

Quantification des variétés kähleriennes, limite
semi-classique et théorie quantique des champs
topologique

Laurent Charles

11 septembre 2013

Introduction

Le problème est de comprendre les relations entre mécanique quantique et classique. D'une part, nous avons des espaces de Hilbert, des opérateurs auto-adjoints, des spectres, l'équation de Schrödinger, des représentations de groupe, et d'autre part, des variétés symplectiques, des algèbres de Poissons, des flots hamiltoniens, des actions hamiltoniennes de groupe. On souhaite établir un dictionnaire entre ces deux mondes dont le mode d'emploi serait le suivant : partant d'un système quantique dépendant d'un paramètre, lorsque ce paramètre tend vers une certaine limite dite semi-classique, on montre qu'une propriété ou un phénomène quantique est contrôlé au premier ordre par un système classique sous-jacent. L'exemple le plus connu est celui de l'opérateur de Laplace-Beltrami d'une variété riemannienne, dont le comportement asymptotique des grandes valeurs propres est relié aux propriétés du flot géodésique. Bien souvent, on procède dans l'autre sens, c'est à dire que l'on quantifie, en ce sens que l'on introduit un système quantique dont la limite semi-classique est un système classique donné.¹

L'essentiel de la littérature en analyse semi-classique est consacrée aux problèmes d'analyse et non de géométrie. Typiquement, on considère des opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre sur un ouvert de \mathbb{R}^n ou sur une variété. L'espace de phase sous-jacent est alors un espace cotangent. Mes travaux se situent dans un contexte plus géométrique, où les espaces de phases sont des variétés kählerienne compactes, et les espaces quantiques sont des espaces de sections holomorphes d'un fibré en droite positif sur l'espace de phase. La limite semi-classique consiste à remplacer le fibré par sa puissance k -ième et faire tendre k vers l'infini. Cette quantification, dite quantification kählerienne, a été introduite indépendamment par B. Kostant

1. Mais la mécanique quantique n'étant pas déterminée par la mécanique classique, il ne faut pas s'étonner si cette procédure n'est pas unique. Typiquement, à chaque fonction polynomiale de \mathbb{R}^{2n} , on associe un opérateur différentiel à petit paramètre par quantification Weyl. Mais on peut aussi choisir un autre procédé, par exemple pour tout α et β on associe au monôme $x^\alpha \xi^\beta$ l'opérateur $x^\alpha (\frac{\hbar}{i} \partial_x)^\beta$.

[Kod53] et J.M. Souriau [Sou70]. Les opérateurs qui dans ce contexte jouent le rôle des opérateurs pseudo-différentiels sont les opérateurs de Toeplitz, introduits par Berezin [Ber75]. Les techniques d'analyse microlocale particulières à cette géométrie ont été développées par L. Boutet de Monvel seul [BdM79] [BdM95] [BdM02], et en collaboration avec J. Sjöstrand [BdMS76] ou V. Guillemin [BdMG81]. Ont suivis de nombreux développements par différentes personnes (la liste qui suit n'a pas la prétention d'être exhaustive) : V. Guillemin [Gui93], [Gui84], A. Uribe accompagné de D. Borthwick, T. Paul [BPU95], [BPU98], [BU03], S. Zelditch [Zel97] [Zel98], M. Schlichenmaier [Sch10], X. Ma et G. Marinescu [MM07] et ... moi-même !

Après un premier chapitre où je décris ce cadre géométrique, j'aborderai dans le chapitre 2 mes contributions sur les points suivants.

1. Opérateurs de Toeplitz : je donne le comportement asymptotique du noyau au sens de Schwartz d'un opérateur de Toeplitz. J'en déduis les règles de calcul des symboles covariants, contravariants, ainsi que le développement asymptotique du projecteur de Szegö [Cha03a].
2. États lagrangiens : il s'agit de construire des états quantiques se concentrant sur des sous-variétés lagrangiennes de l'espace de phase. On obtient de la sorte les états propres des opérateurs de Toeplitz sur une surface et on en déduit les conditions de Bohr-Sommerfeld [Cha03b], [Cha06a]. C'est l'analogue des états propres WKB de l'opérateur de Schrödinger.
3. Opérateurs intégraux de Fourier : comme l'avait fait Hörmander [Hör71] pour les espaces cotangents, on quantifie les symplectomorphismes de l'espace des phases. Comme application, on décrit les propagateurs quantiques des opérateurs de Toeplitz. Aussi on explique en quel sens la quantification est indépendante du choix de la structure complexe [Cha03b], [Cha07], [Cha10b].
4. Correction métaplectique : les règles de calcul des symboles des états lagrangiens et des opérateurs intégraux de Fourier s'interprètent de manière élégante et transparente avec les fibrés de demi-formes. Il m'a fallu du temps pour comprendre qu'il s'agissait du bon point de vue [Cha06a], [Cha07]. Cette correction métaplectique apparaît crucialement dans tous les phénomènes de transport.
5. Réduction symplectique : V. Guillemin et S. Sternberg ont montré l'importance de la réduction symplectique dans le cadre de la quantification kählerienne. J'ai étudié la limite semi-classique de ces réduction [Cha06b], [Cha10d].

6. Un très bel exemple de tout ce qui précède est fourni par les espace de polygones et leur quantification, qui consiste en les sous-espaces invariants des produits tensoriels de représentations irréductibles de $SU(2)$. On y trouve des systèmes naturels de coordonnées action-angles correspondants à des bases canoniques des espaces quantiques. Les vecteurs de ces bases sont des états lagrangiens supportés par les tores d’actions constantes [Cha10d].

Une application remarquable de l’analyse semi-classique sur les variétés de Kähler est la théorie quantique des champs topologiques (tqft en abrégé) en dimension $2+1$. Les variétés kähleriennes que l’on quantifie sont ici les espaces de modules de fibrés plats sur les surfaces orientables compactes. E. Witten [Wit89] a interprété dans ce cadre le polynôme de Jones des noeuds. Ce travail fondateur a donné lieu à des développements dans des domaines aussi variés que la topologie de dimension 3 (invariants quantiques), la théorie des représentations (les algèbres de Kac-Moody), la géométrie algébrique (fonction thetas non-abéliennes)...

On peut aussi aborder cette théorie d’un point de vue semi-classique, le dictionnaire semi-classique met alors en correspondance des invariants relativement éloignés des variétés de dimension 3. La conjecture la plus importante dans ce domaine est due à E. Witten. Elle prédit que l’invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev (WRT) d’une variété de dimension 3 fermée admet dans la limite $k \rightarrow \infty$ un développement asymptotique dont les termes dominants s’expriment en fonction des invariants de Chern-Simons et de la torsion de Reidemeister. Cette conjecture a été vérifiée pour de nombreuses variétés de Seifert [Jef92], [Roz96b], [LZ99], [HT02], [Hik04], [Han05], [And11]. Or comme l’ont montré les travaux de B. Thurston, les variétés tridimensionnelles les plus répandues sont en fait les variétés hyperboliques.

Pour une large part, mes travaux dans ce domaine ont consisté justement à montrer cette conjecture pour des variétés hyperboliques. Pour ce faire, j’ai appliqué les techniques d’analyse microlocales que j’avais développées précédemment pour les opérateurs de Toeplitz. Au contraire, la vérification de la conjecture de Witten pour les variétés de Seifert dans les articles cités ci-dessus était basée sur des méthodes relativement élémentaires, les invariants WRT de ces variétés étant beaucoup plus simple à calculer. Il faut noter que précédemment, J. Andersen avait déjà appliqué avec succès les opérateurs de Toeplitz aux théories quantiques des champs topologiques pour montrer le théorème de fidélité asymptotique [And06].

Après un chapitre consacré aux différentes versions des tqft en dimension $2+1$, je présente dans le dernier chapitre de ce mémoire mes propres travaux.

7. La tqft associe à toute surface Σ et groupe de Lie compact simple et simplement connexe G une famille de représentation projective du mapping class group indicée par le niveau k . J'ai vérifié que ces représentations quantiques étaient données dans la limite $k \rightarrow \infty$ par des opérateurs Fourier intégraux, dans plusieurs cas : lorsque Σ est de genre 1 et G quelconque [Cha12], lorsque Σ est de genre ≥ 2 , $G = SU(n)$ et les représentations sont définies par la connexion de Hitchin [Cha10a].
8. Des résultats précédents, j'ai déduit la conjecture de Witten pour les tores d'applications de difféomorphismes [Cha10a], lorsque l'invariant de WRT est défini par la connexion de Hitchin. Cela inclut les tores d'applications des pseudo-Anosov pour peu qu'une hypothèse de rigidité infinitésimale soit vérifiée, hypothèse naturelle dans l'énoncé de la conjecture de Witten.
9. En collaboration avec Julien Marché, j'ai établi la conjecture de Witten pour une famille infinie de variétés hyperboliques, obtenues par chirurgie sur le noeud de huit. Pour la preuve, nous avons montré que les états du noeud de huit sont des états lagrangiens supportés par la variété des caractères du complémentaire du noeud, cela en interprétant des relations aux q-différences vérifiées par les polynômes de Jones du noeud de huit comme des opérateurs de Toeplitz [CM11a], [CM11b].
10. Dans les articles [CM11a], [CM11b], nous avons conjecturé que l'état de tout noeud est lagrangien et supporté par la variété des caractères de son complémentaire. Ceci peut être considéré comme une généralisation de la conjecture de Witten aux complémentaires de noeud. Hormis les aspects semi-classiques, ce type de résultat est intéressant, car il explique comment les polynômes de Jones colorés d'un noeud encodent la variété des caractères du complémentaire, sa torsion et ses invariants de Chern-Simons. De plus, la conjecture AJ s'interprète naturellement dans ce contexte ainsi que le théorème de Melvin-Morton-Rozansky. Enfin sur la base de cette conjecture, on s'attend à ce que la torsion de Reidemeister vérifie une équation de transport, un fait nouveau à notre connaissance.
11. Dans [Cha11], j'ai montré que les états des noeuds toriques vérifient la conjecture de Witten généralisée, telle qu'elle est énoncée dans mes travaux avec Julien Marché. La preuve n'utilise aucun des outils de l'analyse microlocale, ce qui n'a rien d'étonnant, car ces noeuds relèvent plus de la géométrie de Seifert que de la géométrie hyperbolique.

Enfin, bien que je ne l'aborderai pas dans ce mémoire, je tiens à mentionner mon travail avec San Vu Ngoc.

9. Le spectre semi-excité de certains opérateurs de Schrödinger en fond de puits présente une structure en bande, chacune de ces bandes correspond au spectre d'un opérateur de Toeplitz sur un espace projectif tordu. Pour établir cela, nous avons fait une réduction symplectique sur une forme de Birkhoff quantique [CVN08].

Chapitre 1

Quantification des variétés kähleriennes

Pour définir des espaces quantiques correspondants à une variété symplectique (M, ω) , nous allons introduire trois structures supplémentaires qui sont les fibrés préquantifiants, les structures complexes et les fibrés de demi-formes. L'espace quantique sera alors défini comme un espace de sections holomorphes sur M . Cette procédure générale pour quantifier a été introduite initialement par B. Kostant [Kos70] et J.M. Souriau [Sou70]. Appliquée aux orbites coadjointes d'un groupe de Lie compact, elle donne les représentations irréductibles du groupe, voir le chapitre 1.4. La représentation métaplectique sur les espaces de fonctions theta est un cas particulier de cette construction, cf. chapitre 1.5.

1.1 Fibrés préquantifiants

Un *fibré préquantifiant* de (M, ω) est un fibré en droite complexe L de base M muni d'une métrique hermitienne et d'une connexion ∇ compatible avec la métrique et de courbure $\frac{1}{i}\omega$. Si $t \in C^\infty(U, L)$ est une section locale de L normée, alors $\nabla t = \frac{1}{i}\alpha \otimes t$ avec α une forme réelle de différentielle ω .

M admet un fibré préquantifiant si et seulement si la classe de cohomologie de $\omega/2\pi$ appartient à l'image de l'application naturelle $H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})$. Lorsque M est compacte (ou plus généralement lorsque son premier groupe de cohomologie est de type fini), cette condition équivaut au fait que les périodes de ω soient des multiples entiers de 2π . Supposons que ce soit le cas, alors l'ensemble des fibrés préquantifiants à isomorphisme près, est un espace principal homogène pour le groupe $H^1(M, U(1))$. En effet, un

fibré préquantifiant de (M, ω) est unique à produit tensoriel près par un fibré en droites hermitien plat. Et le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés hermitiens plats de rang 1 est $H^1(M, U(1))$.

Étant donné un fibré préquantifiant, on considérera ses puissances tensorielles $L^{\otimes k}$, la limite semi-classique correspondant à la limite où k tend vers l'infini. On interprétera k comme l'inverse de la constante de Planck.

Action et caractères différentiels

On peut se demander en quelle mesure il est naturel d'équiper une variété symplectique d'un fibré préquantifiant pour la quantifier, et pourquoi l'on définit ainsi la limite semi-classique. Une réponse est que préquantifier revient à définir l'action des cycles de degré 1 de M . Pour comprendre cela, rappelons que dans le cas d'un fibré cotangent T^*Q , l'action d'un cycle $\gamma \in Z_1(T^*Q)$ est l'intégrale $\int_{\gamma} \alpha$, avec $\alpha = \sum p^i dq^i$ la 1-forme de Liouville de Q .

Cette définition ne s'étend pas naturellement à une variété symplectique compacte (M, ω) , car la classe de cohomologie de ω étant non nulle, ω n'admet pas de primitive. On se contente en fait de définir l'action modulo 2π . Précisément, considérons les caractères différentiels de M de différentielle ω , c'est à dire les morphismes de groupe χ de $Z_1(M)$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que pour toute chaîne $D \in C_2(M)$,

$$\chi(\partial D) = \int_D \omega.$$

Étant donné un fibré préquantifiant L , l'holonomie dans L des 1-cycles de M définit un tel caractère. L'application qui envoie un fibré préquantifiant sur son holonomie met en bijection les classes d'isomorphismes de fibrés préquantifiants de (M, ω) avec les caractères de M de différentielle ω , [CS85].

Donc en ce sens, préquantifier équivaut à définir l'action des cycles de M modulo $2\pi\mathbb{Z}$ et remplacer le fibré par sa puissance k -ième revient à multiplier l'action par k . C'est bien ce que l'on souhaite car en mécanique quantique, l'action apparaît toujours multipliée par l'inverse de la constante de Planck et seule sa classe modulo 2π importe.¹

Groupes d'automorphismes

Les automorphismes d'un fibré préquantifiant L sont les automorphismes de fibrés hermitiens préservant la connexion ∇ . Un tel automorphisme relève

1. Typiquement, les propagateurs de Feynman sont donnés par des intégrales sur des espaces de chemins de $\exp(iA(\gamma)/\hbar)$ où A est l'action.

un symplectomorphisme de M et est déterminé par ce symplectomorphisme à une phase localement constante près. On obtient ainsi une suite exacte de groupe

$$0 \rightarrow U(1)^{\pi_0(M)} \rightarrow \text{Aut}^0(L, \nabla) \rightarrow \text{Symp}^0(M, \omega) \xrightarrow{F} \text{Mor}^0(H_1(M), U(1))$$

où $\text{Aut}^0(L, \nabla)$ est le groupe des automorphismes de (L, ∇) isotopes à l'identité, et $\text{Symp}^0(M, \omega)$ le groupe des symplectomorphismes isotopes à l'identité. De plus F est le morphisme de flux qui envoie un symplectomorphisme φ sur le morphisme

$$[\gamma] \rightarrow \text{hol}(\varphi \circ \gamma) \text{hol}(\gamma)^{-1},$$

où $\text{hol}(\gamma)$ désigne l'holonomie du lacet γ dans L . Si M est compacte, F est surjective. Le noyau du morphisme de flux est le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens, groupe qui joue un rôle central en topologie symplectique. Il apparaît donc ici comme la composante connexe de l'identité du groupe des symplectomorphismes se relevant au fibré préquantifiant.

L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'un fibré préquantifiant L est naturellement isomorphe à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ muni du crochet de Poisson. La représentation infinitésimale ρ de cette algèbre dans les endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(M, L)$ est donnée par la formule de Kostant-Souriau

$$\rho(f) = -\nabla_{X_f} + if, \quad (1.1)$$

où X_f est le champ de vecteur hamiltonien de f , c'est à dire $\omega(X_f, \cdot) = df$. En particulier, si un groupe de Lie G agit sur L par automorphismes de fibrés préquantifiants, alors l'action de G sur M admet un moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ déterminé par la condition

$$\mathcal{L}_\xi f = (\nabla_{\xi_M} - i\mu^\xi)f, \quad \xi \in \mathfrak{g}, f \in \mathcal{C}^\infty(M, L), \quad (1.2)$$

où $\mathcal{L}_\xi f(x)$ est la dérivée en $t = 0$ de $e^{-t\xi} f(e^{t\xi} \cdot x)$. Ici on note ξ_M le champ de vecteur de M correspondant à l'action infinitésimale de ξ .

1.2 Structures complexes

Considérons une variété M munie d'une structure complexe j et d'une structure symplectique ω . On supposera j et ω compatibles, c'est à dire que en chaque point de M , j agit comme un symplectomorphisme de l'espace tangent, et de plus $\omega(X, jX) > 0$ pour tout vecteur tangent X non nul. On supposera de plus j intégrable, autrement dit (M, ω, j) est une variété kählérienne.

Supposons M également équipée d'un fibré préquantifiant L . Alors la courbure $\frac{1}{i}\omega$ étant de type $(1, 1)$, L admet une unique structure holomorphe compatible avec la connexion. Si s est une section locale holomorphe ne s'annulant pas, alors $\nabla s = \frac{1}{i}\beta \otimes s$ avec β de type $(1, 0)$. Pour tout entier k , l'on définit l'espace quantique \mathcal{H}_k comme l'espace des sections holomorphes de L^k ,

$$\mathcal{H}_k = H^0(M, \mathcal{O}(L^k)). \quad (1.3)$$

Supposons de plus M compacte, alors \mathcal{H}_k est de dimension finie et possède un produit scalaire naturel défini comme l'intégrale du produit scalaire ponctuel des sections de L contre la mesure de Liouville $\mu_M = \omega^n/n!$.

