{1}{k}\right) \psi_{\check{c}+m}.$$

Toute multicourbe γ définit un opérateur courbe $Z_k(\gamma)$. On fait alors la conjecture suivante :

Conjecture 4. *Pour toute multicourbe γ , l'opérateur courbe $Z_k(\gamma)$ est trigonométrique. Notons $F_m^\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}$ les fonctions associées. On a :*

- $F_m^\gamma = 0$ s'il existe $\delta \in \mathcal{C}$ telle que $\#(\delta \cap \gamma) < m_\delta$.
- L'application $F_m^\gamma(\cdot, 0)$ est égale à la m -ième composante de Fourier de la fonction trace f_γ . En formule, on a :

$$F_m^\gamma(\alpha, 0) = (2\pi)^{-\#\mathcal{C}} \int_{\mathbb{T}^{\mathcal{C}}} f_\gamma(t.s(\alpha)) e^{-im \cdot t} dt$$

- Ecrivons $\sigma^\gamma(\alpha, \theta, \hbar) = \sum_m F_m^\gamma(\alpha, \hbar) e^{im \cdot \theta}$ de telle sorte que la condition précédente s'écrive $\sigma^\gamma(\alpha, \theta, \hbar) = f_\gamma(\alpha, \theta) + O(\hbar)$. On a alors l'estimation suivante au deuxième ordre :

$$\sigma^\gamma = f_\gamma + \left(\frac{1}{2i} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial \theta_\gamma \partial \alpha_\gamma} \right) \hbar + O(\hbar^2)$$

Dans [MP11], on démontre cette conjecture dans le cas des petites surfaces. La preuve passe par un calcul explicite pour trois générateurs, puis utilise la structure multiplicative de l'algèbre de Kauffman $K(\Sigma', t)$.

4.4.2 Les opérateurs courbe sont de Toeplitz

La définition d'un opérateur de Toeplitz sur le tore T donnée dans l'équation (4.8) se transpose *mutatis mutandis* au cas où T est une variété Kählerienne quelconque munie d'un fibré préquantifiant et d'un fibré de demi-formes. On va expliquer dans

cette section que les opérateurs courbe sur une petite surface sont des opérateurs de Toeplitz sur la sphère dont on connaît explicitement le symbole et le sous-symbole. Cela est conforme à l'idée générale que la TQFT est la quantification des espaces de représentations puisque dans le cas des petites surfaces, l'espace des représentations avec des classes de conjugaisons fixées autour des points marqués $\mathcal{M}(\Sigma', G) \cap \widehat{H}^{-1}(\widehat{\Delta})$ est une sphère symplectique de dimension 2. Expliquons brièvement comment quantifier la sphère S^2 standard.

Quantification de la sphère et opérateurs de Toeplitz

Soit \mathbb{P}^1 la droite projective complexe munie de la métrique de Fubini-Study. Notons $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ l'inverse du fibré tautologique et posons $\mathcal{H}_N = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}^N)$. Dans une carte affine de \mathbb{P}^1 , cet espace s'identifie aux polynômes de degré strictement inférieur à N . Posons

$$\langle P, Q \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{P(z)\overline{Q(z)}}{(1+|z|^2)^{N+1}} dz d\bar{z} \quad \text{et} \quad \varphi_n^N(z) = \sqrt{\frac{N!}{n!(N-1-n)!}} z^n \quad (4.10)$$

Les vecteurs $(\varphi_n^N)_{n=0, \dots, N-1}$ forment une base orthonormée de \mathcal{H}_N . Par la projection stéréographique $z = \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} e^{i\theta}$ on identifie \mathbb{P}^1 à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ puis au cylindre $[0, 1] \times \mathbb{T}$ dont on a contracté les bords.

Toute fonction bornée sur la sphère f induit un opérateur T_f^N par la formule $T_f^N = \Pi_N \text{Mult}(f)$ où $\Pi_N : L^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}^N) \rightarrow \mathcal{H}_N$ est le projecteur orthogonal.