D'après le théorème d'annulation de Kodaira [Kod53], \mathcal{H}_k est réduit à (0) si k est strictement négatif. En combinant le théorème d'annulation de Kodaira et le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch [Hir66], on a que pour k suffisamment grand, la dimension de \mathcal{H}_k est donnée par

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_k &= \int_M \left[\exp(k\omega/2\pi) \text{ Todd}(M) \right]_{2n} \\ &= \left(\frac{k}{2\pi} \right)^n \text{Vol}(M, \omega) + \mathcal{O}(k^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où n est la dimension complexe de M . Ici le volume de (M, ω) s'obtient en intégrant la mesure de Liouville. C'est un premier résultat semi-classique que nous venons d'énoncer, à savoir que la dimension de l'espace quantique est donnée au premier ordre par le volume de l'espace des phases classiques. Il faut rapprocher ce résultat de la loi de Weyl, selon laquelle pour l'opérateur de Schrödinger $\hbar^2\Delta + V$ sur \mathbb{R}^n , la somme de la dimension des espaces propres de valeurs propres plus petites que λ , est dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ donnée par $(2\pi\hbar)^{-n} \text{Vol}(\{|\xi|^2 + V(x) \leq \lambda\}) + o(\hbar^{-n})$.

Les hypothèses que nous avons faites pour quantifier sont assez restrictives. D'après le théorème de plongement de Kodaira, pour une variété complexe compacte M , l'existence d'une forme $\frac{1}{2\pi}[\omega] \in H^{1,1}(M)$ réelle, positive et entière, équivaut à ce que M soit une sous-variété complexe projective. Notons aussi qu'au lieu de partir d'une variété symplectique munie d'un fibré préquantifiant et d'une structure complexe, on aurait pu de manière équivalente considérer une variété complexe M et un fibré en droite holomorphe hermitien L , dont la connexion de Chern a une courbure positive. Mais cela reviendrait à mettre au premier plan la structure complexe alors qu'elle joue ici un rôle auxiliaire. En effet, le groupe d'automorphismes de M qui nous intéresse n'est pas le groupe des automorphismes de la structure complexe,

mais le groupe des symplectomorphismes, plus précisément le sous-groupe des symplectomorphismes se relevant au fibré préquantifiant.

Évidemment, il se pose immédiatement le problème que l'action d'un automorphisme de fibrés préquantifiants sur les sections de L ne préserve pas en général le caractère holomorphe. De même, au niveau infinitésimal, les opérateurs de Kostant-Souriau, définis en (1.1), ne préservent pas \mathcal{H}_k . Pour remédier à cela, on souhaite identifier de manière cohérente les espaces quantiques correspondants à différentes structures complexes, et en déduire une représentation de $\text{Aut}(L, \nabla)$, la représentation correspondante des algèbres de Lie fournirait une quantification des observables. Formalisons cela. Notons $\mathcal{H}(j)$ l'espace des sections holomorphes de L pour la structure complexe j . On aimerait construire une famille d'opérateurs unitaires $U_{j_1, j_2} : \mathcal{H}(j_1) \rightarrow \mathcal{H}(j_2)$ qui soient compatibles entre eux en ce sens que

$$U_{j_2, j_3} \circ U_{j_1, j_2} = U_{j_1, j_3} \quad (1.5)$$

pour toutes structures complexes j_1, j_2, j_3 , et compatibles avec l'action du groupe des automorphismes du fibré préquantifiant, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(j_1) & \xrightarrow{U_{j_1, j_2}} & \mathcal{H}(j_2) \\ \downarrow (\varphi_L)_* & & \downarrow (\varphi_L)_* \\ \mathcal{H}(\varphi(j_1)) & \xrightarrow{U_{\varphi(j_1), \varphi(j_2)}} & \mathcal{H}(\varphi(j_2)) \end{array} \quad (1.6)$$

commute pour tout automorphisme φ_L de L et structures complexes j_1, j_2 . Étant donné une telle famille, on en déduit pour tout j une représentation de $\text{Aut}(L)$ dans $\mathcal{H}(j)$ donnée par $U_{\varphi(j), j} \circ (\varphi_L)_* : \mathcal{H}(j) \rightarrow \mathcal{H}(j)$. En dérivant on obtient une représentation de l'algèbre de Poisson de M dans $\mathcal{H}(j)$.

Comme il a été établi par V. Ginzburg et R. Montgomery dans [GM00], une telle construction est impossible pour une classe très large de variétés. Cependant il existe une famille (U_{j_1, j_2}) qui vérifie une version asymptotique des propriétés (1.5) et (1.6), que j'ai introduite dans [Cha07], cf. chapitre 2.4. Pour obtenir cette famille, on travaille avec la correction métaplectique. La quantification des observables associée est réalisée par les opérateurs de Toeplitz, cf. chapitre 2.1.

On peut aussi être moins ambitieux et se restreindre à un ensemble de structures complexes sur lequel agit un sous-groupe du groupe des automorphismes de L . Comme on le verra, la représentation de Weil sur les fonctions thetas, cf. chapitre 1.5. Certaines représentations quantiques du mapping class group s'obtiennent aussi par cette méthode, cf. chapitre 3.5.

1.3 Correction métaplectique

Il est apparu assez vite que la quantification kählerienne est plus naturelle si on la corrige par un fibré de demi-formes, [Woo92]. Considérons une variété kählerienne M^n muni d'un fibré préquantifiant L . Un fibré de demi-formes de M est une racine carrée δ du fibré canonique $K = \wedge^{n,0} T^*M$. La quantification de M avec correction métaplectique est alors

$$\mathcal{H}_k^m = H^0(M, \mathcal{O}(L^k \otimes \delta)) \quad (1.7)$$

Comme précédemment, si M est compact, \mathcal{H}_k^m est de dimension finie et sa dimension se déduit du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch lorsque k est suffisamment grand. Un des premiers effets de la correction métaplectique est que le terme sous-dominant dans l'asymptotique de la dimension (1.4) s'annule, c'est à dire que

$$\dim \mathcal{H}_k^m = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \text{Vol}(M, \omega) + \mathcal{O}(k^{n-2})$$

Plus généralement, nous verrons que les fibrés de demi-formes sont utiles précisément pour le calcul des termes sous-dominants.

L'existence d'un fibré de demi-formes équivaut à ce que la seconde classe de Stiefel-Whitney de M s'annule. Lorsque cette condition est satisfaite, l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés de demi-formes est un espace principal homogène pour le groupe $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. En effet, un fibré de demi-formes est unique à produit tensoriel près par une racine carrée du fibré en droite trivial de base M . Et ces racines carrées sont données à isomorphisme près par les éléments de $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

Choisir une classe d'isomorphisme de fibré de demi-formes revient à relever le groupe de structure de (M, ω) au groupe métaplectique. Cela explique le terme "correction métaplectique" et montre aussi que le choix d'une classe d'isomorphisme de fibrés de demi-formes est indépendant de la structure complexe. Une autre façon plus topologique de le voir est la suivante. On introduit le fibré $\mathcal{J} \rightarrow M$ dont la fibre en p est l'ensemble des structures complexes linéaires de $T_p M$ compatibles avec ω_p . Soit $K \rightarrow \mathcal{J}$ le fibré en droite complexe telle que $K_j = \wedge_j^{n,0} T_p^* M$ si $j \in \mathcal{J}_p$. Alors une structure complexe j de (M, ω) est une section de \mathcal{J} et son fibré canonique est $K_j = j^* K$. Par conséquent, si δ est une racine carrée de K , $j^* \delta$ est une racine carrée de K_j . Du fait que les fibres de $\mathcal{J} \rightarrow M$ sont contractibles, l'application que nous venons de décrire met en bijection les classes d'isomorphismes de racines carrées de K et de K_j .

1.4 Orbites coadjointes

La méthode des orbites est à l'origine de la quantification des variétés kähleriennes. Elle consiste à construire les représentations irréductibles d'un groupe en quantifiant ses orbites coadjointes. Si $L \rightarrow M$ est un fibré en droite holomorphe sur lequel agit un groupe de Lie G , l'espace des sections holomorphes de L est une représentation de G . D'après le théorème de Borel-Weil, si G est compact, toutes ses représentations irréductibles se réalisent de la sorte avec pour M une orbite coadjointe. Dans ce qui suit, nous rappelons ce résultat et explicitons la limite semi-classique et la correction métaplectique.

Considérons un groupe de Lie G . Toute orbite coadjointe O de G admet une forme symplectique naturelle ω_O , dite de Kirillov-Kostant-Souriau, donnée par

$$\omega_O(\xi_M, \eta_M) = 2\pi\mu_O([\xi, \eta]), \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g},$$

où μ_O est l'injection de O dans \mathfrak{g}^* . L'action coadjointe sur O est alors hamiltonienne et admet pour moment μ_O . On dit que O est *entière* si elle admet un fibré préquantifiant L_O et si l'action de G s'y relève avec pour moment μ_O .

Supposons désormais que G est compact. Alors toute orbite coadjointe admet une unique structure complexe qui soit G -invariante et compatible avec la forme de Kirillov-Kostant-Souriau. D'autre part, les orbites coadjointes sont simplement connexes. Par conséquent, le fibré préquantifiant s'il existe, est unique à isomorphisme près. On le note L_O . De la sorte, on associe naturellement à toute orbite coadjointe entière O une représentation $H^0(O, \mathcal{O}(L_O))$ de G .

Théorème 1.4.1 (Borel-Weil, [Ser95], [HC56]). *Pour tout groupe de Lie compact G , l'application qui envoie une orbite entière O de G sur la représentation $H^0(O, \mathcal{O}(L_O))$ de G , est une bijection de l'ensemble des orbites entières sur l'ensemble des représentations irréductibles de G .*

Afin de paramétrer les orbites coadjointes, choisissons un tore maximal T et une chambre de Weyl fermée positive $\mathfrak{t}_+^* \subset \mathfrak{t}$. On plonge \mathfrak{t}^* dans \mathfrak{g}^* en l'identifiant avec $(\mathfrak{g}^*)^T$. Alors toute orbite coadjointe intersecte \mathfrak{t}_+^* en un unique point. De plus l'orbite est entière si et seulement si elle intersecte \mathfrak{t}_+^* en un point du réseau Λ^* . Ici Λ est le noyau de l'application exponentielle $\mathfrak{t} \rightarrow T$. On retrouve de la sorte que les représentations irréductibles de G sont paramétrées par les poids fondamentaux. De plus, on a que pour tout entier k positif et orbite entière O ,

$$H^0(O, \mathcal{O}(L_O^k)) \simeq H^0(kO, \mathcal{O}(L_{kO})).$$

Donc dans ce cas, la limite semi-classique revient à considérer la suite des représentations associées aux poids fondamentaux $k\alpha$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour comprendre la correction métaplectique des orbites génériques, il est commode de les identifier avec la variété des drapeaux $M = G/T$. A la chambre de Weyl \mathfrak{t}_+^* correspond une partition de l'ensemble des racines $\Delta = \Delta^+ \cup -\Delta^+$ qui détermine une structure complexe intégrable G -invariante sur M : on demande que $T_{[1]}^{1,0}M = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ ². Ensuite pour tout $\alpha \in \Lambda^*$, introduisons le fibré en droite $L_\alpha := G \times \mathbb{C}/T$ sur M , où T agit par

$$\exp(\xi)(g, z) = (g \exp(-\xi), e^{2i\pi\alpha(\xi)}z).$$

Ce fibré a une connexion naturelle³ compatible avec la structure complexe. Le fibré canonique de M est isomorphe à $L_{-2\rho}$ où ρ est la demi-somme des racines positives. Par conséquent, si $\rho \in \Lambda^*$, le G -fibré $L_{-\rho}$ est une racine carré du fibré canonique.⁴

Soit $\alpha \in \mathfrak{t}_+^*$ et $O = G.\alpha$ son orbite. Supposons α dans l'intérieur de la chambre, de sorte que l'application $\varphi_\alpha : M \rightarrow O$ qui envoie $[g]$ sur $g.\alpha$ soit un difféomorphisme. Alors φ_α est un biholomorphisme. Si de plus $\alpha \in \Lambda^*$ et donc O est entière, $\varphi_\alpha^*L_O$ est isomorphe à L_α , comme fibré avec connexion. Si enfin $\rho \in \Lambda^*$, $\delta_O = \varphi_\alpha^*L_{-\rho}$ est un G -fibré de demi-formes. Donc la quantification sans correction métaplectique de O est

$$H^0(O, \mathcal{O}(L_O^k)) = H^0(M, L_{k\alpha}), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

et avec la correction métaplectique,

$$H^0(O, \mathcal{O}(L_O^k \otimes \delta_O)) = H^0(M, L_{k\alpha - \rho}), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Cette translation de ρ est fréquemment utilisée en théorie des groupes lorsque l'on paramètre les poids fondamentaux.

1.5 Fonctions theta et représentation de Weil

Un exemple important est celui du tore. Les espaces quantiques sont des espaces de fonctions theta. La représentation projective de Weil du groupe

2. Cela revient à identifier G/T avec $G_{\mathbb{C}}/B^-$ où B^- est le sous-groupe de Borel d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha})$

3. Il s'agit de la connexion se relevant au fibré trivial $G \times \mathbb{C}$ en $d + \frac{1}{i}\beta$, avec $\beta \in \Omega^1(G)$ la forme invariante à gauche qui vaut $-2\pi\alpha$ en l'identité.

4. Le fibré canonique de M admet toujours un fibré en droite, racine carré du fibré canonique. Ce fibré est unique car M est simplement connexe. L'action s'y relève seulement si $\rho \in \Lambda^*$.

symplectique discret s'obtient par quantification. Grâce à la correction métaplectique, on montre que cette représentation se relève à un revêtement double du groupe symplectique, qui est précisément le groupe métaplectique.

Pour simplifier, on se limite au tore bidimensionnel. Considérons un espace vectoriel symplectique (E, ω) . Soit $L = E \times \mathbb{C}$ le fibré en droite hermitien trivial muni de la connexion $d + \frac{1}{i}\alpha$, avec $\alpha \in \Omega^1(E)$ donnée par $\alpha_x(y) = \frac{1}{2}\omega(x, y)$. Le groupe des automorphismes de L^k qui relèvent une translation de E est le groupe $E \times U(1)$, la loi de groupe étant

$$(x, u) \cdot_k (y, v) = (x + y, uv e^{i\frac{k}{2}\omega(x, y)})$$

L'action sur L^k est donnée par la même formule avec cette fois $(y, v) \in L^k$.

Supposons E de dimension 2 et soit R un réseau de E de volume 4π . Alors $R \times \{1\}$ est un sous-groupe de $E \times U(1)$. En quotientant, on obtient un tore symplectique $M = E/R$ muni d'un fibré préquantifiant $L_M = L/(R \times \{1\})$. Soit j une structure complexe linéaire de E compatible avec ω , elle descend au quotient M . Définissons $\mathcal{H}_k(j)$ comme l'espace des sections holomorphes de L_M^k . Considérons le sous-groupe $\text{Heis}_k = \frac{1}{2k}R \times U(1)$ de $(E \times U(1), \cdot_k)$. Étant le commutateur de $R \times \{1\}$, ce groupe de Heisenberg agit naturellement sur $\mathcal{H}_k(j)$.

Cette représentation de Heis_k est irréductible. Pour le voir, on se donne une base positive (μ, λ) de R , et l'on montre qu'il existe une base orthonormée $(\Psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ de \mathcal{H}_k telle que pour tout ℓ ,

$$T_{\mu/2k}^* \Psi_\ell = e^{i\ell\pi/k} \Psi_\ell, \quad T_{\lambda/2k}^* \Psi_\ell = \Psi_{\ell+1}. \quad (1.8)$$

Ici, pour tout vecteur $x \in \frac{1}{2k}R$, on note $T_x^* : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ le tiré en arrière par l'action de $(x, 1)$. On obtient cette base en trivialisant le fibré holomorphe L de sorte que les sections de \mathcal{H}_k s'identifient à des fonctions holomorphes de E presque-périodiques pour le réseau R . Les Ψ_ℓ sont alors des fonctions theta.

Sur les formules (1.8), on constate aussi que la représentation est irréductible mais aussi qu'elle ne dépend pas à isomorphisme près de la structure complexe. Autrement dit, pour toutes structures complexes j et j' de E , il existe un isomorphisme unitaire

$$U_{j, j'} : \mathcal{H}_k(j) \rightarrow \mathcal{H}_k(j')$$

qui commute à l'action de Heis_k . Cet isomorphisme est unique modulo $U(1)$. Ainsi, $U_{j_2, j_3} \circ U_{j_1, j_2} = U_{j_1, j_3}$ modulo $U(1)$. D'autre part, un automorphisme $g \in \text{Sl}(R)$ du réseau R agit de manière unitaire sur les sections de L_M^k

et commute à l'action de Heis_k . Ceci implique que les identifications $U_{j,j'}$ sont compatibles avec l'action de $\text{Sl}(R)$ en ce sens que le diagramme (1.6) commute modulo $U(1)$. On en déduit une représentation projective de $\text{Sl}(R)$ sur $\mathcal{H}_k(j)$.

Il est bien connu que cette représentation projective se relève en une représentation d'une extension par \mathbb{Z}_2 de $\text{Sl}(R)$. On peut donner une explication géométrique de ce fait en travaillant avec la correction métaplectique, comme je l'ai fait dans [Cha12]. Soit δ une droite de demi-formes de (E, j) , i.e. δ est une droite complexe munie d'un isomorphisme $\delta^2 \simeq K_j$ où

$$K_j = \{\alpha \in E^* \otimes \mathbb{C} / \alpha \circ j = i\alpha\}$$

est la droite canonique de (E, j) . Alors $\delta_M = M \times \delta$ est un fibré de demi-formes de M . Pour tout entier positif k , on définit l'espace quantique $\mathcal{H}_k(j, \delta)$ formé des sections j -holomorphes de $L_M^k \otimes \delta_M$. Le fibré δ_M étant trivial comme fibré holomorphe, $\mathcal{H}_k(j, \delta)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_k(j)$.

Ce qu'apporte ici la correction métaplectique, c'est le choix d'une base particulière vérifiant les relations (1.8). Précisément, pour toute base (μ, λ) de R telle que $\omega(\mu, \lambda) > 0$ et pour tout vecteur $\Omega \in \delta$ tel que $\Omega^2(\mu) = 1$, il existe une unique base orthonormée $(\Psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}_k(j, \delta)$ vérifiant (1.8) et la normalisation

$$\Psi_0(0) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} C_k(\tau)\Omega \quad \text{avec} \quad C_k(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi kn^2\tau}. \quad (1.9)$$

Ici $\tau = \alpha + i\beta$, avec α et β les réels tels que $\lambda = \alpha\mu + \beta j\mu$. Remarquer que la constante qui intervient dans la normalisation vérifie $C_k(\tau) = 1 + \mathcal{O}(e^{-kC})$.

Par conséquent, il existe pour toutes paires $(j, \delta), (j', \delta')$ un isomorphisme

$$U_{(j,\delta),(j',\delta')}^{\mu,\lambda} : \mathcal{H}_k(j, \delta) \rightarrow \mathcal{H}_k(j', \delta') \quad (1.10)$$

qui commute à l'action de Heis_k et qui envoie le vecteur Ψ_0 vérifiant la normalisation (1.9) sur le vecteur correspondant pour j', δ' . Comme le Ω intervenant dans (1.9) est unique au signe près, ces isomorphismes sont uniquement déterminés au signe près. Un fait remarquable est que ces isomorphismes sont indépendants du choix de (μ, λ) . Ceci entraîne que les diagrammes (1.6) commutent au signe près. On en déduit alors une représentation d'une extension par \mathbb{Z}_2 de $\text{Sl}(R)$ sur $\mathcal{H}_k(j, \delta)$, qui n'est autre que la représentation de Weil [Wei64].

Chapitre 2

Limite semi-classique

2.1 Opérateurs de Toeplitz

Les opérateurs de Toeplitz sur les variétés kähleriennes ont été introduits par F. Berezin [Ber75]. Grâce aux travaux de L. Boutet de Monvel et V. Guillemin [BdMG81], nous savons que les propriétés des opérateurs pseudo-différentiels s'étendent aux opérateurs de Toeplitz. Ma contribution a été d'adapter ces techniques aux cas des variétés kähleriennes pour obtenir des résultats plus précis.

2.1.1 Composition et symboles

Soit (M, ω) une variété kählerienne compacte munie d'un fibré préquantifiant L . Considérons de plus un fibré en droite holomorphe hermitien L_c de base M et définissons les espaces quantiques

$$\mathcal{H}_k = H^0(M, \mathcal{O}(L^k \otimes L_c)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si l'on choisit pour L_c le fibré trivial ou bien un fibré de demi-formes, on retrouve les espaces quantiques considérés en (1.3) et (1.7). L'espace des sections de $L^k \otimes L_c$ possède un produit scalaire naturel obtenu en intégrant le produit scalaire ponctuel contre la mesure de Liouville. On note Π_k le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^\infty(M, L^k \otimes L_c)$ d'image \mathcal{H}_k .

On appelle *opérateur de Toeplitz* toute famille $(T_k \in \text{End}(\mathcal{H}_k), k \in \mathbb{N})$ de la forme

$$T_k = \Pi_k f(\cdot, k) + \mathcal{O}(k^{-\infty})$$

où $(f(\cdot, k))$ est une suite de $\mathcal{C}^\infty(M)$ admettant un développement asymptotique $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} k^{-\ell} f_\ell$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ , les coefficients f_ℓ étant des fonctions

lisses de M . Le reste $\mathcal{O}(k^{-\infty})$ désigne une famille quelconque d'endomorphismes dont les normes uniformes sont $\mathcal{O}(k^{-N})$ pour tout N .

C'est un résultat non trivial que les opérateurs de Toeplitz forment une algèbre, [BdMG81]. Bien entendu, (Π_k) en est l'identité. On sait aussi définir le symbole total d'un opérateur de Toeplitz, et cela essentiellement de deux façons. On peut considérer la série $\sum \hbar^\ell f_\ell \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\hbar]]$, où les f_ℓ sont les coefficients du développement asymptotique du multiplicateur $f(\cdot, k)$. Cette série est bien déterminée par (T_k) et suivant F. Berezin, on l'appellera le symbole *contravariant* de l'opérateur.

D'autre part, considérons le noyau $K_k \in \mathcal{C}^\infty(M^2, (L^k \otimes L_c) \boxtimes \overline{(L^k \otimes L_c)})$ de T_k ¹. On montre que sa restriction à la diagonale admet un développement asymptotique de la forme

$$K_k(x, x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \sum_{\ell \in \mathbb{N}} k^{-\ell} g_\ell(x) + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad (2.1)$$

avec des coefficients lisses dans $\mathcal{C}^\infty(M)^2$. La série $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \hbar^\ell g_\ell$ est appelée le symbole *covariant non-normalisé* de (T_k) . Le symbole *covariant*, introduit aussi par Berezin, s'obtient en divisant $\sum \hbar^\ell g_\ell$ par le symbole covariant non-normalisé de (Π_k) .

Ces trois symboles sont totaux, en ce sens qu'ils déterminent chacun l'opérateur à un reste $\mathcal{O}(k^{-\infty})$ près. De plus toute série formelle de $\mathcal{C}^\infty(M)[[\hbar]]$ est le symbole contravariant (resp. covariant non-normalisé, covariant) d'un opérateur. Enfin, les opérateurs $\mathcal{O}(k^{-\infty})$ formant un idéal de l'algèbre des opérateurs de Toeplitz, $\mathcal{C}^\infty(M)[[\hbar]]$ hérite de trois lois de composition associatives et unitaires. Chacune de ces lois est un star produit que l'on sait expliciter, cf. chapitre 2.1.3 pour le symbole covariant non-normalisé.

Dans les applications, importent seulement les deux premiers coefficients du symbole. Pour cette raison on introduit les symboles *principal* et *sous-principal* de (T_k) qui sont les deux fonctions $a_0, a_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définies à partir du symbole contravariant $f_0 + \hbar f_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)$ ou covariant non-normalisé $g_0 + \hbar g_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)$ par

$$\begin{aligned} a_0 + \hbar a_1 &= f_0 + \hbar(f_1 + \frac{1}{2}\Delta f_0) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= g_0 + \hbar(g_1 - \frac{1}{2}\Delta g_0 - r_1 g_0) + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{aligned}$$

Ici, Δ est le laplacien holomorphe donné localement par $\Delta = G^{j\bar{k}} \partial_{z_j} \partial_{\bar{z}_k}$ si $\omega = iG_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$. De plus, r_1 est une fonction de M , identiquement nulle

1. $(T_k f)(x) = \int_M K_k(x, y) \cdot f(y) \mu_M(y)$ où μ_M est la mesure de Liouville de M .
2. On utilise la métrique de $L^k \otimes L_c$ pour identifier la restriction du noyau à la diagonale à une fonction.

lorsque L_c est un fibré de demi-formes, et égale à la moitié de la courbure scalaire lorsque L_c est le fibré trivial. Pour calculer r_1 en général, on introduit $\omega_1 \in \Omega^2(M)$ donnée par

$$\omega_1 = i \operatorname{courb}(L_c) + \frac{1}{2}\omega_{\text{Ricci}}$$

où $\operatorname{courb}(L_c)$ est la courbure de la connexion de Chern de L_c et $\omega_{\text{Ricci}} = -i\partial\bar{\partial}\ln(\det G_{jk})$ est la deux-forme de Ricci. Alors r_1 s'obtient en contractant ω_1 avec le tenseur de Poisson $\pi = iG^{jk}\partial_{\bar{z}_k} \wedge \partial_{z_j}$. Comme $\frac{1}{i}\omega_{\text{Ricci}}$ est la courbure du fibré anticanonique, si $L_c = \delta \otimes L_1$ avec δ un fibré de demi-formes, alors $\frac{1}{i}\omega_1$ est la courbure de L_1 .

Le symbole principal de (Π_k) est la fonction constante égale à 1, son symbole sous-principal est nul. Si (T_k) et (S_k) sont deux opérateurs de Toeplitz de symbole principal a et b respectivement, et de symbole sous-principal nul, alors les symboles principal et sous-principal de $(T_k S_k)$ et $\frac{1}{ik}[T_k, S_k]$ sont respectivement

$$ab + \frac{\hbar}{2i}\{a, b\} \quad \text{et} \quad \{a, b\} + \hbar\langle\pi_1, da \wedge db\rangle.$$

Ici π_1 est le bivecteur de M tel que $\langle\pi_1, da \wedge db\rangle = -\omega_1(X_a, X_b)$, où X_a et X_b sont les champs hamiltoniens de a et b . A noter que le tenseur de Poisson de $\omega + \hbar\omega_1$ est précisément $\pi + \hbar\pi_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)$. Mentionnons enfin que selon L. Boutet de Monvel, l'appellation symbole sous-principal est justifiée seulement lorsque $\pi_1 = 0$ [BdM02].

L'existence du développement asymptotique (2.1) découle de [BdMG81], comme cela avait été remarqué par S. Zelditch pour le projecteur de Szegő Π_k [Zel98]. Les propriétés du symbole principal énoncées ci-dessus découlent elles aussi de [BdMG81]. Ce n'est pas le cas pour le symbole sous-principal. Je l'ai introduit dans [Cha03a] et les formules précédentes le concernant ont été montrées dans [Cha03a] et [Cha06a]. Comme nous l'expliquerons plus loin, on peut décrire précisément le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur de Toeplitz au voisinage de la diagonale, cf. théorème 2.2.4. De là, on peut montrer tous les résultats précédents sans faire appel à la théorie générale de [BdMG81].

2.1.2 Équivalence semi-classique

On s'intéresse aux opérateurs de Toeplitz parce qu'ils ont de bonnes propriétés semi-classiques. Plus précisément ils ont les mêmes propriétés microlocales que les opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre. Le but de ce chapitre est de donner un sens à cette assertion.

Tout d'abord, si U est un ouvert de M on note \mathcal{T}_U l'algèbre des opérateurs de Toeplitz de \mathcal{H} dont le symbole total est à support dans U . On peut considérer ici de manière équivalente le symbole covariant non-normalisé, covariant ou contravariant.

Rappelons la définition des opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre et de leur symbole Weyl. A toute famille $f(\cdot, h)$ de fonction sur \mathbb{R}^{2n} , on associe une famille d'opérateurs $(P_h, h \in \mathbb{R}_{>0})$ agissant sur les fonctions de \mathbb{R}^n par

$$(P_h g)(x) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}(x-y)\cdot\xi} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) g(y) d\xi dy$$

Pour tout ouvert V de \mathbb{R}^{2n} , on notera \mathcal{P}_V l'ensemble formé de ces familles (P_h) dont le symbole $f(\cdot, h)$ a son support contenu dans V et admet un développement asymptotique de la forme $f_0 + hf_1 + \dots$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ . Les fonctions f_0 et f_1 sont les symboles principal et sous-principal de (P_h) .

Théorème 2.1.1. *Pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x , un ouvert V de \mathbb{R}^{2n} , un symplectomorphisme φ de U dans V et une famille d'applications linéaires $(E_k : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N})$ tel que*

- pour tout $(T_k) \in \mathcal{T}_U$, il existe $(P_h) \in \mathcal{P}_V$ tel que $E_k T_k E_k^* = P_{k-1} + \mathcal{O}(k^{-\infty})$.
- pour tout $(P_h) \in \mathcal{P}_V$, il existe $(T_k) \in \mathcal{T}_U$ tel que $E_k^* P_{k-1} E_k = T_k + \mathcal{O}(k^{-\infty})$.

Dans les deux cas, si f_0 et f_1 sont les symboles principal et sous-principal de (T_k) , les symboles principal et sous-principal de (P_h) sont $f_0 \circ \varphi$ et $f_1 \circ \varphi$.

On peut interpréter ce résultat comme un lemme de Darboux semi-classique.

2.1.3 Symboles covariants non-normalisés et noyau de Szegö

On peut donner une formule explicite close pour la loi de composition * des symboles covariants non-normalisés. Introduisons un système de coordonnées complexes (U, z_1, \dots, z_n) de M . Donnons nous deux potentiels ρ et ρ_c des courbures de L et L_c respectivement

$$\text{courb}(L) = \partial\bar{\partial}\rho, \quad \text{courb}(L_c) = \partial\bar{\partial}\rho_c.$$

Posons $G_{ij} = \partial^2 \rho / \partial z_i \partial \bar{z}_j$ et notons (G^{ij}) la matrice inverse de (G_{ij}) . Le calcul qui suit se fait dans l'algèbre des séries formelles $\mathcal{C}^\infty(U)[[\hbar, Z, \bar{Z}]]$, où

$Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ et $\bar{Z} = (\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n)$. Introduisons

$$\Delta = G^{ij} \partial_{Z_i} \partial_{\bar{Z}_j}, \quad m = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \det(G_{ij})}{\alpha! \beta!} Z^\alpha \bar{Z}^\beta$$

et

$$R = \sum_{\substack{|\alpha| > 0, |\beta| > 0, \\ |\alpha| + |\beta| \geq 3}} \frac{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \rho}{\alpha! \beta!} Z^\alpha \bar{Z}^\beta + \hbar \sum_{\substack{|\alpha| > 0, \\ |\beta| > 0}} \frac{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \rho_c}{\alpha! \beta!} Z^\alpha \bar{Z}^\beta$$

Théorème 2.1.2 ([Cha03a]). *La loi de composition des symboles covariants non-normalisés est donnée par*

$$f * g = \frac{1}{\det(G_{ij})} \left[e^{\hbar \Delta} \left[e^{-\hbar^{-1} R} H m \right] \right]_{Z=\bar{Z}=0}$$

où

$$H = \sum_{\alpha, \beta} \frac{(\partial^\alpha g)(\bar{\partial}^\beta f)}{\alpha! \beta!} Z^\alpha \bar{Z}^\beta.$$

Malgré son apparente simplicité, cette formule mène rapidement à des calculs inextricables. Néanmoins, on peut en déduire les coefficients du développement asymptotique du noyau du projecteur Π_k sur la diagonale

$$\Pi_k(x, x) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^n \sum k^{-\ell} g_\ell(x) + \mathcal{O}(k^{-\infty})$$

en fonction des dérivées successives de ρ et ρ_c en procédant comme suit. La série $\sum \hbar^\ell g_\ell$ est l'unité 1_* de $*$. L'équation $1_* * 1 = 1$ implique que pour tout p

$$\hbar^p g_p = 1 - \left(\sum_{\ell < p} \hbar^\ell g_\ell \right) * 1 + \mathcal{O}(\hbar^{p+1}).$$

On en déduit les g_p par récurrence sur p , entre autres, $g_0 = 1$ et $g_1 = r_1$.

Ce calcul a été présenté dans [Cha03a]. D'autres méthodes existent, dues à Z. Lu [Lu00], X. Dai, K. Liu et X. Ma [DLM06], R. Bermann, B. Berndtsson et J. Sjöstrand [BBS08]. Il faut noter qu'aucune n'est simple. Récemment, en partant essentiellement de la formule ci-dessus, H. Xu a donné une formule close pour les g_p à l'aide de diagrammes de Feynman [Xu12]. Malheureusement, je ne connais aucune application de ces calculs. On peut par exemple se poser le problème suivant. En intégrant le développement asymptotique

de Π_k sur la diagonale, on obtient la dimension de \mathcal{H}_k . On sait calculer explicitement cette dimension par le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch. On en déduit que

$$(2\pi\hbar)^{-n} \sum \hbar^\ell \int_M g_\ell \mu_M = \int_M \exp\left(\frac{\omega + \hbar\omega_1}{2\pi\hbar}\right) \hat{A}(M) \quad (2.2)$$

Comme application des calculs précédent ou de toute autre méthode déterminant les g_ℓ , on devrait pouvoir donner une preuve directe de cette formule, cela semble impossible. Notons toutefois que l'on peut déduire (2.2) du théorème de l'indice de B. Fedosov [Fed95]. Pour cela il suffit de connaître la classe caractéristique du star produit $*$. Cette classe caractéristique a été calculé par M. Schlichenmaier et A. Karabegov [KS01] dans le cas où L_c est le fibré trivial. En adaptant leur preuve, on obtient que la classe caractéristique de $*$ est

$$(2\pi\hbar)^{-1}([\omega] + \hbar[\omega_1]) \in H^2(M, \mathbb{R})[\hbar].$$

Il est intéressant de constater que c'est à nouveau la classe de Chern de L_1 qui apparaît au lieu de celle de L_c .

2.1.4 Des exemples

Tore

Comme dans la partie 1.5, on se donne un espace vectoriel symplectique (E, ω) de dimension 2, muni d'une structure complexe et d'une droite de demi-forme δ , et d'un réseau R de volume 4π de E . En quantifiant le tore $M = E/R$, on obtient pour tout k positif, une représentation \mathcal{H}_k du groupe de Heisenberg $\frac{1}{2k}R \times U(1)$. Rappelons que pour tout vecteur $x \in \frac{1}{2k}R$, on note $T_x^* : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ le tiré en arrière par l'action de $(x, 1)$.

Théorème 2.1.3 (Appendice de [CM11a]). *Pour tout $\nu \in R$, la famille $(T_{\nu/2k}^* : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k, k \in \mathbb{N})$ est un opérateur de Toeplitz de M de symbole*

$$\sigma(x) = \exp(i\omega(x, \nu))$$

et de symbole sous-principal nul.

Algèbre enveloppante quantique

Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte munie d'un fibré préquantifiant L et d'un fibré de demi-formes δ . Soit G un groupe de Lie agissant sur M , δ et L , de sorte que l'action sur M préserve la structure complexe,

l'action sur L préserve la connexion et la métrique et relève l'action sur M . Enfin on demande que le carré de l'action sur δ soit l'action sur le fibré canonique induite par l'action sur M .

Par exemple, on pourra considérer l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ avec l'action de $SU(n)$, le fibré de demi-formes existant seulement lorsque n est impair. Un autre exemple est donné par les variétés de drapeaux généralisées, cf. chapitre 1.4.