Si on note $F_{n,m}^N$ les éléments de matrice de T_f^N dans la base des φ_n^N on a la formule

$$F_{n,n+\mu}^N = \int_0^\infty f_\mu(\rho) \rho^{n+\frac{\mu}{2}} \frac{d\rho}{(1+\rho)^{N+1}} C(N, \mu, n)^{-1}$$

où on a posé $f(\sqrt{\rho}e^{i\theta}) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} f_\mu(\rho) e^{i\mu\theta}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$C(N, \mu, s) = \frac{\sqrt{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\mu+1)\Gamma(N-s)\Gamma(N-s-\mu)}}{\Gamma(N+1)}$$

Utilisant la transformée de Mellin \mathcal{M} et son inverse \mathcal{M}^{-1}

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}, \quad \mathcal{M}^{-1}F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} F(s) ds.$$

on obtient formellement pour une valeur de c convenable :

$$f_\mu(\rho) = \frac{1}{2i\pi} \rho^{-1-\frac{\mu}{2}} (1+\rho)^{N+1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_{s,s+\mu} \rho^{-s} C(N, \mu, s) ds.$$

Ces formules permettent de reconstituer la fonction f à partir de la matrice de T_f^N pourvu que l'on ait fait un prolongement analytique convenable des éléments de matrice. On verra qu'un tel prolongement apparaît naturellement en TQFT.

Opérateurs courbe comme opérateurs de Toeplitz

Pour appliquer la méthode ci-dessus, il faut tout d'abord identifier la TQFT avec l'espace \mathcal{H}_N . Soit $O = (\Sigma, p, c, \Lambda)$ un objet de Cob_k avec Σ une petite surface. Une décomposition en pantalons de Σ nécessite une seule courbe γ . Soit Γ le graphe associé à cette décomposition et $\psi_{\tilde{c}}$ la base hermitienne de $V_k(O)$ rappelée dans la Section 4.4.1. On note m la couleur de l'unique arête interne de Γ et par abus de notation on pose $\psi_m = \psi_{\tilde{c}}$.

Il existe un unique isomorphisme qui identifie la base hermitienne (φ_n^N) de \mathcal{H}_N avec la base hermitienne (ψ_m) de $V_k(O)$ telle que la correspondance $n \mapsto m$ soit une application croissante. La relation entre k et N est une fonction affine qui dépend de l'objet O . Dans tous les cas, on peut ainsi considérer pour toute courbe $\gamma \subset \Sigma$ l'opérateur $Z_k(\gamma)$ comme un endomorphisme de \mathcal{H}_N .

Détaillons un peu les deux cas que l'on va considérer pour expliquer de quelle manière on fait tendre k et N vers l'infini. Soit Σ une petite surface, D un niveau impair et c un coloriage D -admissible des points marqués de Σ . Pour tout entier impair \bar{k} on pose $k = D\bar{k}$. Le coloriage $\bar{k}c$ est k -admissible ainsi l'espace $V_k(\Sigma, p, \bar{k}c, \Lambda)$ est bien défini et sa dimension croît linéairement.

- Si Σ est un tore, D le niveau et α la couleur du point marqué, on observe que l'espace $V_k(\Sigma, p, \alpha\bar{k}, \Lambda)$ a pour dimension $\Delta\bar{k}$ avec $\Delta = (D - \alpha)$.
- Si Σ est une sphère, D le niveau et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les couleurs des points marqués, l'espace $V_k(\Sigma, p, c\bar{k}, \Lambda)$ a pour dimension $\Delta\bar{k}$ avec

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\min(\alpha + \delta, 2D - \alpha - \delta, \beta + \gamma, 2D - \beta - \gamma) - \max(|\alpha - \delta|, |\beta - \gamma|) \right).$$

On montre dans [MP11] le théorème suivant :

Théorème 11. *Soit $O = (\Sigma, p, c, \Lambda)$ un objet de Cob_D avec D impair et Σ petite. Considérons la suite d'espaces $V_k(\Sigma, p, \bar{k}c, \Lambda) \simeq \mathcal{H}_N$ où $k = D\bar{k}$ et $N = \Delta\bar{k}$ comme ci-dessus. Supposons de plus que si Σ est la sphère on a $\alpha \neq \delta$ ou $\beta \neq \gamma$. Alors pour toute courbe simple $\zeta \subset \Sigma$:*