De l'action sur le fibré préquantifiant, on déduit un moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ pour l'action de G sur M , cf. équation (1.2). D'autre part, pour tout entier k , nous avons une représentation de G sur $\mathcal{H}_k = H^0(M, \mathcal{O}(L^k \otimes \delta))$. Notons $\rho_k : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_k)$ l'action infinitésimale. Il découle de la formule de Tuynman [Tuy87] que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, la famille

$$T^\xi = \left(\frac{i}{k} \rho_k(\xi) \right)$$

est un opérateur de Toeplitz de symbole principal μ^ξ et de symbole sous-principal nul.

Soit $\mathcal{U}^{\text{quant}}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante quantique de \mathfrak{g} définie comme le quotient de l'algèbre $T\mathfrak{g}[\hbar]$ des polynômes en la variable \hbar à coefficients dans l'algèbre tensorielle de \mathfrak{g} , par l'idéal bilatère engendré par les relations $\xi\eta - \eta\xi - \frac{\hbar}{i}[\xi, \eta]$, $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. On a une représentation de cette algèbre dans l'algèbre \mathcal{T} des opérateurs de Toeplitz de (\mathcal{H}_k)

$$\rho : \mathcal{U}^{\text{quant}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}, \quad [\hbar^n \xi_1 \dots \xi_p] \rightarrow \frac{1}{k^n} T_{\xi_1} \dots T_{\xi_p}$$

En adaptant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}^{\text{quant}}(\mathfrak{g})$, on déduit un isomorphisme d'espace vectoriel

$$\text{Sym}(\mathfrak{g})[\hbar] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{U}^{\text{quant}}(\mathfrak{g}), \quad \hbar^n [\xi_1 \dots \xi_p] \rightarrow \frac{\hbar^n}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} [\xi_{\sigma(1)} \dots \xi_{\sigma(p)}]$$

Cela donne une déformation de l'algèbre des polynômes de \mathfrak{g} dans la direction du crochet de Poisson de \mathfrak{g} . Enfin, pour tout $P(\cdot, \hbar) \in \text{Sym}(\mathfrak{g})[\hbar]$, $\rho(\varphi(P))$ est un opérateur de Toeplitz. Ses symboles principal et sous-principal sont $P_0(\mu)$ et $P_1(\mu)$ si $P(\xi, \hbar) = P_0(\xi) + \hbar P_1(\xi) + \mathcal{O}(\hbar^2)$.

2.1.5 Théorie homogène

Comme cela a déjà été dit, une partie des résultats découle directement de la théorie présentée dans [BdMG81]. Expliquons cela. Introduisons le fibré de base M

$$P = \{u \in L^* / \|u\| = 1\}.$$

Les sections de L^k s'identifient aux fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$ telles que $f(e^{i\theta}u) = e^{ik\theta}f(u)$. Soit \mathcal{H} le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(P)$ qui est somme directe des \mathcal{H}_k et Π le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^\infty(P)$ sur \mathcal{H} . Les opérateurs $\Pi Q \Pi$, où Q est un opérateur pseudo-différentiel de P , relèvent directement de la théorie développée dans [BdMG81]. On retrouve en particulier les opérateurs de Toeplitz du chapitre 2.1 en choisissant Q de la forme

$$\pi^* f_0 + N(\pi^* f_1) + N^2 \pi^* f_2 + \dots$$

avec π la projection de P sur M , f_0, f_1, \dots des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(M)$, et N une paramétrix de l'opérateur $\frac{1}{i}\partial_\theta$. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle suppose de bien connaître la théorie des opérateurs pseudo-différentiels homogènes et opérateurs intégraux de Fourier, et celle des opérateurs de Toeplitz au sens de [BdMG81], pour appliquer cela aux variétés kähleriennes. L'approche que je présente dans les chapitres suivants et que j'ai développé depuis ma thèse est au contraire directe.

2.2 États Lagrangiens

Soit (M, ω) une variété kählerienne compacte munie d'un fibré préquantifiant L et d'un fibré en droite holomorphe L_c . Les espaces quantiques correspondants sont les

$$\mathcal{H}_k = H^0(M, \mathcal{O}(L^k \otimes L_c)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Donnons nous une sous-variété lagrangienne fermée Λ de M , une section plate unitaire $s : \Lambda \rightarrow L$ et un réel p .

On appelle *état lagrangien* associé à (Λ, s) et d'ordre p , toute famille $(f_k \in \mathcal{H}_k, k \in \mathbb{N})$ qui vérifie les deux conditions suivantes : (f_k) se concentre sur Λ dans le sens que pour tout compact C ne rencontrant pas Λ , f_k et ses dérivées covariantes successives sont $\mathcal{O}(k^{-N})$ uniformément sur C pour tout N . On dira que f_k est $\mathcal{O}_\infty(k^{-\infty})$ sur $M \setminus \Lambda$. De plus, on demande qu'au voisinage de Λ ,

$$f_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^p E^k(x) a(x, k) + \mathcal{O}_\infty(k^{-\infty})$$

où E est une section holomorphe de L qui prolonge s et $a(\cdot, k)$ est une suite de sections de L_c qui admet un développement asymptotique $a_0 + k^{-1}a_1 + \dots$ avec des coefficients holomorphes. Le caractère holomorphe étant très contraignant, on demande plus généralement que E et les coefficients a_ℓ

vérifient les équations de Cauchy-Riemann modulo un reste s'annulant un tout ordre le long de Λ .

On définit le symbole total de (f_k) comme étant la série formelle $\sum \hbar^\ell b_\ell$ dont les coefficients b_ℓ sont la restriction des a_ℓ à Λ .

Théorème 2.2.1 ([Cha03b]). *Toute série formelle de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda, L_c)[[\hbar]]$ est le symbole d'un état lagrangien associé à (Λ, s) , uniquement déterminé modulo $\mathcal{O}(k^{-\infty})$.*

Démonstration. On applique différentes versions du lemme de Borel, pour étendre s et les sections $b_\ell \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda, L_c)$ en des sections presque holomorphes F et a_ℓ et pour sommer la série $\sum k^{-\ell} a_\ell$. Les sections

$$\tilde{f}_k = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^p F^k a(\cdot, k)$$

vérifient alors $\bar{\partial}\tilde{f}_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$. On pose $f_k = \Pi_k(\tilde{f}_k)$ où Π_k est le projecteur orthogonal sur \mathcal{H}_k . Montrons que $f_k = \tilde{f}_k + \mathcal{O}(k^{-\infty})$. Pour cela, on déduit d'une identité de Bochner-Kodaira que la première valeur propre non nulle du Laplacien holomorphe Δ_k de $L^k \otimes L_c$ est minorée par ck avec $c > 0$. Comme \mathcal{H}_k est le noyau de Δ_k et $\Delta_k \tilde{f}_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$, il vient que la norme L^2 de $f_k - \tilde{f}_k$ est un $\mathcal{O}(k^{-\infty})$. Avec la formule de Cauchy, on déduit qu'il en est de même en topologie \mathcal{C}^∞ . \square

Nous allons maintenant décrire l'action d'un opérateur de Toeplitz sur un état lagrangien. Pour le calcul des termes sous-principaux, il faut introduire quelques notations. On définit pour tout champ de vecteurs X de Λ , une dérivation D_X de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda, L_c)$ dans la direction de X comme suit. La restriction à Λ du fibré canonique K de M est naturellement isomorphe à $\wedge^n(T^*\Lambda \otimes \mathbb{C})$, l'isomorphisme étant donné par le pull-back par le plongement de Λ dans M . En transportant par cet isomorphisme la dérivé de Lie des formes, on obtient un opérateur \mathcal{L}_X de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda, K)$. Si δ est un fibré de demi-forme, \mathcal{L}_X agit aussi naturellement sur les sections de δ de sorte que soit vérifié $\mathcal{L}_X(f^2) = 2(\mathcal{L}_X f)f$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda, \delta)$. Dans le cas où $L_c = \delta \otimes L_1$, on pose

$$D_X = \mathcal{L}_X \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \nabla_X^{L_1}$$

où ∇^{L_1} est la connexion de Chern de L_1 . Cette définition ne dépend pas du choix de δ et L_1 car un fibré de demi-forme est unique à produit tensoriel près par un fibré plat. Comme l'on peut toujours mettre localement L_c sous la forme $\delta \otimes L_1$, cela définit D_X en toute généralité.

Théorème 2.2.2 ([Cha03b] et [Cha06a]). *Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz et (f_k) un état lagrangien associé à (Λ, s) . Alors $(T_k f_k)$ est un état lagrangien associé à (Λ, s) et de même ordre.*

Si le symbole de (f_k) est $b(\cdot, \hbar)$, alors le symbole de $(T_k f_k)$ vaut $a_0 b(\cdot, \hbar) + \mathcal{O}(\hbar)$, où a_0 est la restriction à Λ du symbole principal de (T_k) .

Si a_0 est constant, alors le symbole de $(T_k f_k)$ vaut

$$(a_0 + \hbar a_1) b(\cdot, \hbar) - \frac{\hbar}{i} D_X b(\cdot, \hbar) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

où a_1 est la restriction à Λ du symbole sous-principal de (T_k) et X est la restriction à Λ du champ de vecteurs hamiltonien du symbole principal de (T_k) .

La première application est la description des états propres d'opérateurs de Toeplitz. Supposons par exemple que M soit de dimension 2. On veut résoudre l'équation aux valeurs propres $T_k f_k = E f_k$ avec pour E une valeur régulière du symbole principal a_0 de (T_k) . On montre que localement (f_k) est un état lagrangien supporté par la sous-variété lagrangienne $\Lambda = a_0^{-1}(E)$. Les conditions de Bohr-Sommerfeld qui donnent le spectre, sont alors les conditions de recollement de ces états. Par exemple en première approximation, dans la limite semi-classique, la condition est que la restriction de L^k à Λ est trivial comme fibré plat. Le calcul du terme sous-principal dans le théorème 2.2.2 donne la première correction, importante car elle est du même ordre que l'écart entre deux valeurs propres consécutives. Plus de détails seront donnés dans le chapitre 2.3.

La seconde application est la construction d'opérateurs. Considérons une autre variété kählerienne compacte M' muni d'un fibré préquantifiant L' et d'un fibré holomorphe en droite L'_c . Définissons $\mathcal{H}'_k = H^0(M', \mathcal{O}(L'^k \otimes L'_c))$. En utilisant le produit scalaire de \mathcal{H}_k , les applications linéaires de \mathcal{H}_k dans \mathcal{H}'_k s'identifient aux vecteurs de $\mathcal{H}'_k \otimes \overline{\mathcal{H}}_k$. Ce dernier espace est naturellement isomorphe à l'espace des sections holomorphes de

$$(L'^k \otimes L'_c) \boxtimes (\overline{L^k \otimes L_c}) \rightarrow M' \times \overline{M}.$$

On appelle la section holomorphe ainsi associée à un opérateur son noyau au sens de Schwartz. Notons que $M' \times \overline{M}$ est une variété kählerienne dont $L \boxtimes \overline{L}'$ est un fibré préquantifiant. Donc on peut parler d'états lagrangiens de $\mathcal{H}'_k \otimes \overline{\mathcal{H}}_k$.

Supposons que $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}'_k$. La diagonale Δ_M de $M \times \overline{M}$ est une sous-variété lagrangienne. De plus la section s_M de $L \boxtimes \overline{L} \rightarrow \Delta_M$, donnée par $s_M(x, x) = u \otimes \bar{u}$ où $|u| = 1$, est plate et unitaire. On peut décrire avec ces données le noyau Π_k de l'application identité de \mathcal{H}_k .

Théorème 2.2.3 ([BdMS76] et [Cha03a]). *La famille (Π_k) est un état lagrangien associé à (Δ_M, s_M) d'ordre la dimension complexe de M . Son symbole est $1 + \mathcal{O}(\hbar)$.*

Il s'agit en fait d'une reformulation du théorème de L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand. Partant de ce résultat, on établit le théorème suivant.

Théorème 2.2.4 ([Cha03a]). *Les opérateurs de Toeplitz de M sont exactement les familles d'endomorphismes $(T_k : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k, k \in \mathbb{N})$ dont le noyau au sens de Schwartz est un état lagrangien associé à (Δ_M, s_M) d'ordre $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.*

Cette caractérisation des opérateurs de Toeplitz est en fait beaucoup plus utile que la définition par les multiplicateurs, son seul défaut étant d'être longue à présenter. Tous les résultats donnés dans la partie 2.1 en découlent. On constatera que le symbole covariant non-normalisé d'un opérateur de Toeplitz coïncide avec le symbole de son noyau. Enfin, le théorème 2.2.2 est aussi une conséquence du théorème 2.2.4.

Hormis les opérateurs de Toeplitz, on considérera des opérateurs dont le noyau est un état lagrangien dans les trois cas suivants :

- $M = M'$ comme variété symplectique, $L = L'$, mais les structures complexes sont différentes. Dans ce cas, on utilise les opérateurs associés à (Δ_M, s_M) pour construire des applications unitaires $\mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}'_k$ et établir que la quantification de (M, L) est indépendante de la structure complexe, cf. chapitre 2.4.
- $M = M'$ comme variété kählerienne, $L = L'$ et $L_c = L'_c$. Si Φ est un symplectomorphisme de M et Φ_L un automorphisme de fibré préquantifiant relevant M , alors $\Lambda = \{(\Phi(x), x) / x \in M\}$ est une sous-variété lagrangienne de $M \times \overline{M}$. De plus la section s de $L \boxtimes \overline{L} \rightarrow \Lambda$ qui envoie $(\Phi(x), x)$ sur $\Phi_L(u) \otimes \overline{u}$ où $|u| = 1$, est plate et unitaire. Les opérateurs associés à (Λ, s) sont des candidats naturels pour quantifier la paire (Φ, Φ_L) , cf. chapitre 2.4.
- Soit un groupe de Lie G agissant sur L par automorphismes de fibré préquantifiant avec le moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. On suppose que l'action est libre sur $N = \mu^{-1}(0)$ de sorte à pouvoir former le quotient symplectique $M' = N/G$. Le fibré quotient $L' = L|_N/G$ est préquantifiant pour M' . De plus, $\Lambda_G = \{(x, [x]) / x \in N\}$ est une sous-variété lagrangienne de $M \times \overline{M}'$. La section s_G de $L \boxtimes \overline{L}' \rightarrow \Lambda$ donné par $s_G(x, [x]) = u \otimes [\overline{u}]$ avec $|u| = 1$, est plate et unitaire. Les opérateurs associés à (Λ_G, s_G) interviennent dans la quantification de la réduction symplectique, cf. chapitre 2.6.

Ces applications seront développées dans les chapitres suivants. À chaque fois, les demi-formes jouent un rôle essentiel.

Terminons ce chapitre par quelques références bibliographiques. La quantification des variétés lagrangiennes remonte aux travaux de L. Hörmander. Dans [Hör71], on associe à toute sous-variété lagrangienne homogène d'un espace cotangent T^*C un ensemble de distributions de C et à tout symplectomorphisme homogène de T^*C un espace d'opérateurs de $\mathcal{C}_0^\infty(C)$ dit opérateurs intégraux de Fourier. Ces constructions ont été étendues pour les opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre, et ensuite pour les opérateurs de Toeplitz par D. Borthwick, T. Paul et A. Uribe [BPU95] et par S. Zelditch [Zel97]. À la différence de ce que je présente, les définitions de [BPU95] et [Zel97] sont basées sur la théorie de L. Boutet de Monvel et V. Guillemin. Mon approche permet une définition directe et un meilleur contrôle des symboles. Typiquement, à ma connaissance, personne n'a réussi à déduire de la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz de [BdMG81] la partie du calcul symbolique où interviennent les symboles sous-principaux et les demi-formes. Ceci est pourtant essentiel pour les applications.

2.3 Modes et conditions de Bohr-Sommerfeld

En dimension 2 ou plus généralement sous une hypothèse d'intégrabilité, le spectre d'un opérateur de Toeplitz est donné par les conditions de Bohr-Sommerfeld. Comme nous allons le voir, les états propres sont localement des états lagrangiens dont le symbole est prescrit à une constante multiplicative près. Ces états s'étendent globalement lorsque la condition de Bohr-Sommerfeld est vérifiée.

Les résultats qui suivent sont tirés des articles [Cha06a], [Cha03b]. Ils étendent aux opérateurs de Toeplitz les conditions de Bohr-Sommerfeld bien connues pour l'opérateur de Schrödinger ou plus généralement tout opérateur pseudo-différentiels.

Pour pouvoir raisonner localement, nous introduisons la notion d'*état local*. Il s'agit de la donnée d'un ouvert U de M et d'une famille

$$f_k \in \mathcal{C}^\infty(U, L^k \otimes L_c), \quad k \in \mathbb{N}$$

qui vérifie les estimations suivantes : pour tout compact C de U , $f_k = \mathcal{O}(k^{N_C})$ uniformément sur C et $\bar{\partial}f_k$ et ses dérivées successives sont $\mathcal{O}(k^{-\infty})$ sur C . À noter que si $U = M$, alors l'estimation sur $\bar{\partial}f_k$ équivaut au fait $\Pi_k f_k - f_k$ soit un $\mathcal{O}(k^{-\infty})$ ainsi que ses dérivées successives.

Les opérateurs de Toeplitz de M agissent sur les états locaux dans le sens suivant. Pour tout opérateur de Toeplitz (T_k) et état local (U, f_k) , il existe un état local (U, g_k) tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à support contenu dans U ,

$$T_k(\varphi f_k) = g_k \quad \text{sur l'intérieur de } \{\varphi = 1\}.$$

(g_k) est unique modulo $\mathcal{O}(k^{-\infty})$. On pose $T_k f_k := g_k$.

Décrivons les états locaux qui sont solutions sur un ouvert donné U de $T_k f_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$. Nous avons tout d'abord le résultat d'ellipticité suivant : si le symbole principal de (T_k) ne s'annule pas sur U , alors $f_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$ sur U . Nous sommes donc ramené à l'étude au voisinage des zéros du symbole principal σ de (T_k) . Dans le cas où le symbole principal est réel, on sait caractériser les solutions de $T_k f_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$ au voisinage des zéros réguliers.

Théorème 2.3.1 ([Cha06a], [Cha03b]). *Supposons M de dimension 2. Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz dont le symbole principal a_0 prend des valeurs réelles. Soit U un ouvert de M tel que $I := a_0^{-1}(0) \cap U$ soit difféomorphe à un intervalle et que da_0 ne s'annule pas sur I . Alors il existe un état local (U, f_k) solution de $T_k f_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$ de la forme $f_k = F^k b(\cdot, k)$ où*

- F est une section de L , dont la restriction à I est plate et unitaire, et qui vérifie $\bar{\partial}F = 0$ modulo une section s'annulant à tout ordre le long de I .
- $b(\cdot, k) = b_0 + k^{-1}b_1 + \dots$ avec des coefficients qui vérifient $\bar{\partial}b_\ell = 0$ modulo une fonction s'annulant à tout ordre le long de I .
- le coefficient principal b_0 ne s'annule pas sur I et vérifie l'équation de transport

$$\frac{1}{i}D_X b_0 + a_1 b_0 = 0 \quad \text{sur } I,$$

où X est le champs de vecteur hamiltonien de a_0 et a_1 est le symbole sous-principal de (T_k) .

De plus pour tout état local (U, g_k) solution de $T_k g_k = \mathcal{O}(k^{-\infty})$ il existe un suite de complexe (λ_k) telle que $g_k = \lambda_k f_k + \mathcal{O}(k^{-\infty})$ sur U .

Démonstration. On construit par approximations successives la solution $f_k = F^k b(\cdot, k)$ en appliquant le théorème 2.2.2, en fait la version de ce théorème pour les états locaux. Pour tout ℓ , on calcule le coefficient b_ℓ en fonction de $b_0, \dots, b_{\ell-1}$ de sorte que $T_k f_k = \mathcal{O}(k^{-(\ell+1)})$ sur I .

Pour montrer la deuxième partie du résultat, on peut se mettre sous une forme normale. Dans un premier temps on se ramène à l'espace de Bargmann en utilisant un résultat similaire au théorème 2.1.1. Ensuite, en conjuguant (T_k) par un opérateur de Toeplitz unitaire, on se ramène à $T_k = z + \frac{1}{ik}\partial_z$. Et le résultat se vérifie facilement pour cet opérateur. \square

Pour obtenir les conditions de Bohr-Sommerfeld, on applique ce résultat à l'opérateur $(T_k - E \text{id})$ et l'on cherche à quelle condition sur E les solutions locales se recollent. On suppose T_k auto-adjoint. Pour un énoncé plus simple, supposons aussi que L_c est un fibré de demi-forme δ et que le symbole sous-principal de (T_k) s'annule. Considérons un intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$ formé de valeurs régulières du symbole principal a_0 et tel que $\Lambda_E = a_0^{-1}(E)$ a une seule composante connexe pour tout $E \in J$. La condition de Bohr-Sommerfeld au premier ordre est l'existence d'une section globale s de $L^k \otimes \delta \rightarrow \Lambda_E$ vérifiant

$$(\nabla_X^{L^k} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \mathcal{L}_X)s = 0$$

Cette condition équivaut à

$$S(E) + \epsilon \frac{\pi}{k} \in \frac{2\pi}{k} \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Ici $S(E)$ est l'action de Λ_E , c'est-à-dire que l'holonomie de $L \rightarrow \Lambda_E$ est la multiplication par $\exp(2i\pi S(E))$. L'indice $\epsilon \in \{0, 1\}$ est déterminé de la manière suivante. Comme nous l'avons vu pour définir \mathcal{L}_X , la restriction du fibré de demi-forme à Λ_E est une racine carrée de $T^*\Lambda_E \otimes \mathbb{C}$. L'ensemble

$$\{u \in \delta|_{\Lambda_E} \text{ tel que } u^2 > 0\}$$

possède une ou deux composantes connexes. Dans le premier cas, $\epsilon = 1$, dans le second cas $\epsilon = 0$.

Pour tout entier k , on note

$$\lambda_0(k) < \lambda_1(k) < \dots < \lambda_{N(k)}(k) < \lambda_{N(k)+1}$$

les réels de J vérifiant la condition de Bohr-Sommerfeld (2.3). Notons que

$$N(k) = \frac{k}{2\pi} \int_{a_0^{-1}(J)} \omega + \mathcal{O}(1)$$

De plus, comme $S'(E)$ est la période $T(E)$ de la trajectoire λ_E du champ hamiltonien de H , l'on a

$$\lambda_{i+1}(k) - \lambda_i(k) = \frac{2\pi}{T(\lambda_i(k))} k^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2})$$

uniformément en i . Soient

$$m(k) = \frac{1}{2}(\lambda_0(k) + \lambda_1(k)), \quad M(k) = \frac{1}{2}(\lambda_{N(k)}(k) + \lambda_{N(k)+1}(k))$$

et remarquons que $m(k) = m + \mathcal{O}(k^{-1})$ et $M(k) = M + \mathcal{O}(k^{-1})$ où m et M sont les bornes de J .

Théorème 2.3.2 ([Cha06a], [Cha03b]). *Si k est suffisamment grand, les valeurs propres de (T_k) dans $[m(k), M(k)]$ sont au nombre de $N(k)$. Elles sont simples. Notons les $\lambda'_1(k) < \dots < \lambda'_{N(k)}(k)$. Alors il existe $C > 0$ tel que*

$$|\lambda_j(k) - \lambda'_j(k)| \leq Ck^{-2}$$

pour tout k et tout entier j compris 1 et $N(k)$.

Pour terminer ce chapitre, nous donnons l'asymptotique du produit scalaire de deux états lagrangiens supportés par des courbes qui s'intersectent transversalement. A nouveau le résultat s'énonce naturellement avec les demi-formes. Considérons un espace vectoriel symplectique (S, ω) de dimension 2 muni d'une structure complexe linéaire j , d'une droite complexe δ , et d'un isomorphisme $\delta^2 \rightarrow E_j^*$ où $E_j = \ker(j - i \text{id})$. Alors pour toutes droites ν_1, ν_2 de E en somme directe, il existe un unique accouplement sesquilinéaire :

$$\delta \times \delta \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2) \rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle_{\nu_1, \nu_2}$$

vérifiant les propriétés suivantes

- $(\langle u, v \rangle_{(\nu_1, \nu_2)})^2 = i(\pi_1^* u^2 \wedge \pi_2^* v^2) / \omega$ pour tout $u, v \in \delta$, où π_1 et π_2 sont les projections de E sur ν_1 (resp. ν_2) parallèlement à ν_2 (resp. ν_1).
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\nu_1, \nu_2)}$ dépend continuellement de ν_1 et ν_2 . De plus pour toute droite ν de E et tout vecteur $u \in \delta$, $\langle u, u \rangle_{\nu, \nu} \geq 0$.

Considérons maintenant deux sous-variétés lagrangiennes Λ^1 et Λ^2 de M s'intersectant transversalement en un point x . Pour $i = 1, 2$, on se donne une section F_i de L dont la restriction à Λ_i est plate unitaire, et telle que $\bar{\partial}F_i$ s'annule à tout ordre le long de Λ_i .

Proposition 2.3.3 ([Cha10d]). *Il existe un voisinage U de x tel que pour toutes sections g_1, g_2 du fibré de demi-formes, on ait un développement asymptotique*

$$\begin{aligned} & \int_U (F_1(y), F_2(y))_{L_y}^k (g_1(y), g_2(y))_{\delta_y} |\omega|(y) \\ &= \frac{2\pi}{k} (F_1(x), F_2(x))_{L_x}^k \sum_{N=0,1,\dots} a_\ell k^{-\ell} + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \end{aligned}$$

le coefficient du terme dominant étant $a_0 = \langle g_1(x), g_2(x) \rangle_{T_x \Lambda_1, T_x \Lambda_2}$.

La preuve est une application facile du lemme de la phase stationnaire.

2.4 Quantification et structures complexes

Pour ce chapitre, on se donne une variété symplectique (M, ω) et un fibré préquantifiant $L \rightarrow M$. On se demande en quelle mesure la quantification de M et L dépend du choix d'une structure complexe. La première remarque est que pour toutes structures complexes j_1 et j_2 de (M, ω) , lorsque k est suffisamment grand, les espaces $H^0(M, \mathcal{O}_{j_a}(L^k))$, $a = 1, 2$, ont même dimension. Ceci découle du théorème de Riemann-Roch et du théorème d'annulation de Kodaira. Par conséquent, il existe une famille d'applications

$$T_k : H^0(M, \mathcal{O}_{j_1}(L^k)) \rightarrow H^0(M, \mathcal{O}_{j_2}(L^k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

unitaires lorsque k est suffisamment grand.

Pour obtenir de bonnes propriétés semi-classiques, supposons de plus que la famille des noyaux au sens de Schwartz des T_k soit un état lagrangien associé à (Δ_M, s_M) . Comme on le verra dans la preuve du théorème 2.4.1, une telle famille existe bien. Alors la suite (T_k) vérifie la propriété suivante : pour tout opérateur de Toeplitz (S_k) de $(H^0(M, \mathcal{O}_{j_2}(L^k)))$, $(T_k^* S_k T_k)$ est un opérateur de Toeplitz de $(H^0(M, \mathcal{O}_{j_1}(L^k)))$ qui a le même symbole principal. En travaillant avec des demi-formes, nous pouvons restreindre le choix de (T_k) de sorte que le sous-principal soit aussi invariant. Expliquons cela.

Notons \mathcal{D} l'ensemble des couples formés d'une structure complexe de (M, ω) et d'un fibré de demi-forme associé à cette structure complexe. On suppose \mathcal{D} non vide, autrement dit que M admet un fibré de demi-formes. A chaque élément (j, δ) de \mathcal{D} on associe les espaces quantiques

$$\mathcal{H}_k(j, \delta) = H^0(M, \mathcal{O}_j(L^k \otimes \delta)), \quad k \in \mathbb{N}$$

où nous avons noté $\mathcal{O}_j(L^k \otimes \delta)$ le faisceau des sections holomorphes pour la structure holomorphe induite par j .

Nous allons définir une catégorie dont l'ensemble des objets est \mathcal{D} . Tout d'abord, considérons un espace vectoriel symplectique S . Pour toute structure complexe linéaire j de S , on note $E_j = \ker(j - i \text{id})$ le sous-espace des vecteurs holomorphes et $K_j = \wedge^{\text{top}} E_j^*$ la droite canonique correspondante. Si j_a et j_b sont deux structures complexes, la projection $\pi_{j_b, j_a} : E_{j_b} \rightarrow E_{j_a}$ parallèlement à \bar{E}_{j_b} est un isomorphisme. Notons $f_{j_a, j_b} = \pi_{j_b, j_a}^* : K_{j_a} \rightarrow K_{j_b}$ l'isomorphisme associé. Étant donné trois structures complexes, nous avons

$$f_{j_a, j_c} = \zeta(j_a, j_b, j_c) f_{j_b, j_c} \circ f_{j_a, j_b} \quad (2.5)$$

pour une certaine fonction ζ à valeurs dans \mathbb{C}^* . L'espace des structures complexes de S étant contractible, ζ admet une unique racine carrée continue $\zeta^{\frac{1}{2}}$ telle que $\zeta^{\frac{1}{2}}(j, j, j) = 1$.

Étant donné deux éléments $a = (j_a, \delta_a)$ et $b = (j_b, \delta_b)$ de \mathcal{D} , on définit les morphismes de a vers b comme étant les isomorphismes de fibrés vectoriels $f : \delta_a \rightarrow \delta_b$ relevant l'identité et dont le carré en x est $f_{j_a(x), j_b(x)}$. La composition du morphisme $f : a \rightarrow b$ avec le morphisme $f' : b \rightarrow c$ est le morphisme $f' \circ_{\mathcal{D}} f : a \rightarrow c$ défini par

$$(f' \circ_{\mathcal{D}} f)(x) = \zeta^{\frac{1}{2}}(j_a(x), j_b(x), j_c(x))(f'(x) \circ f(x))$$

Avec ces définitions, \mathcal{D} est une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles. Pour tout éléments isomorphes a et b dans \mathcal{D} , il existe exactement $2^{\pi_0(M)}$ morphismes de a vers b . Les classes d'isomorphismes de \mathcal{D} sont exactement les classes d'équivalences de fibrés de demi-formes introduites dans le chapitre 1.3. Elles sont donc au nombre de $\sharp H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

A tout morphisme $f : a \rightarrow b$, nous associons l'ensemble $U(f)$ formé des familles d'opérateurs $(T_k : \mathcal{H}_k(a) \rightarrow \mathcal{H}_k(b), k \in \mathbb{N})$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- la famille des noyaux au sens de Schwartz de (T_k) est un état lagrangien associé à (Δ_M, s_M) de symbole $f + \mathcal{O}(\hbar)^3$.
- si k est suffisamment grand, T_k est unitaire.

Les propriétés de ces opérateurs sont les suivantes.

Théorème 2.4.1 ([Cha07], [Cha10b]). *Pour tout morphisme f de \mathcal{D} , $U(f)$ est non vide. De plus,*

- si $(T_k) \in U(f)$ alors $(T_k^*) \in U(f^{-1})$.
- si $(T_k) \in U(f)$, $(S_k) \in U(f')$ et que l'on peut composer f avec f' , alors $(S_k T_k) \in U(f' \circ_{\mathcal{D}} f)$.

Enfin si $(T_k) \in U(f)$ avec $f : a \rightarrow b$ et (S_k) est un opérateur de Toeplitz de $\mathcal{H}(a)$, alors $(T_k S_k T_k^*)$ est un opérateur de Toeplitz de $\mathcal{H}(b)$ qui a mêmes symboles principal et sous-principal que (S_k) .

En quel mesure un opérateur de $U(f)$ est-il uniquement déterminé ? Pour tout $(S_k), (T_k) \in U(f)$, $T_k^* S_k = \text{id} + \mathcal{O}(k^{-1})$. En effet, pour tout $a \in \mathcal{D}$, les éléments de $U(\text{id}_a)$ sont des opérateurs de Toeplitz de $\mathcal{H}(a)$ de symbole principal 1, ils diffèrent donc de l'identité d'un $\mathcal{O}(k^{-1})$.

L'amélioration apportée par la correction métaplectique est double. D'une part, si l'on travaille sans demi-formes, on sait spécifier la suite d'opérateurs (2.4) seulement à multiplication près par un opérateur de Toeplitz unitaire. D'autre part, sans les demi-formes, le symbole sous-principal n'est plus conservé lorsque l'on conjugue les opérateurs de Toeplitz.

3. nous avons identifié $\mathcal{C}^\infty(\delta_b \boxtimes \bar{\delta}_a, \Delta_M)$ avec $\mathcal{C}^\infty(\delta_b \otimes \delta_a^*, M)$

Démonstration. La preuve de $U(f) \circ U(f') \subset U(f' \circ_{\mathcal{D}} f)$ repose sur le lemme de la phase stationnaire. On montre ainsi que si les noyaux de $(T_k : \mathcal{H}_k(a) \rightarrow \mathcal{H}_k(b))$ et $(S_k : \mathcal{H}_k(b) \rightarrow \mathcal{H}_k(c))$ sont des états lagrangiens associés à (Δ_M, s_M) , alors il en est de même pour $(T_k \circ S_k)$. Le calcul des symboles révèle quelques surprises : si les symboles de (T_k) et (S_k) sont respectivement $f + \mathcal{O}(\hbar)$ et $g + \mathcal{O}(\hbar)$, alors le symbole de $(T_k \circ S_k)$ est $\zeta^{1/2}(j_a, j_b, j_c)g \circ f + \mathcal{O}(\hbar)$. Le coefficient multiplicatif $\zeta^{1/2}(j_a, j_b, j_c)$ est la racine carrée du déterminant qui sort dans la phase stationnaire. Ce résultat est d'ailleurs valable si l'on remplace les fibrés de demi-formes δ_a , δ_b et δ_c par des fibrés quelconques. Quoiqu'il en soit, on retrouve la formule (2.5).

De ceci, on déduit que si le symbole de (T_k) est un morphisme de demi-forme f , $(T_k T_k^*)$ est un opérateur de Toeplitz de symbole 1. D'après le calcul fonctionnel des opérateurs de Toeplitz, l'opérateur $(T_k T_k^*)^{-1/2}$, seulement défini pour k grand, est un opérateur de Toeplitz à nouveau de symbole 1. Donc quitte à remplacer T_k par $(T_k T_k^*)^{-1/2} T_k$, T_k est unitaire et appartient à $U(f)$. Cette astuce qui consiste à multiplier par $(T_k T_k^*)^{-1/2}$ remonte à l'article [Zel97].

Les autres propriétés suivent facilement, excepté le calcul du symbole sous-principal de $(T_k S_k T_k^*)$. Là encore, les morphismes de demi-formes jouent un rôle essentiel. Le fibré $\delta_b \boxtimes \bar{\delta}_a$ est un fibré de demi-formes de M^2 muni de la structure complexe $(j_b, -j_a)$. Donc sa restriction à $\Delta_M \simeq M$ s'identifie naturellement avec le fibré des éléments de volumes de M . On montre qu'un morphisme de fibrés $\delta_a \rightarrow \delta_b$ est un morphisme de demi-formes si et seulement si son carré s'identifie à la mesure de Liouville de M .

Soit (R_k) un opérateur de Toeplitz de $\mathcal{H}(b)$ qui a mêmes symboles principal a_0 et sous-principal a_1 que (S_k) . Montrons que le noyau de $(T_k S_k - R_k T_k)$ est un état lagrangien associé à (Δ_M, s_M) avec un symbole $\mathcal{O}(\hbar^2)$. Pour ce faire, on applique le théorème 2.2.2 au noyau de (T_k) avec l'opérateur de Toeplitz $(\text{id} \otimes S_k - R_k^* \otimes \text{id})$ de $\mathcal{H}(b) \otimes \bar{\mathcal{H}}(a)$. Les symboles principal et sous-principal de cet opérateur sont $a_0(x) - a_0(y)$ et $a_1(x) - a_1(y)$. Ils s'annulent sur la diagonale Δ_M . En identifiant Δ_M avec M , le champ de vecteurs hamiltonien de $a_0(x) - a_0(y)$ se restreint en le champ de vecteurs hamiltonien de a_0 . La dérivée de Lie de la mesure de Liouville par rapport à un champ de vecteurs hamiltonien étant nulle, le résultat suit. Pour conclure la preuve du théorème, on multiplie à gauche $T_k S_k - R_k T_k$ par T_k^* . \square

Exemple 2.4.2. Dans le cas du tore $M = E/R$ traité dans le chapitre 1.5, étant donné deux couples (j, δ) et (j', δ') où les structures complexes sont linéaires, on sait définir en passant par les fonctions thetas, un isomorphisme $\mathcal{H}_k(j, \delta) \rightarrow \mathcal{H}_k(j', \delta')$ unique au signe près, cf. (1.10). Ce choix de signe

correspond au choix d'un morphisme $f : (j, \delta) \rightarrow (j', \delta')$. J'ai vérifié dans [Cha12] que ces opérateurs appartiennent à $U(f)$.