- *il existe une suite de fonctions explicite f_{ζ}^k sur la sphère telle que $Z_k(\zeta) = T_{f_{\zeta}^k}^N$.*
- *les fonctions f_{ζ}^k sont lisses en dehors des pôles et leur régularité aux pôles croît linéairement avec k .*
- *La suite de fonctions f_{ζ}^k admet un développement asymptotique lisse en puissances de k dont le terme de premier ordre est la fonction trace f_{ζ} .*

En d'autres termes, les opérateurs $Z_k(\zeta)$ sont des opérateurs de Toeplitz sur la sphère de symbole principal la fonction trace f_{ζ} . On peut aussi déterminer le symbole sous-principal même si cela donne à des formules plus compliquées, voir Formule (26) dans [MP11].

4.4.3 Asymptotique des représentations du groupe de difféotopie

Soit $O = (\Sigma, p, c, \Lambda)$ un objet de Cob_k où Σ est une petite surface. Notons $G = \text{MCG}(\Sigma)$ le groupe de difféotopie qui fixe un voisinage des points marqués. Ce groupe

agit projectivement sur l'espace $V_k(O)$ et on s'intéresse dans cette partie au comportement asymptotique des éléments de matrice de cette représentation quand le niveau k tend vers l'infini.

La base canonique de $V_k(O)$ est définie à une phase près comme la base propre de l'opérateur courbe $Z_k(\gamma)$ où γ est la courbe découpant Σ en pantalons. Comme G agit transitivement sur de telles courbes, on constate que le problème que l'on s'est posé revient à évaluer un produit scalaire $|\langle \psi_0, \psi_1 \rangle|$ où pour $i = 0, 1$, on a

$$Z_k(\gamma_i)\psi_i = -2 \cos\left(\frac{\pi m_i}{k}\right)\psi_i.$$

Un théorème équivalent à la Proposition 15 permet de décrire asymptotiquement les vecteurs propres des opérateurs $Z_k(\gamma)$, qui sont des opérateurs de Toeplitz d'après le Théorème 11. Les résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 12. *Soit $O = (\Sigma, p, c, \Lambda)$ un objet de Cob_D avec Σ petite et \bar{k} un entier impair. Soit $N = \bar{k}\Delta$ la dimension des espaces $V_k(\Sigma, p, \bar{k}c, \Lambda) \simeq \mathcal{H}_N$ où $k = D\bar{k}$. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Sigma', G) \cap H^{-1}(\widehat{\Delta})$ l'espace des représentations associé, symplectomorphe à la sphère.*

Pour $i = 0, 1$, notons :

- γ_i une courbe simple de Σ ,
- $Z_k(\gamma_i)$ les opérateurs courbe associés,
- f_i les fonctions traces associées à γ_i sur \mathcal{M} ,
- m_i un entier naturel et $\Sigma_i = \{z \in \mathcal{M} | f_i(z) = -2 \cos(\frac{\pi m_i}{k})\}$,
- T_i la période du flot hamiltonien de la fonction f_i le long de Σ_i ,
- ψ_i un vecteur unitaire de \mathcal{H}_N tel que $Z_k(\gamma_i)\psi_i = -2 \cos(\frac{\pi m_i}{k})\psi_i$.

Supposons que Σ_0 et Σ_1 sont des courbes lisses de \mathcal{M} qui s'intersectent transversalement et choisissons z_0, z_1 un point sur chacune d'entre elles. Alors on a l'estimation suivante :

$$|\langle \psi_0, \psi_1 \rangle| = \frac{2}{\sqrt{NT_0T_1}} \left| \sum_{z \in \Sigma_0 \cap \Sigma_1} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} \text{Sign}(\{f_0, f_1\}(z))}}{\sqrt{|\{f_0, f_1\}(z)|}} e^{2iN\pi(\int_{C_0} \eta - \int_{C_1} \eta)} \right| + O(\hbar^{\frac{3}{2}})$$

où η est un potentiel symplectique associé à la forme symplectique sur \mathcal{M} et pour tout i , C_i désigne une courbe dans Σ_i reliant z_i à z .