2.5 Quantification et symplectomorphisme

Appliquons les résultats du chapitre précédent à la quantification des symplectomorphismes hamiltoniens. Donnons nous un élément (j, δ) de \mathcal{D} et notons

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(j, \delta).$$

Le groupe $\text{Aut}(L)$ des automorphismes du fibré préquantifiant L agit sur l'espace des sections de L^k . Mais, le sous-espace \mathcal{H}_k n'est pas invariant. Plus précisément, un automorphisme Φ_L envoie \mathcal{H}_k sur $\mathcal{H}_k(\Phi_*j, \Phi_*\delta)$, où Φ est le symplectomorphisme de M relevé par Φ_L . Pour tout morphisme f de $(\Phi_*j, \Phi_*\delta)$ vers (j, δ) , on définit alors l'ensemble $V(\Phi_L, \Phi, f)$ des familles de la forme

$$T_k \circ \Phi_{L*} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

où $(T_k) \in U(f)$.

Notons $\text{Met}(M, j, \delta)$ l'ensemble des couples (Φ, f) formés d'un symplectomorphisme Φ de M et d'un morphisme f de $(\Phi_*j, \Phi_*\delta)$ vers (j, δ) . Il est facile de voir que $\text{Met}(M, j, \delta)$ est un groupe. Pour chaque élément $g = (\Phi_L, \Phi, f)$ du produit fibré de $\text{Aut}(L)$ et $\text{Met}(M, j, \delta)$, nous venons de définir un ensemble d'opérateur $V(g)$.

Du théorème 2.4.1, on déduit immédiatement le

Théorème 2.5.1. *Pour tout g et h dans le produit semi-direct de $\text{Aut}(L)$ et $\text{Met}(M, j, \delta)$, nous avons*

- si $(T_k) \in V(g)$ alors $(T_k^{-1}) \in V(g^{-1})$
- si $(T_k) \in V(g)$ et $(T'_k) \in V(h)$, alors $(T_k T'_k) \in V(g.h)$

De plus, pour tout $(T_k) \in V(g)$, nous avons la propriété d'Egorov : pour tout opérateur de Toeplitz (S_k) de \mathcal{H} , $(T_k S_k T_k^)$ est un opérateur de Toeplitz de \mathcal{H} et ses symboles principal et sous-principal s'obtiennent en composant ceux de (S_k) par le symplectomorphisme Φ déterminé par g .*

Décrivons plus en détail le groupe $\text{Met}(M, j, \delta)$. Lorsque M est connexe, le morphisme $\text{Met}(M, j, \delta) \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ admet pour noyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si M est de plus simplement connexe, le morphisme est surjectif. Ce n'est pas vrai en général. Néanmoins tous les symplectomorphismes isotopes à l'identité se relèvent à $\text{Met}(M, j, \delta)$. De plus on peut présenter ce groupe sans aucune référence à une structure complexe. Pour cela introduisons le fibré

$\mathrm{Sp}(M)$ des repères symplectiques de TM . C'est un fibré principal avec groupe de structure $\mathrm{Sp}(2n)$. Partant de (δ, j) , nous construisons un fibré principal $\mathrm{Sp}_2(M)$ avec groupe de structure le groupe métaplectique qui relève $\mathrm{Sp}(M)$. Le groupe des automorphismes de $\mathrm{Sp}_2(M)$ relevant un symplectomorphisme de M s'identifie à $\mathrm{Met}(M, j, \delta)$.

Les opérateurs que nous venons d'introduire sont les propagateurs quantiques des opérateurs de Toeplitz. Rappelons que l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de L est $\mathcal{C}^\infty(M)$ muni du crochet de Poisson.

Théorème 2.5.2 ([Cha07]). *Pour tout opérateur de Toeplitz (T_k) de symbole principal σ et symbole sous-principal nul, pour tout temps t , $(\exp(itkT_k)$, $k \in \mathbb{N}$) est un opérateur de $V(\Phi_L^t, f_t)$, où $(\Phi_L^t, t \in \mathbb{R})$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes de L engendré par σ et $(f_t, t \in \mathbb{R})$ est la famille de morphismes de demi-formes $(j, \delta) \rightarrow (\Phi_*^t j, \Phi_*^t \delta)$ dépendant continuellement de t et partant de l'identité.*

On peut comparer ces résultats avec la discussion à la fin du chapitre 1.2 : en un sens asymptotique, nous avons montré que la quantification ne dépend pas la structure complexe, déduit une représentation du groupe des automorphismes du fibré préquantifiant, la représentation infinitésimale étant fournie par les opérateurs de Toeplitz.

Cette construction est quelque part une généralisation de la représentation métaplectique. En effet, si E est un espace vectoriel symplectique, on définit la catégorie \mathcal{D}_E dont les objets sont les paires (j, δ) formées d'une structure complexe linéaire j de E et d'une droite de demi-forme δ , les morphismes sont définis comme précédemment. Dans ce cas, on sait définir un foncteur de la catégorie \mathcal{D}_E vers la catégorie des espaces de Hilbert, qui envoie (j, δ) en l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(j, \delta)$ formé des sections holomorphes de $L_E \otimes \delta$ de carré sommable. L'image d'un morphisme est donné par un opérateur unitaire dont le noyau vérifie essentiellement les mêmes propriétés que les états lagrangiens, à ceci près qu'à un morphisme correspond un unique opérateur et qu'il n'y a plus de paramètre k . La représentation projective associée au groupe symplectique linéaire n'est autre que la représentation métaplectique, cf. [Cha10b] pour plus de détails.

En prolongement de l'exemple 2.4.2, considérons le tore $M = E/R$ et sa quantification \mathcal{H}_k . Alors d'une part le groupe $\mathrm{Sl}(R)$ agit sur M et d'autre part, la représentation métaplectique discrète introduite dans le chapitre 1.5 est une représentation $\rho_k : \mathrm{Sl}_2(R) \rightarrow \mathrm{U}(\mathcal{H}_k)$ d'une extension $\mathrm{Sl}_2(R)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathrm{Sl}(R)$. Cette extension n'est autre que la restriction à $\mathrm{Sl}(R)$ du groupe métaplectique de M et pour tout $g \in \mathrm{Sl}_2(R)$, la famille $(\rho_k(g))$ appartient à $V(g)$.

Un autre exemple important est fourni par les représentations quantiques du mapping class group d'une surface, cf. chapitre 4.2.

Enfin donnons un dernier résultat qui est intéressant pour les applications. Il s'agit d'un théorème de Lefschetz pour les applications de $V(\Phi_L, \Phi, f)$.

Théorème 2.5.3 ([Cha10b]). *Soit Φ_L un automorphisme de L qui relève un symplectomorphisme Φ dont le graphe intersecte transversalement la diagonale. Pour toute famille $(T_k) \in V(\Phi_L, \Phi, f)$, nous avons*

$$\mathrm{Tr}(T_k) = \sum_{x=\Phi(x)} \frac{i^{m_x} u_x^k}{[\det(\mathrm{id} - T_x \Phi)]^{1/2}} + \mathcal{O}(k^{-1})$$

où pour tout point fixe x de Φ , u_x est la trace de l'endomorphisme de $\Phi_L(x)$ de L_x and $m_x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dépend seulement de $T_x \Phi$ et $f(x)$.

Le calcul de l'indice m_x est expliqué en détail dans [Cha10b]. Appliqué aux opérateurs intervenant dans la représentation quantique du mapping class groupe d'une surface, ce résultat prouve la conjecture asymptotique de Witten, cf. chapitre 4.2.

2.6 Réduction Symplectique

Considérons les mêmes données que dans le chapitre 2.1.4, à savoir une variété kählérienne compacte (M, ω) munie d'un fibré préquantifiant L et d'un fibré de demi-formes δ , et un groupe de Lie G agissant sur M , L et δ en préservant toute la structure. Plus précisément, l'action sur L préserve la structure holomorphe, la métrique et la connexion et elle relève l'action de M . De plus, le carré de l'action sur δ est l'action naturelle sur le fibré canonique. Rappelons que l'action sur M admet alors un moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ déterminé par l'équation (1.2).

Supposons en outre que G est compact et que l'action sur le niveau nul du moment $N = \mu^{-1}(0)$ est libre. Alors le quotient symplectique $M//G$ est par définition la variété quotient N/G munie de la forme ω' qui se relève en la restriction de ω à N . De plus, $M//G$ a un fibré préquantifiant naturel L' , défini comme le fibré quotient $(L|_N)/G$ et muni de la connexion qui se relève en la restriction de la connexion de L à N .

Théorème 2.6.1 ([GS82], [HK07]). *Sous les hypothèses précédentes, le quotient symplectique $M//G$ admet une structure complexe compatible et un fibré*

de demi-forme δ' tels que pour k suffisamment grand, l'on ait un isomorphisme

$$V_k : H^0(M//G, \mathcal{O}((L')^k \otimes \delta')) \rightarrow [H^0(M, \mathcal{O}(L^k \otimes \delta))]^G$$

d'espaces vectoriels complexes.

Démonstration. L'action de G sur M préservant la structure complexe, elle s'étend de manière unique en une action holomorphe du complexifié $G^{\mathbb{C}}$ de G . Le lieu stable $M_s = G^{\mathbb{C}}.M$ est un ouvert de M , l'action de $G^{\mathbb{C}}$ sur M_s étant propre, le quotient $M_s/G^{\mathbb{C}}$ est une variété complexe. Chaque $G^{\mathbb{C}}$ -orbite de M_s intersecte P en une G -orbite. Par conséquent, $M_s/G^{\mathbb{C}}$ est en bijection avec $M//G$, ce qui munit le quotient symplectique d'une structure complexe compatible et en fait une variété kählérienne.

De même on étend l'action de G sur L en une action holomorphe de $G^{\mathbb{C}}$. Alors $L//G$ et $L|_{M_s}/G^{\mathbb{C}}$ sont isomorphes en tant que fibrés holomorphes et donc

$$H^0(M//G, \mathcal{O}((L//G)^k)) \simeq [H^0(M_s, \mathcal{O}(L^k))]^G.$$

D'autre part, le complémentaire du lieu stable est de codimension 1. Si k est positif, les sections holomorphes et G -équivariantes de $L^k \rightarrow M_s$ sont bornées, et par conséquent elles s'étendent à M , ce qui prouve que

$$[H^0(M_s, \mathcal{O}(L^k))]^G = [H^0(M, \mathcal{O}(L^k))]^G.$$

En combinant ces deux isomorphismes, on obtient le résultat démontré par V. Guillemin et S. Sternberg [GS82], à savoir que les sections holomorphes et G -équivariantes de L^k s'identifient aux sections holomorphes de $(L//G)^k$.

Pour inclure les fibrés de demi-formes [HK07], il faut observer que le quotient par $G^{\mathbb{C}}$ du fibré canonique K_M de M restreint à M_s est isomorphe au fibré canonique de $M//G$, l'isomorphisme étant induit par la contraction par le champs holomorphe et $G^{\mathbb{C}}$ -invariant γ défini par

$$\gamma = \frac{1}{2^\ell} (\xi_M^1 - ij\xi_M^1) \wedge \dots \wedge (\xi_M^\ell - ij\xi_M^\ell) \quad (2.6)$$

où ξ^1, \dots, ξ^ℓ est une base de l'algèbre de Lie de G .

De la sorte $\delta' := \delta|_{M_s}/G^{\mathbb{C}}$ est un fibré de demi-formes de $M//G$. Enfin si k est suffisamment grand, les sections holomorphes de $L^k \otimes \delta \rightarrow M_s$ sont bornées et s'identifient donc aux sections holomorphes sur M . Comme $\pi^*L' \simeq L|_{M_s}$ et $\pi^*\delta' \simeq \delta|_{M_s}$, l'on en déduit l'isomorphisme V_k tel que pour toute section holomorphe Ψ de $(L')^k \otimes \delta'$, $\pi^*\Psi$ est la restriction de $V_k\Psi$ au lieu stable. \square

Passons aux propriétés semi-classiques. Dans un premier résultat, on décrit le noyau au sens de Schwartz de l'isomorphisme V_k du théorème 2.6.1. Nous avons introduit une sous-variété lagrangienne Λ_G de $M \times \overline{M//G}$ et une section plate s_G de $L \boxtimes \overline{L}' \rightarrow \Lambda_G$ à la fin du chapitre 2.2.

Théorème 2.6.2 ([Cha06b], [Cha10d]). *Le noyau de (V_k) est un état lagrangien associée à (Λ_G, s_G) de symbole la section t_G de $\delta \boxtimes \overline{\delta}' \rightarrow \Lambda_G$ donnée par*

$$t_G(x, [x]) = u \otimes [u], \quad \forall x \in N, \forall u \in \delta_x \text{ tel que } |u| = 1.$$

Démonstration. Cela découle de la reformulation du théorème de Boutet de Monvel-Sjöstrand [BdMS76] donnée dans le théorème 2.2.3, en explicitant le noyau de V_k en fonction du noyau du projecteur de Szegö de $M//G$. \square

Un deuxième résultat concerne la réduction des opérateurs de Toeplitz. Ici la normalisation de l'isomorphisme V_k est importante. On munit G de la métrique invariante de mesure total 1, et on définit γ dans (2.6) en choisissant la base ξ^1, \dots, ξ^ℓ orthonormée. Dans la suite, ℓ désignera toujours la dimension de G .

Théorème 2.6.3 ([Cha06b], [Cha10d]). *Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz de M de symbole principal f_0 . Alors $((\frac{k}{2\pi})^{\ell/2} V_k^* T_k V_k)$ est un opérateur de Toeplitz de $M//G$ de symbole principal g_0 donné par*

$$g_0(z) = \int_{N_z} f_0(x) \mu_{N_z}(x), \quad \forall z \in M//G,$$

où μ_{N_z} est la mesure G -invariante de N_z de volume total 1. Si f_0 est G -invariante, le symbole sous-principal est

$$g_1(z) = \int_{N_z} f_1(x) \mu_N(x), \quad \forall z \in M//G,$$

où f_1 est le symbole sous-principal de (T_k) .

Un corollaire est que $(\frac{k}{2\pi})^{\ell/4} V_k$ est asymptotiquement unitaire en ce sens que

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\ell/2} V_k^* V_k = \text{id} + \mathcal{O}(k^{-1}).$$

Cette dernière propriété a été mise en évidence dans [HK07], et n'est pas vérifiée sans la correction métaplectique, ce qui avait été observé précédemment dans [Cha06b]. Au lieu de V_k , on peut travailler avec l'opérateur unitaire

$$U_k = V_k (V_k^* V_k)^{-\frac{1}{2}},$$

et les deux théorèmes précédents sont toujours vérifiés.

Démonstration. En suivant [Cha06b] on peut montrer en partie le théorème 2.6.3 en utilisant le symbole contravariant des opérateurs de Toeplitz. Etant donné $f \in C^\infty(M)$, on prouve qu'il existe un symbole $g(\cdot, k)$ de $M//G$ tel que

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\ell/2} V_k^* f V_k$$

soit l'opérateur de Toeplitz de $M//G$ de multiplicateur $g(\cdot, k)$. De manière équivalente, pour toutes sections holomorphes Ψ'_1, Ψ'_2 de $L'^k \otimes \delta'$

$$\langle f V_k \Psi'_1, V_k \Psi'_2 \rangle = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{-\frac{\ell}{2}} \langle g(\cdot, k) \Psi'_1, \Psi'_2 \rangle \quad (2.7)$$

Nous avons, en notant $\Psi_i = V_k \Psi'_i$ pour $i = 1, 2$,

$$\langle f V_k \Psi'_1, V_k \Psi'_2 \rangle = \int_M f(x) (\Psi_1, \Psi_2)(x) \mu_M(x)$$

Nous pouvons restreindre l'intégrale au lieu stable M_s car son complémentaire est de codimension 1. Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Alors $M_s \simeq N \times \mathfrak{g}$ par l'application qui envoie (y, ξ) sur $\exp(i\xi)y$. De plus, les sections Ψ_1 et Ψ_2 étant $G^{\mathbb{C}}$ -équivariantes,

$$(\Psi_1, \Psi_2)(\exp(i\xi)y) = e^{-k\varphi(y, \xi) - \varphi_c(y, \xi)} (\Psi_1, \Psi_2)(y), \quad y \in N, \xi \in \mathfrak{g}$$

avec $\varphi(y, \xi) = -\ln(\|\exp(i\xi).u\|^2)$ pour tout $u \in L_y$ de norme 1, et φ_c la fonction similaire définie avec le fibré de demi-formes. Pour tout $y \in N$, la fonction $\varphi(y, \cdot)$ de \mathfrak{g} est strictement convexe et atteint son minimum 0 en l'origine de \mathfrak{g} . De plus

$$\varphi(y, \xi) = g(\xi_M, \xi_M)(y) + \mathcal{O}(|\xi|^3) \quad (2.8)$$

avec pour g la métrique de M déterminée par la forme symplectique et la structure complexe, $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, j\cdot)$. Décomposons la mesure de Liouville de M en

$$\mu_M(y, \xi) = \delta(y, \xi) \mu_N(y) \otimes \mu_{\mathfrak{g}}(\xi)$$

avec μ_N la mesure G -invariante de N telle que $\pi_* \mu_N$ soit la mesure de Liouville de $M//G$ et $\mu_{\mathfrak{g}}$ la mesure de \mathfrak{g} déterminé par le produit scalaire invariant. Ici π est la projection de N sur $M//G$. Nous avons

$$\delta(y, 0) = V(y) \quad (2.9)$$

où $V(y)$ est le déterminant de $g(\xi_M^i, \xi_M^j)(y)$ si ξ^1, \dots, ξ^ℓ est une base orthonormée de \mathfrak{g} .

En intégrant sur \mathfrak{g} et en appliquant le lemme de la phase stationnaire, il vient

$$\int_{N \times \mathfrak{g}} f(x)(\Psi_1, \Psi_2)(x) \mu_M(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{-\ell/2} \int_N f'(y, k)(\Psi_1, \Psi_2)(y) \mu_N(y)$$

avec

$$f'(y, k) = \delta(y, 0) f(y) 2^{-\frac{\ell}{2}} V(y)^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(k^{-1}) \quad \text{d'après (2.8)}$$

$$= f(y) 2^{-\frac{\ell}{2}} V(y)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(k^{-1}) \quad \text{d'après (2.9)}$$

De plus, avec l'isomorphisme induit par γ défini en (2.6), pour tout $u \in \delta_y$,

$$\|u\|^2 = \|\gamma(y)\|^{-1} \|[u]\|^2 = 2^{\frac{\ell}{2}} V(y)^{-\frac{1}{2}} \|[u]\|^2$$

Par conséquent, on obtient le résultat souhaité (2.7) avec la fonction

$$\begin{aligned} g(z, k) &= 2^{\frac{\ell}{2}} \int_{P_z} V(y)^{-\frac{1}{2}} f'(y, k) \mu_{N_z}(y) \\ &= \int_{P_z} f(y) \mu_{N_z}(y) + \mathcal{O}(k^{-1}). \end{aligned}$$

Malheureusement, cette preuve très simple ne permet pas de calculer le symbole sous-principal de l'opérateur réduit. Ébauchons une autre preuve extraite de [Cha10d] qui permet de tout démontrer.

Tout d'abord, considérons deux opérateurs

$$Q_k, Q'_k : H^0(M//G, \mathcal{O}((L')^k \otimes \delta')) \rightarrow H^0(M, \mathcal{O}(L^k \otimes \delta))$$

dont les noyaux au sens de Schwartz sont des états lagrangiens associés à (Λ_G, s_G) d'ordre $s = n_r + \ell/4$ et de symboles principaux ft_G et $f't_G$ respectivement. Ici n_r est la dimension complexe de $M//G$. Alors $(Q_k^* Q'_k)$ est un opérateur de Toeplitz de $M//G$ de symbole principal la fonction g donnée par

$$g(z) = \int_{N_z} f(y) f'(y) \mu_{N_z}(y), \quad z \in M//G.$$

Pour l'intégrale on a identifié le domaine de définition Λ_G des fonctions f et f' avec P par projection sur le premier facteur. Dans le cas où G est trivial, ce résultat est la composition des opérateurs de Toeplitz de $M = M//G$. En général, le noyau de $Q_k^* Q'_k$ s'obtient en intégrant le produit des noyaux de Q_k^* et Q'_k sur $M_s = N \times \mathfrak{g}$. L'intégrale sur \mathfrak{g} se calcule comme dans la

première partie de la preuve, l'intégrale sur N descend en une intégrale sur $M//G$ et se ramène à une composition d'opérateurs de Toeplitz.

Considérons de plus deux opérateurs de Toeplitz (T_k) et (T'_k) de M et $M//G$ respectivement et de symboles principaux h_0 et h'_0 . Alors le noyau de $(T_k Q_k T'_k)$ est un état lagrangien associé à (Λ_G, s_G) , d'ordre s et de symbole principal

$$(y, z) \rightarrow h_0(y) f(y, z) h'_0(z) t_G(x, z).$$

Supposons de plus que h_0 est G -invariante et que sa restriction à N se factorise par h'_0 . Alors $T_k Q_k - Q_k T'_k$ est d'ordre $s-1$ avec pour symbole principal

$$(y, z) \rightarrow ((h_1(y) - h'_1(z)) f(y, z) + (\mathcal{L}_X f)(y, z)) t_G(y, z).$$

où h_1 et h'_1 sont les symboles sous-principaux de (T_k) et (T'_k) respectivement et X est le champ hamiltonien de h_0 . Ce dernier résultat est en fait un cas particulier du théorème 2.2.2. \square

2.7 Espaces de polygones

Un exemple remarquable où l'on peut appliquer les résultats précédents est fourni par la quantification des espaces de polygones. Ces espaces sont des variétés symplectiques naturellement munies de systèmes de coordonnées action-angles. Leur quantification se décrit explicitement en utilisant les représentations de $SU(2)$. On quantifiant les coordonnées d'action, on obtient des systèmes intégrables quantiques composés d'opérateurs de Toeplitz. Les états propres joints sont des états lagrangiens et en estimant leur produit scalaire on retrouve l'asymptotique des $6j$ symboles. Enfin ces espaces sont des "toy models" pour les espaces de modules de fibrés plats auxquels sont consacrés les deux derniers chapitres de ce mémoire.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Soit n un entier ≥ 1 et $\ell \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Introduisons \mathcal{P}_ℓ l'espace des polygones de E à isométries près, comportant n côtés dont les longueurs sont respectivement ℓ_1, \dots, ℓ_n . Précisément, il s'agit du quotient

$$\mathcal{P}_\ell = \{(x_i) \in E^n / x_1 + \dots + x_n = 0, |x_i| = \ell_i, \forall i\} / SO(3)$$

où $SO(3)$ agit diagonalement. Supposons que le plus grand des ℓ_i est inférieur à $\frac{1}{2}(\ell_1 + \dots + \ell_n)$ de sorte que \mathcal{P}_ℓ ne soit pas vide. Supposons en outre que ℓ est générique, i.e. que $\sum_{i=1}^n \pm \ell_i \neq 0$ pour tous les choix de signes possibles, de sorte que \mathcal{P}_ℓ soit une variété lisse de dimension $2(n-3)$ (les hypothèses

précédentes imposent que $n \geq 3$). \mathcal{P}_ℓ est naturellement une variété symplectique. En effet, si S_m désigne la sphère de volume $2\pi m$ munie de l'action usuelle de $SO(3)$, \mathcal{P}_ℓ est le quotient symplectique

$$\mathcal{P}_\ell = (S_{\ell_1} \times \dots \times S_{\ell_n}) // SO(3).$$

A noter que \mathcal{P}_ℓ hérite de la sorte d'une structure complexe qui en fait une variété kählerienne. De plus, une simple application du théorème de Guillemin et Sternberg permet de réaliser explicitement la quantification de \mathcal{P}_ℓ . Pour cela, notons V_m la représentation irréductible de $SU(2)$ de dimension m . D'après la méthode des orbites, V_m est la quantification kählerienne de S_m . Donc si les ℓ_i sont entiers, \mathcal{P}_ℓ admet un fibré préquantifiant L_ℓ et

$$H^0(\mathcal{P}_\ell, L_\ell) \simeq (V_{\ell_1} \otimes \dots \otimes V_{\ell_n})^{SU(2)} =: Q(\ell)$$

d'après le théorème 2.6.1.

Pour comprendre la géométrie des espaces \mathcal{P}_ℓ , il est naturel de décomposer les polygones selon leurs diagonales. Par exemple, supposons $n = 4$. Alors chaque quadrilatère $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ donne deux triangles $[x_1, x_2, -x_1 - x_2]$ et $[x_1 + x_2, x_3, x_4]$. On peut se convaincre de la sorte que \mathcal{P}_ℓ est une sphère de dimension 2. Pour cela on définit une fonction hauteur h et une coordonnée angulaire θ sur \mathcal{P}_ℓ par $h([x_1, x_2, x_3, x_4]) = |x_1 + x_2|$ et $\theta([x_1, x_2, x_3, x_4]) =$ l'angle dièdre entre les plans engendrés respectivement par x_1, x_2 et x_3, x_4 . A noter que θ est définie partout sauf en deux points où h atteint son maximum et minimum. Il se trouve aussi que (θ, h) sont des coordonnées action-angles, c'est à dire que la forme symplectique de \mathcal{P}_ℓ est $d\theta \wedge dh$.

Plus généralement, pour n quelconque et $1 < p < n$, définissons la fonction $\lambda_p : \mathcal{P}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $[x_i]$ sur $|x_1 + \dots + x_p|$. Soient $\ell' = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ et $\ell'' = (\ell_{p+1}, \dots, \ell_n)$. Alors les valeurs régulières de λ_p sont les $m > 0$ tel que (ℓ', m) et (m, ℓ'') soient génériques. Pour une telle valeur, nous avons une fibration principale

$$\lambda_p^{-1}(m) \rightarrow \mathcal{P}_{(\ell', m)} \times \mathcal{P}_{(m, \ell'')} \quad (2.10)$$

de groupe de structure le cercle qui agit par

$$t \in \mathbb{R}/2\pi Z, \quad [x_i] \rightarrow [R_t x_1, \dots, R_t x_p, x_{p+1}, \dots, x_n]$$

où R_t est la rotation de E d'axe $x_1 + \dots + x_p$ et d'angle t . Cette action de cercle n'est autre que le flot hamiltonien de λ_p , on l'appelle le flot de pliage. De plus les fonctions $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ Poisson commutent. Elles engendrent une

action hamiltonienne de tore sur un ouvert dense et forment un système de coordonnées actions, découvertes par M. Kapovich et J. Millson [KM95].

En général, cette action hamiltonienne ne se prolonge pas à \mathcal{P}_ℓ . En effet, si c'était le cas, on aurait une variété torique, et toutes les fibres de l'application moment $\mu = (\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ seraient des tores. Or ceci est faux pour certains choix de ℓ et fibres $\mu^{-1}(\xi)$ où ξ appartient au bord de l'image de μ .

Supposons à présent que les ℓ_i sont entiers et que nous pouvons définir les $Q(\ell)$ comme ci-dessus. Soit H_p l'endomorphisme de $Q(\ell)$ défini comme la restriction du Casimir de $V_{\ell_1} \otimes \dots \otimes V_{\ell_n}$ provenant de la représentation

$$g.(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = (gv_1 \otimes \dots \otimes gv_p \otimes v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_n)$$

Alors la décomposition en sous-espace propre de H_p donne un isomorphisme :

$$Q(\ell) \simeq \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} Q(\ell', m) \otimes Q(m, \ell''). \quad (2.11)$$

De plus les opérateurs H_2, \dots, H_{n-1} commutent deux à deux et leurs espaces propres joints sont de dimension 1. Autrement dit, nous avons un système complet d'observables.

Dans le dictionnaire semi-classique qui met en correspondance la mécanique quantique et la mécanique classique, la décomposition (2.11) se traduit par la fibration (2.10), et les systèmes complets d'observables correspondent au systèmes de coordonnées action-angles. On peut aussi rapprocher le polytope moment $\mu(\mathcal{P}_\ell) \subset \mathbb{R}^{n-3}$ du spectre joint de (H_2, \dots, H_{n-2}) . En effet, ce spectre est

$$\{(\Delta_{d_2}, \dots, \Delta_{d_{n-2}}) / d \in L \cap \mu(\mathcal{P}_\ell)\} \quad (2.12)$$

où L est un certain réseau de \mathbb{R}^{n-3} et $\Delta_m = m(m+2)$ est la valeur du Casimir dans la représentation irréductible V_m .

Pour toutes ces raisons, il semble clair que les opérateurs H_p quantifient les observables classiques $\lambda_p(\lambda_p + 2)$. On donne à cette assertion le sens semi-classique suivant :

Théorème 2.7.1 ([Cha10d]). *La famille $(k^{-2}H_p : Q(k\ell) \rightarrow Q(k\ell), k \in \mathbb{N})$ est un opérateur de Toeplitz de symbole principal λ_p^2 .*

L'énoncé est bien en accord avec la description précédente du spectre (2.12), car $k^{-2}\Delta_d = d^2 + \mathcal{O}(k^{-1})$.

Démonstration. Tout d'abord, $\mathcal{P}_{k\ell}$ et \mathcal{P}_ℓ sont en bijection par l'homothétie de rapport k . Les structures complexes sont les mêmes et $L_{k\ell} = L_\ell^k$. Ainsi

$$Q(k\ell) \simeq H^0(\mathcal{P}_\ell, L^k)$$

et l'énoncé du théorème a bien du sens. Soit $C_{p,\ell}$ le Casimir de $V_{\ell_1} \otimes \dots \otimes V_{\ell_n}$ provenant de la représentation diagonale sur les p premiers facteurs. D'après le chapitre 2.1.4, la famille $(C_{p,k\ell}, k \in \mathbb{N})$ est un opérateur de Toeplitz. Le résultat final découle alors du théorème 2.6.3 par réduction symplectique. \square

Une conséquence de ce théorème est que les vecteurs propres joints de la famille (H_2, \dots, H_{n-1}) forment une famille d'états lagrangiens associé à la fibration μ . Pour le cas des quadrilatères ($n = 4$), on en déduit le comportement asymptotique des $6j$ symboles. Expliquons cela. Notons H et H' les restrictions à $Q(\ell)$ des Casimir associés aux représentations :

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = gv_1 \otimes gv_2 \otimes v_3 \otimes v_4,$$

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = v_1 \otimes gv_2 \otimes gv_3 \otimes v_4,$$

Introduisons deux bases de vecteurs propres

$$H\Psi_{\ell,d} = \Delta_d\Psi_{\ell,d}, \quad H'\Psi_{\ell,d} = \Delta_d\Psi'_{\ell,d}$$

On suppose tous ces vecteurs de norme 1. Les $6j$ -symboles sont les coefficients de la matrice de changement de bases,

$$\tau(\ell, d, d') := \langle \Psi_{\ell,d}, \Psi'_{\ell,d'} \rangle$$

Ils dépendent des 6 paramètres $m = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, d, d')$. Notons λ et λ' les fonctions de \mathcal{P}_ℓ qui envoient (x_1, x_2, x_3, x_4) sur $|x_1 + x_2|$ et $|x_2 + x_3|$. Alors comme conséquence du théorème 2.7.1, la suite $(\Psi_{k\ell, kd} \in H^0(\mathcal{P}_\ell, L_\ell^k), k \in \mathbb{N})$ se concentre sur $\lambda^{-1}(d)$ en ce sens qu'elle est $\mathcal{O}(k^{-\infty})$ sur tout compact qui ne rencontre pas $\lambda^{-1}(d)$. On a un résultat similaire pour la base propre de H' . On en déduit que si d et d' sont tels que $\lambda^{-1}(d)$ n'intersecte pas $(\lambda')^{-1}(d')$, alors

$$\tau(km) = \mathcal{O}(k^{-\infty}).$$

Supposons à présent que $\lambda^{-1}(d)$ et $(\lambda')^{-1}(d')$ s'intersectent transversalement. Alors on déduit des théorèmes 2.3.1 et 2.3.3 que

$$\tau(km - \mathbf{1}) = C_k k^{-1/2} \sum_{x \in \lambda^{-1}(d) \cap (\lambda')^{-1}(d')} \frac{e^{ikA_x + in_x \pi/4}}{\sqrt{|\{\lambda, \lambda'\}(x)|}} + \mathcal{O}(k^{-1/2})$$

où les C_k sont des nombres complexes de module 1, les n_x sont des entiers et les A_x sont des aires symplectiques que l'on peut déterminer comme suit. Soient x et x' les deux points de l'intersection, alors la différence de A_x et $A_{x'}$ est l'aire du domaine de \mathcal{P}_ℓ bordé par deux chemins d'extrémité x et x' compris dans $\lambda^{-1}(d)$ et $(\lambda')^{-1}(d')$ respectivement. Pour réaliser ce calcul, il faut bien sûr introduire une correction métaplectique. C'est pour cette raison que km a été translaté de $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Les détails se trouvent dans l'article [Cha10d].

On peut déterminer explicitement les aires et le crochet de Poisson. On retrouve alors la formule de J. Roberts [Rob99]

$$\tau(km - \mathbf{1}) \simeq C'_k \sqrt{\frac{2}{3\pi}} k^{-1/2} \left(\frac{dd'}{V} \right)^{1/2} \cos(k\theta/2 + \pi/4)$$

avec C'_k des complexes de module 1, V l'aire du tétraèdre de longueur $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, d, d'$ et

$$\theta = \alpha d + \alpha' d' + \sum_{i=1, \dots, 4} \alpha_i d_i$$

où $\alpha, \alpha', \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les angles dièdres de ce tétraèdre.

Chapitre 3

Théorie quantique des champs de Chern-Simons

Dans ce chapitre, j'introduis les théories quantiques de champs (tqft) de dimension 2+3. L'idée de E. Witten est de quantifier les espaces de modules de fibrés plats sur les surfaces. Après avoir rappelé cette construction, je présente à la version mathématiquement rigoureuse due à N. Reshetikhin et V. Turaev, puis brièvement la version géométrique basées sur la théorie des blocs conformes.

3.1 Espaces de modules de fibrés

Soit G le groupe de Lie $SU(2)$ ¹. Pour toute variété compacte M , on considère l'espace des modules $\mathcal{M}(M)$, qui est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés plats principaux de base M et de groupe de structure G . $\mathcal{M}(M)$ s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaisons de morphismes du groupe fondamental de M dans G , le morphisme associé à un fibré P étant sa représentation d'holonomie. En utilisant que $\pi_1(M)$ est finiment engendré, on munit $\mathcal{M}(M)$ d'une structure de variété algébrique de dimension finie. Pour tout fibré G -principal plat $P \rightarrow M$, l'espace tangent de Zariski à $\mathcal{M}(M)$ en $[P]$ s'identifie naturellement au premier groupe de cohomologie

$$T_{[P]}\mathcal{M}(M) = H^1(M, \text{Ad } P)$$

du complexe de de Rham de M à coefficients dans le fibré vectoriel plat $\text{Ad } P$ associé à P par la représentation adjointe de G .

1. Une grande partie de ce qui suit se généralise à tout groupe de Lie compact simple et simplement connexe, mais la théorie pour $SU(2)$ est suffisamment intéressante

On se place désormais en dimension $2+1$, c'est-à-dire que l'on considère d'une part des surfaces fermées et d'autre part des variétés compactes de dimension 3 éventuellement à bord. On supposera toujours ces variétés orientées. Les espaces de modules associés ont des structures naturelles relevant de la géométrie symplectique. Ainsi, pour toute surface fermée Σ , $\mathcal{M}(\Sigma)$ admet une forme symplectique ω donnée en $[P]$ par

$$\omega_{[P]}([a], [b]) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{tr}(ab) \quad a, b \in \Omega^1(\Sigma, \text{Ad } P).$$

En particulier, si Σ est une sphère, $\mathcal{M}(\Sigma)$ est réduit à un point. Si Σ est un tore, $\mathcal{M}(\Sigma) = T^2/W$, où T est un tore maximal de G et W le groupe de Weyl qui agit diagonalement. Comme ici, $G = SU(2)$, il s'agit d'une sphère avec 4 points singuliers, que l'on appelle l'oreiller, cf. figure 4.1. Enfin si le genre de Σ est ≥ 2 , les points lisses de $\mathcal{M}(\Sigma)$ sont les classes de fibrés irréductibles, c'est à dire les $[P]$ tels que $H^0(\Sigma, \text{Ad } P) = 0$.