Ce théorème généralise le calcul de l'asymptotique des 6j-symboles dû à [TW05] et permet de calculer par exemple l'asymptotique de la S -matrice épointée, cf [MP11].

4.4.4 Vers le cas général

A la fin de l'article [MP11], on étudie le cas où Σ est une surface de genre 2 sans point marqués. Il apparaît que l'espace $V_k(\Sigma)$ s'identifie à $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{L}^{k-2})$. Si une grande partie des techniques employées dans le cas des petites surfaces se transpose directement, on se heurte pourtant à plusieurs difficultés sur lesquelles je souhaite concentrer ma recherche future.

- La stratégie de preuve de la Conjecture 4 ne se généralise pas aux surfaces quelconques car la structure de l'algèbre de Kauffman est mal comprise dans le cas général.
- S'il n'y a pas de points marqués les fonctions traces sont singulières. On ne peut pas utiliser telles quelles les techniques associées aux opérateurs de Toeplitz.
- En genre quelconque, on ne connaît pas de modèle géométrique pour identifier les espaces vectoriels de la TQFT à la quantification géométrique d'une variété Kählerienne simple comme \mathbb{P}^1 ou \mathbb{P}^3 .

Chapitre 5

Trois autres articles

5.1 Asymptotique des invariants de type fini des orbites de champs de vecteurs

Un champ de vecteur dans une variété définit un flot dont les orbites peuvent être fermées ou non. Si la variété est un domaine compact G de \mathbb{R}^3 , on peut s'intéresser au comportement asymptotique des invariants de nœuds évalués sur les orbites non-périodiques. Un exemple classique est l'hélicité du champ de vecteur qui mesure l'enlacement asymptotique moyen de deux orbites disjointes (cf [AK98]). Supposons que le champ X est ergodique par rapport à une mesure qu'il préserve, que les singularités de X sont isolées et que la mesure ne charge pas les orbites périodiques du flot. Pour tout point $p \in G$ non périodique et tout temps $T > 0$, on définit $K(p, T) \subset \mathbb{R}^3$ comme la réunion de l'orbite de longueur T issue de p et le segment de droite qui joint ses deux extrémités.

On peut montrer que $K(p, T)$ est un nœud pour presque tout $p \in G$. Sous ces hypothèses, J-M. Gambaudo et E. Ghys montrent dans [GG01] qu'il existe une signature asymptotique qui est proportionnelle à l'hélicité à savoir : pour presque tout $p \in G$ la limite

$$\sigma(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \sigma(K(p, T))$$

existe et ne dépend pas de p . On montre dans [BM08] le résultat suivant :

Théorème 13. *Soit v un invariant de nœuds de de type fini de degré n . Il existe une constante $\alpha_v \in \mathbb{R}$ telle que pour presque tout $p \in G$ on a :*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{2n}} v(K(p, T)) = \alpha_v \sigma(X)^n$$

De plus il suffit de connaître la valeur de v sur les nœuds toriques pour déterminer α_v .

On en déduit des formules pour le polynôme d'Alexander, le polynôme de Jones et l'intégrale de Kontsevich asymptotique. La preuve est basée sur la technique développée dans [GG01] qui permet de comprendre la projection plane d'une longue orbite.

On représente alors tout invariant de type fini à l'aide d'un diagramme de Gauss et on étudie le nombre asymptotique d'occurrences d'un diagramme de Gauss dans la projection d'une orbite.

5.2 Configuration de drapeaux et groupes de surfaces en géométrie hyperbolique complexe

On étudie dans cet article l'espace $\mathcal{M}(\Sigma, G)$ où Σ est une surface marquée par des points p_1, \dots, p_n et $G = \text{PU}(2,1)$ est le groupe d'isométries holomorphes de l'espace hyperbolique complexe. Pour certains groupes comme $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ou $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, ces espaces sont très étudiés car ils contiennent certains ouverts correspondant à des structures géométriques sur les surfaces (hyperbolique et projective convexe respectivement). Pourtant, dans le cas de $\text{PU}(2,1)$, très peu de choses sont connues à part des résultats généraux de rigidité. Le but de cet article est de mettre en place un système de coordonnées analogue aux « shear coordinates » de Thurston, et plus généralement aux coordonnées de Fock et Goncharov sur les groupes réels déployés.

La technique utilisée dans cet article est l'utilisation systématique des drapeaux en géométrie hyperbolique complexe, c'est-à-dire un couple $F = (C, p)$ où C est une droite complexe de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ et p un point du bord de C . Partant d'une description de l'ensemble des triplets de drapeaux à isométrie près, on en déduit un système de coordonnées sur l'ensemble

$$\mathcal{M}'(\Sigma, G) = \left\{ (\rho, F) \left| \begin{array}{l} \rho : \pi_1(\Sigma') \rightarrow G \\ F = (F_1, \dots, F_n), \text{ drapeaux dans } \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ \rho(\gamma_i) \text{ préserve le drapeau } F_i \text{ pour } i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} / \sim$$

où on a noté $\Sigma' = \Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. L'application $\mathcal{M}'(\Sigma, G) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma', G)$ qui à (ρ, F) associe ρ est un revêtement ramifié sur un ouvert de $\mathcal{M}(\Sigma', G)$ qui contient la plupart des représentations fidèles et discrètes. On espère ainsi à l'aide de ce système de coordonnées caractériser certaines familles de représentations fidèles et discrètes.

5.3 Fonctions génératrices et asymptotique des réseaux de spin classiques

Les réseaux de spin sont des nombres rationnels que l'on associe à des graphes trivalents coloriés par des entiers. Certains cas particuliers ont été étudiés dans les années 1940-1950 par G. Racah et E. P. Wigner pour résoudre des problèmes de spectroscopie atomique. Les physiciens G. Ponzano et T. Regge se sont intéressés à la limite semi-classique de ces coefficients à la fin des années 1960. C'est à Penrose qu'on doit en 1971 la généralisation aux graphes quelconques ainsi que la popularisation des questions d'asymptotique.

Pour expliquer rapidement les résultats obtenus dans [CM11c], on propose une définition des réseaux de spin qui passe par les invariants quantiques. Soit Γ un graphe

trivalent plongé dans S^3 et c un coloriage de ses arêtes. On définit un invariant $\langle \Gamma, c \rangle \in K(S^3, \zeta_\infty) = \mathbb{C}$ obtenu en cablant chaque arête coloriée par n par l'idempotent $f_n \in \mathcal{T}_n$. On remarque que pour le choix de la racine $\zeta_\infty = -1$, les idempotents f_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout angle α de Γ (paire de demi-arêtes incidentes) et tout coloriage c des arêtes, on pose $c_\alpha = \frac{c_i + c_j - c_k}{2}$ où i, j sont les deux arêtes formant α et k est la troisième arête incidente. On modifie le réseau de spin en posant $\langle \langle \Gamma, c \rangle \rangle = \langle \Gamma, c \rangle \frac{\prod_{e \in E} c_e!}{\prod_{\alpha \in A} c_\alpha!}$ où E désigne l'ensemble des arêtes et A l'ensemble des angles de Γ .

Notons $R = \mathbb{C}[X_\alpha, \alpha \in A]$ et définissons la série $Z(\Gamma) = \sum_c \langle \langle \Gamma, c \rangle \rangle \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^{c_\alpha}$. B. Westbury démontre dans [W98] la formule

$$Z(\Gamma) = \left(\sum_{\delta \subset \Gamma} \prod_{\alpha \in \delta} X_\alpha \right)^{-2}$$

où δ désigne une réunion de cycles (éventuellement vide) contenue dans Γ . Soit ψ une application des arêtes orientées de Γ dans $SL_2(\mathbb{C})$ dite application d'holonomie. On peut généraliser les constructions précédentes et définir $\langle \Gamma, c, \psi \rangle, \langle \langle \Gamma, c, \psi \rangle \rangle$ et $Z(\Gamma, \psi)$: ces quantités s'interprètent naturellement comme des observable en théorie de jauge. Dans la première partie de [CM11c], on généralise la formule de B. Westbury avec une preuve très différente de la sienne, basée sur les intégrales gaussiennes. On obtient une formule du type :

$$Z(\Gamma, \psi) = \det(Q_\psi)^{-1/2}$$

où Q_ψ est une forme quadratique explicite à coefficients dans R sur un espace vectoriel de dimension $-6\chi(\Gamma)$. Dans une deuxième partie on propose une formule asymptotique pour la quantité $|\langle \Gamma, kc \rangle|$ quand k tend vers l'infini. La formule fait aussi intervenir des déterminants de formes quadratiques sur des espaces associés à Γ . Ces formes quadratiques sont reliées à la géométrie de configurations de points dans \mathbb{R}^3 où certaines distances sont fixées par les longueurs c . On généralise ainsi la formule connue pour les 6j-symboles classiques ainsi que de nombreuses autres formules connues (9j, 15j symboles).

Liste des travaux présentés

- [BM08] S. Baader et J. Marché. Asymptotic vassiliev invariants for vector fields. à paraître au Bulletin de la SMF, 2008.
- [CM09] L. Charles et J. Marché. Multicurves and regular functions on the representation variety of a surface in SU_2 . à paraître à Commentarii Math. Helv., 2009.
- [CM11a] L. Charles et J. Marché. Knot state asymptotics I. Abelian representations and the A-J conjecture.
- [CM11b] L. Charles et J. Marché. Knot state asymptotics II. Irreducible representations and the Witten conjecture.
- [CM11c] F. Constantino et J. Marché. Generating functions and asymptotics of classical spin-networks.
- [M08] J. Marché. The Kauffman Bracket at $\sqrt{-1}$. à paraître à Math. Annalen.
- [M09] J. Marché. Geometry of representation spaces. à paraître au Handbook of Teichmüller theory, Publications de l'IRMA.
- [M10a] J. Marché. The skein module of torus knot complements *Quantum topology* **1** no. 4, 413-421, 2010.
- [M10b] J. Marché. Geometric interpretation of simplicial formulas for the Chern-Simons invariant.
- [MN08] J. Marché et M. Narimannejad. Some Asymptotics of TQFT via skein theory. *Duke Math. Journal* **141** no. 3, 573-587, 2008.
- [MP11] J. Marché et T. Paul. Toeplitz operators in TQFT via skein theory.
- [MW10] J. Marché et P. Will. Configuration of flags and representations of surface groups in complex hyperbolic geometry. à paraître à Geom. Dedicata, 2010.

Bibliographie

- [A95] J. E. Andersen. The Witten invariant of finite order mapping tori I. Arxiv :1104.5576, (1995).
- [A05] J.E. Andersen. Deformation quantization and geometric quantization of abelian moduli spaces. *Comm. of Math. Phys.*, **255**, (2005), 727-745.
- [A06] J. E. Andersen. Asymptotic faithfulness of the quantum $SU(n)$ representations of the mapping class groups. *Ann. of Math.*, **163**, vol.1, (2006), 347-368.
- [A10] J. E. Andersen. Toeplitz operators and Hitchin's projectively flat connection. *The many facets of geometry*, 177-209, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.
- [A09] J.E. Andersen. Asymptotics of the Hilbert-Smith norm of curve operators in TQFT *Letters of Mathematical Physics* **91** 3 (2010) 205-214.
- [A11] J.E. Andersen. Hitchin's connection, Toeplitz operators and symmetry invariant deformation quantization. arXiv : math.DG/0611126. pp. 35. To appear in *Quantum Topology*.
- [AH06] J. E. Andersen et S. K. Hansen. Asymptotics of the quantum invariants for surgeries on the figure 8 knot. *J. Knot Theory Ramifications*, **15**, no. 4, (2006), 479-548.
- [AM99] J. E. Andersen et G. Masbaum. Involutions on Moduli Spaces and Refinements of the Verlinde Formula. *Math. Annalen*, **314**, (1999), 291-326.
- [AU07] J. E. Andersen and K. Ueno. Abelian Conformal Field theories and Determinant Bundles. *International Journal of Mathematics*, **18**, (2007), 919-993
- [AU08] J. E. Andersen and K. Ueno. Geometric Construction of Modular Functors from Conformal Field Theory. *Journal of Knot theory and its Ramifications*, **16**, (2007), 127-202.
- [AU10] J.E. Andersen and K. Ueno. Modular functors are determined by their genus zero data arXiv :math.QA/0611087, pp. 28. To appear in *Journal of Quantum Topology*.
- [AU11] J. E. Andersen and K. Ueno. Construction of the Reshetikhin-Turaev TQFT from conformal field theory arXiv : 1110.5027
- [AK98] V. I. Arnol'd et B. A. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [A90] M. Atiyah. *The geometry and physics of knots*. Cambridge University Press, 1990.

- [AB83] Michael F. Atiyah et Raoul Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **308** (1505), (1983), 523-615.
- [BGPU] A. Bloch, F. Golse, T. Paul et A. Uribe, Dispersionless Toda and Toeplitz operators, *Duke Math. Journal*, **117**, (2003), 157-196.
- [BHMV] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, et P. Vogel. Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket. *Topology*, **34**, vol.4, (1995), 883-927.
- [Bul97] Doug Bullock. Rings of $SL_2(\mathbf{C})$ -characters and the Kauffman bracket skein module. *Comment. Math. Helv.*, **72**, no.4, (1997), 521-542.
- [BP00] D. Bullock and J. H. Przytycki Multiplicative structure of Kauffman bracket skein module quantizations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128**, no.3, (2000), 923-931.
- [C03] L. Charles. Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators, *Comm. Partial Differential Equations*, **28**, Vol. 9-10, (2003), 1527-1566.
- [C06] L. Charles. Symbolic calculus for Toeplitz operators with half-forms. *Journal of Symplectic Geometry*, **4**, Vol 2, (2006), 171-198.
- [C10b] L. Charles. Asymptotic properties of the quantum representations of the mapping class group. Arxiv :1005.3452, (2010).
- [CS83] M. Culler et P. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Annals of Math.*, **117**, (1983), 109-146.
- [D87] J. L. Dupont. The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles. *J. of Pure and Appl. Alg.*, **44**, (1987), 137-164.
- [FM] B. Farb and D. Margalit A Primer on Mapping Class Groups Princeton University Press, 2011.
- [Fre95] D. S. Freed. Classical Chern-Simons Theory. *Advances in Mathematics*, **113**, (1995), 237-303.
- [FWW] M. H. Freedman, K. Walker et Z. Wang. Quantum $SU(2)$ faithfully detects mapping class groups modulo center. *Geom. Topol.*, **6**, (2002), 523-539.
- [GG01] J.M. Gambaudo et E. Ghys, Signature asymptotique d'un champ de vecteurs en dimension 3 *Duke Math. J.* **106**, no. 1 (2001), 41-79.
- [GL05] S. Garoufalidis et T. T. Q. Le. The colored Jones function is q-holonomic. *Geom. Topol.*, **9**, (2005), 1253-1293.
- [GS10] S. Garoufalidis et X. Sun. The non-commutative A-polynomial of twist knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **19**, (2010), 1571-1595.
- [GM10] P. Gilmer et G. Masbaum. Maslov index, Lagrangians, Mapping Class Groups and TQFT. to appear in *Forum Mathematicum*, arXiv :0912.4706, 2010.
- [G84] W. M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, **54**, (1984), 200-225.
- [G86] W. M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, **85**, (1986), 263-302.

- [G88] W. M. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.* **93**, (1988), 557-607.
- [GS90] V. Guillemin et S. Sternberg. Geometric Asymptotics Mathematical surveys and monographs, no. 14, AMS.
- [HT01] S. K. Hansen et T. Takata. Quantum invariants of Seifert 3-manifolds and their asymptotic expansions. Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 69-87 (electronic), *Geom. Topol. Monogr.*, **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [Hi04] K. Hikami. Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot. *Internat. J. Math.*, **15**, no.9, (2004), 959-965.
- [H05] H. Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, **16**, no. 6, (2005), 661-685.
- [H90] N. J. Hitchin, Flat connections and geometric quantization. *Comm. Math. Phys.*, **131**, no. 2, (1990), 347-380.
- [HP92] Hoste J. and Przytycki J. H. A survey of skein module of 3-manifolds *Knots 90* De Gruyter- Berlin (1992), 363-379.
- [J92] L. C. Jeffrey. Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation. *Comm. Math. Phys.*, **147**, no.3, (1992), 563-604.
- [JW92] Lisa C. Jeffrey et Jonathan Weitsman. Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula. *Comm. Math. Physics*, **150**, no.3, (1992), 593-630.
- [JW93] L. C. Jeffrey et J. Weitsman. Half density quantization of the moduli space of flat connections and Witten's semiclassical manifold invariants. *Topology*, **32**, vol. 3, (1993), 509-529.
- [JW94] Lisa C. Jeffrey et Jonathan Weitsman. Toric structures on the moduli space of flat connections on a Riemann surface : volumes and the moment map. *Adv. Math.*, **106** no.2, (1994), 151-168.
- [Kl91] E. P. Klassen. Representations of knot groups in $SU(2)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **326**, no.2, (1991), 795-828.
- [KM91] R. Kirby et P. Melvin. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $SL_2(\mathbb{C})$. *Invent. Math.* **105**, no. 3, (1991), 473-545.
- [KK93] P. Kirk et E. Klassen. Chern-Simons invariants of 3-manifolds decomposed along tori and the circle bundle over the representation space of T^2 . *Comm. Math. Phys.*, **153**, vol. 3, (1993), 521-557.
- [LZ99] R. Lawrence et D. Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. *Asian J. Math.*, **3**, no.1, (1999), 93-107.
- [Le06] T. Q. T. Le. The Colored Jones Polynomial and the A-Polynomial of Knots. *Adv. in Math.*, **207**, (2006), 782-804.
- [Li] W. B. R. Lickorish. An introduction to knot theory. Graduate Texts in Mathematics, **175**, Springer.
- [MV94] G. Masbaum et P. Vogel. 3-valent graphs and the Kauffman bracket *Pacific Journal of Mathematics*, **164**, no.2, (1994), 361-381.

- [Ne92] W. Neumann. Combinatorics of triangulations and the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds. from *Topology '90, Proceedings of the Research semester in Low Dimensional Topology at Ohio State*, Walter de Gruyter Verlag, Berlin-New York (1992), 243-272.
- [Ne98] W. Neumann. Hilbert's 3rd Problem and Invariants of 3-manifolds. In the Epstein Birthday Schrift, GTM vol. 1, (1998), 383-411.
- [Ne04] W. Neumann. Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class *Geom. Topol.*, **8**, (2004), 413-474.
- [PS00] Józef H. Przytycki et Adam S. Sikora. On skein algebras and $Sl_2(\mathbf{C})$ -character varieties. *Topology*, **39** no.1, (2000), 115-148.
- [RSW89] T. R. Ramadas, I. M. Singer et J. Weitsman. Some comments on Chern-Simons Gauge Theory *Commun. Math. Phys.*, **126**, (1989), 409-420.
- [R96] L. Rozansky. Residue formulas for the large k asymptotics of Witten's invariants of Seifert manifolds. The case of $SU(2)$. *Comm. Math. Phys.*, **178**, (1996), 27-60.
- [RT91] N.Y. Reshetikhin et V.G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, **92**, (1991), 547-597.
- [Si09] Adam Sikora. Character varieties. To appear in *Trans. Amer. Soc.*, ArXiv :0902.2589, 2009.
- [TW05] Y. U. Taylor and C. T. Woodward. $6j$ symbols for $U_q(sl_2)$ and non-Euclidean tetrahedra. *Selecta Math.* **11**, no. 3-4, (2005), 539-571.
- [TU88] Turaev V. G. The Conway and Kauffman modules of a solid torus. (translation) *J. Soviet Math.* **52**, no.1, (1990), 2799-2805.
- [TU91] Turaev V. G. Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **24**, no.4, (1991), 635-704.
- [W98] B. Westbury. A generating function for spin network evaluations. *Knot Theory (Warsaw, 1995)*, 447-456, Banach Center Publications, 42, Polish Acad. Sci, Warsaw, 1998.
- [W71] E. P. Wigner. *Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra* New-York, Academic Press, 1971.
- [W89] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, **121**, vol.3, (1989), 351-399.
- [Y85] T. Yoshida, The eta-invariant of hyperbolic 3-manifolds, *Inv. Math.*, **81**, (1985), 473-514.