Considérons à présent une variété compacte M de dimension 3 de bord Σ . Alors l'application de restriction

$$r : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$$

a une image lagrangienne, en ce sens que pour tout $x \in \mathcal{M}(M)$, $T_x r(T_x \mathcal{M}(M))$ est un sous-espace lagrangien de $T_{r(x)} \mathcal{M}(\Sigma)$. Hormis cela on sait peu de chose des espaces de modules associés aux variétés de dimension 3. Par exemple, je ne connais pas de caractérisation des points singuliers, ou simplement une condition suffisante pour qu'un point soit lisse. Le cas des complémentaires de noeud dans S^3 a été beaucoup étudié. Il arrive que les fibres génériques de r soient de dimension strictement positive. Par exemple, cela a été montré pour les noeuds périphériques par E.P. Klassen [Kla91]. D'autre part, il découle de la théorie de M. Culler et P.B. Shalen [CS83], que lorsque M est petite, c'est à dire ne contient pas de surfaces incompressibles, les composantes irréductibles de $\mathcal{M}(M)$ sont de dimension la moitié de la dimension de $\mathcal{M}(\Sigma)$.

3.2 Une quantification de l'espace des modules

La théorie quantique des champs topologique (tqft) est une quantification des espaces de modules introduits dans le chapitre précédent. Ainsi une tqft associe à toute surface fermée Σ un espace de Hilbert $V(\Sigma)$, et à toute variété compacte M de bord Σ un vecteur $Z(M)$ de $V(\Sigma)$. On définira aussi $Z(M)$ lorsque M est fermée avec la convention que $V(\emptyset) = \mathbb{C}$, autrement

dit $Z(M)$ est un nombre complexe. Bien entendu, on demande que $Z(M)$ soit un invariant topologique, c'est-à-dire que si M et M' ont même bord Σ et qu'il existe un difféomorphisme de M dans M' étendant l'identité de Σ , alors $Z(M) = Z(M')$.

On souhaite que les propriétés vérifiées par les espace de modules se reflètent dans la quantification. Ainsi, $\mathcal{M}(\Sigma)$ étant compact, on s'attend à ce que $V(\Sigma)$ soit de dimension finie. De plus, si Σ^- désigne la surface Σ munie de l'orientation opposée, $\mathcal{M}(\Sigma^-)$ étant la variété $\mathcal{M}(\Sigma)$ munie de la forme symplectique opposée, on demande que $V(\Sigma^-)$ soit naturellement isomorphe au dual de $V(\Sigma)$, et donc si en prend en compte la structure hermitienne,

$$V(\Sigma^-) \simeq V(\Sigma)^* \simeq \overline{V(\Sigma)}.$$

De même, comme $\mathcal{M}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ s'identifie au produit $\mathcal{M}(\Sigma_1) \times \mathcal{M}(\Sigma_2)$, on demande que

$$V(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \simeq V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2). \quad (3.1)$$

Ces isomorphismes doivent être compatibles avec les vecteurs associés aux 3-variétés, en ce sens que pour tout M de bord Σ ,

$$Z(M^-) = \overline{Z(M)}$$

et pour tout M_1 et M_2 de bords respectifs Σ_1 et Σ_2 ,

$$Z(M_1 \cup M_2) = Z(M_1) \otimes Z(M_2).$$

Enfin, considérons deux variétés M_1 et M_2 de même bord Σ et formons la variété M en recollant M_1 et M_2^- le long de Σ . On demande alors que

$$Z(M) = \langle Z(M_1), Z(M_2) \rangle_{V(\Sigma)}, \quad (3.2)$$

ceci car les fibrés plats G -principaux de M correspondent aux fibrés de Σ qui s'étendent à la fois à M_1 et M_2 , plus précisément $\mathcal{M}(M)$ est le produit fibré de $\mathcal{M}(M_1) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$ et $\mathcal{M}(M_2) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$.

Plus généralement, on peut supposer que les bords de M_1 et M_2 partagent une composante connexe Σ et former la variété M en recollant le long de Σ . L'on demande alors que l'équation (4.4) soit vérifiée, le produit scalaire ayant du sens d'après (3.1). En particulier, en associant à un difféomorphisme de surface son cylindre d'application, on définit pour toute surface Σ un représentation du groupe $\text{Diff}^+(\Sigma)$ des difféomorphismes préservant l'orientation par des transformation unitaires de $V(\Sigma)$. Comme les $Z(M)$ sont des invariants topologiques, cette représentation se factorise en une représentation du groupe modulaire de Σ .

3.3 La construction de E. Witten

E. Witten construit une tqft, en définissant les $V(\Sigma)$ par quantification kählerienne des $\mathcal{M}(\Sigma)$ et les $Z(M)$ comme des fonctions de partitions pour l'action de Chern-Simons. Expliquons cela. Pour distinguer ces objets de ceux définis ensuite par les topologues, je les noterai avec un W en exposant.

Ces définitions dépendent d'un paramètre entier noté k , très important pour nous. En effet la limite semi-classique correspond aux grandes valeurs de k . Pour commencer, si M est sans bord, $Z_k^W(M) \in \mathbb{C}$ est donné par l'intégrale fonctionnelle

$$Z_k^W(M) = \int_{\mathcal{A}(M)} e^{ik \text{CS}(a)} \mu(a) \quad (3.3)$$

où $\mathcal{A}(M) = \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ et la fonctionnelle de Chern-Simons $\text{CS} : \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$\text{CS}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr}(da \wedge a + \frac{2}{3}a^3). \quad (3.4)$$

Précisons tout de suite que μ est une hypothétique mesure sur l'espace de dimension infinie $\mathcal{A}(M)$. Pour comprendre la relation avec $\mathcal{M}(M)$, considérons $\mathcal{A}(M)$ comme l'ensemble des connexions du fibré G -principal trivial de base M . Alors le groupe des transformations de jauge $G(M) = \mathcal{C}^\infty(M, G)$ agit naturellement sur $\mathcal{A}(M)$, et la fonctionnelle de Chern-Simons est invariante par cette action modulo $2\pi\mathbb{Z}$. Il faut d'ailleurs considérer (3.3) comme une intégrale sur le quotient de $\mathcal{A}(M)$ par l'action de jauge, quotient qui reste malheureusement de dimension infinie. De plus la différentielle de l'action de Chern-Simons est l'application de courbure. Par conséquent dans la limite semi-classique, les classes de jauge qui contribuent le plus à (3.3) sont celle des connexions plates. Enfin, le quotient de l'ensemble des connexions plates par l'action de jauge n'est autre que l'espace de modules $\mathcal{M}(M)$.

Passons à présent au cas où le bord de M est une surface Σ non vide. Pour introduire un fibré préquantifiant et une structure complexe sur $\mathcal{M}(\Sigma)$, présentons $\mathcal{M}(\Sigma)$ comme un quotient symplectique de l'espace $\mathcal{A}(\Sigma) = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$. Cet espace est de dimension infinie, néanmoins on le traitera formellement comme s'il s'agissait d'un brave variété de dimension finie. On donne d'ailleurs un sens parfaitement rigoureux à ce qui suit, quitte à introduire des variétés modelées sur des Banach. On munit $\mathcal{A}(\Sigma)$ du produit symplectique

$$\omega(a, b) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \text{tr}(a.b)$$

Le groupe des transformations de jauge $G(\Sigma) = \mathcal{C}^\infty(\Sigma, G)$ agit alors de manière hamiltonienne sur $\mathcal{A}(\Sigma)$, le moment étant donné par l'application de courbure. Donc $\mathcal{A}(\Sigma)//G(\Sigma)$ est le quotient de l'ensemble des connexions plates par l'action de jauge et s'identifie à $\mathcal{M}(\Sigma)$. Considérons à présent une structure complexe j de Σ . Alors l'application $\alpha \rightarrow \alpha \circ j$ est une structure complexe de $\mathcal{A}(\Sigma)$ compatible avec la structure symplectique et qui descend par réduction symplectique à $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Comme pour la réduction symplectique d'une variété kählerienne de dimension finie, on peut complexifier le groupe de jauge, son action, et présenter de la sorte $\mathcal{M}(\Sigma)$ comme un quotient holomorphe. On retrouve ainsi le théorème de Narasimhan-Seshadri, comme quoi $\mathcal{M}(\Sigma)$ s'identifie à un espace de modules de fibrés stables holomorphes. Ce point de vue est dû à M.F. Atiyah et R. Bott [AB83].

Considérons maintenant le fibré trivial $L = \mathcal{A}(\Sigma) \times \mathbb{C}$ muni de la connexion $d + \frac{1}{i}\alpha$ où $\alpha_a(b) = \frac{1}{2}\omega(a, b)$. On montre que l'action de $G(\Sigma)$ se relève à L de manière compatible avec le moment (cf. équation (1.2)), et donc par réduction symplectique L descend en un fibré préquantifiant $L_{CS} \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$. Cette construction est due à T. Ramadas, I. Singer et J. Weitsman [RSW89]. Le fibré L_{CS} s'appelle fibré de Chern-Simons pour la raison suivante. Si M une variété de dimension 3 de bord Σ , l'application qui envoie $a \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ sur $\exp(iCS(a))$ est une section équivariante du pull-back de L par la restriction $\mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(\Sigma)$.

$\mathcal{M}(\Sigma)$ est donc une variété kählerienne munie d'un fibré préquantifiant. Nous définissons alors $V_k^W(\Sigma)$ comme l'espace des sections holomorphes de L_{CS}^k . De manière équivalente, si l'on croit à la généralisation du théorème 2.6.1 en dimension infinie, il s'agit de l'espace des sections holomorphes $G(\Sigma)$ -invariantes de L^k . Si l'on considère $Z_k^W(M)$ comme une telle section, celle-ci est définie par

$$Z_k^W(M)(a) = \int_{\{b \in \mathcal{A}(M) / b|_{\Sigma} = a\}} e^{ikCS(b)} \mu_a(b), \quad a \in \mathcal{A}(\Sigma).$$

Cette intégrale n'a pas plus de sens que n'avait (3.3). Néanmoins, si l'on s'autorise à manipuler ces intégrales comme si elles étaient bien définies, on déduit toutes les propriétés souhaitées, entre autre l'égalité de recollement (3.2) découle du théorème de Fubini.

Ces définitions étant, E. Witten décrit d'une part le comportement asymptotique de $Z_k^W(M)$ pour M fermée et d'autre part il calcule $Z_k^W(M)$ en présentant M par chirurgie. Expliquons cela. Comme je l'ai écrit plus haut, les points critiques de la fonctionnelle de Chern-Simons sont les connexions

plates. Par une application formelle du lemme de la phase stationnaire, on montre que si M est fermée,

$$Z_k^W(M) \sim \sum_{\rho \in \mathcal{M}(M)} e^{i\eta(\rho)} |\tau(\rho)|^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi k \text{CS}(\rho)} \quad (3.5)$$

$\eta(\rho)$ et $\tau(\rho)$ sont respectivement l'invariant eta de Atiya-Patodi-Singer et la torsion analytique de Ray-Singer du fibré vectoriel plat associé à ρ par la représentation adjointe. A noter que si la torsion est bien un invariant du fibré plat, l'invariant eta dépend du choix d'une métrique sur M . Witten explique comment on peut modifier la fonction de partition pour corriger ce défaut, l'invariant eta est alors remplacé par un flot spectral.

Pour ce qui est du calcul des $Z_k^W(M)$, E. Witten utilise deux ingrédients. D'une part il étend toutes ses définitions au cas où les variétés M contiennent des entrelacs et les surfaces ont des points marqués. Par exemple si K est un noeud d'une variété M fermée,

$$Z_k^W(M, K) = \int_{\mathcal{A}(M)} e^{ik \text{CS}(a)} \text{tr}(\text{Hol}_K(a)) \mu(a)$$

où $\text{Hol}_K(a) \in SU(2)$ désigne l'holonomie de K pour la connexion a . D'autre part, E. Witten reconnaît dans la définition des $V_k^W(\Sigma)$ un espace de blocs conformes $V_k^{\text{con}}(\Sigma)$. Il suppose alors que la représentation du groupe modulaire de Σ dans $V_k^{\text{con}}(\Sigma)$ définie par la théorie conforme des champs est la même que celle donnée par les Z_k^W des mapping cylindres. De cela, il déduit comment se modifie $Z_k^W(M, K)$ lorsqu'on change un croisement de K (relations de Kauffman) ou bien lorsqu'on change M par une chirurgie sur un noeud (couleur de Kirby). Comme toute variété compacte fermée de dimension 3 s'obtient par une chirurgie sur un entrelacs de la sphère, on trouve $Z_k^W(M, K)$. En particulier

$$Z_k(S^3, K) = \sqrt{\frac{2}{k}} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) J^K(-e^{i\pi/2k})$$

où J^K est le polynôme de Jones de K . Ce calcul est à la base de la définition de l'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev adoptée ensuite par les topologues.

Ainsi cette théorie, qui est certes heuristique, fait le lien entre polynômes de Jones, la quantification kählerienne des espaces de fibrés et les théories conformes des champs. De plus, sa limite semi-classique met en jeu les invariants de Chern-Simons et la torsion. J'explique dans les chapitres suivants les développements mathématiques qui ont suivis.

3.4 L'approche des topologues

N. Reshetikhin et V. Turaev [RT91] donnent une définition mathématiquement rigoureuse de la tqft à l'aide des représentations des groupes quantiques. Pour les groupes de rang 2, cette approche a été simplifiée ensuite par W. Lickorish [Lic91], C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum et P. Vogel [BHMV95] en utilisant les modules skein de Kauffman. C'est cette dernière construction que nous avons utilisée avec J. Marché dans nos travaux sur les conjectures de Witten. Pour appréhender la nature combinatoire de ces TQFTs, rappelons brièvement cette théorie.

Polynômes de Jones coloriés des noeuds

On définit pour commencer pour tout entrelacs en bande L de S^3 le *crochet de Kauffman* $\langle L \rangle \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$. Ces crochets sont caractérisées par les relations skein données dans la figure 3.1 et la normalisation $\langle \emptyset \rangle = 1$. Ainsi,

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = t \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} + t^{-1} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \\
 \bigcirc = -(t^2 + t^{-2}) \emptyset
 \end{array}$$

FIGURE 3.1 – Relations skein de Kauffman

pour calculer $\langle L \rangle$ à partir de ces relations, il suffit de projeter L sur un plan, appliquer la première relation skein à chaque croisement, puis la seconde relation autant de fois que nécessaire pour se ramener à l'entrelacs vide. Il faut ensuite vérifier que le résultat ne dépend pas de la projection, ce qui découle du théorème de Reidemeister.

Introduisons ensuite les *polynômes de Jones coloriés* d'un noeud en bande K de S^3 . Pour tout polynôme à coefficients complexes $P(X) = \sum a_i X^i$, on note $\langle P(K) \rangle$ le polynôme $\sum a_i \langle K^i \rangle \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ où K^i est l'entrelacs formé de i copies parallèles de K . Soient T_ℓ , $\ell \in \mathbb{Z}$ les polynômes de Tchebichev définis par la relation de récurrence $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_{\ell+1} + XT_\ell + T_{\ell-1} = 0$. Le ℓ -ième polynôme de Jones colorié de K est alors

$$J_\ell^K(t) := \langle T_\ell(K) \rangle.$$

Avec cette normalisation, les polynômes de Jones du noeud trivial sont les entiers quantiques

$$J_\ell^\circ(t) = [\ell] = \frac{t^{2\ell} - t^{-2\ell}}{t^2 - t^{-2}}$$

Si maintenant L est un entrelacs avec n composantes numérotées de 1 à n , on définit pour tout polynôme $P(X_1, \dots, X_n) = \sum a_\alpha X^\alpha$, le crochet de Kauffman $\langle P(L) \rangle := \sum a_\alpha \langle L^\alpha \rangle$ où L^α est l'entrelacs obtenu en remplaçant la k -ième composante de L par $\alpha(k)$ copies parallèles. Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^n$, le ℓ -ième polynôme de Jones colorié de L est alors

$$J_\ell^L(t) := \langle T_\ell(L) \rangle$$

avec $T_\ell(X_1, \dots, X_n) = T_{\ell_1}(X_1) \dots T_{\ell_n}(X_n)$.

Invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev

Définissons à présent l'invariant d'une variété fermée M . Nous savons qu'une telle variété s'obtient à partir de S^3 par une chirurgie sur un entrelacs en bande L bien choisie. On numérote les composantes connexes de L de 1 à n et on pose

$$Z_k(M) = \left(\frac{\sqrt{2} \sin(\pi/k)}{k^{1/2}} \right)^{1+n} \tau_k^{\text{sgn}(A_L)} \sum_{\ell \in \{1, \dots, k-1\}^n} \left([\ell]! J_\ell^L \right)_{t=-e^{i\pi/2k}}$$

Ici $[\ell]!$ est le produit de factoriels quantiques $[\ell_1]! \dots [\ell_n]!$, A_L est la matrice d'enlacement de L et

$$\tau_k = e^{3i\pi/4 - 3i\pi/2k}.$$

On montre ensuite avec le théorème de Kirby que l'invariant ne dépend pas du choix de L mais seulement de M . Plus généralement, si K est un entrelacs de M colorié par $c : \pi_0(K) \rightarrow \{1, \dots, k-1\}$, on définit l'invariant $Z_k(M, K, c) \in \mathbb{C}$ en remplaçant dans la formule précédente J_ℓ^L par $J_{\ell, c}^{L \cup K}$. En particulier si M est la sphère,

$$Z_k(S^3, K, c) := \sqrt{\frac{2}{k}} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) J_c^K(-e^{i\pi/2k}).$$

Invariants des variétés à bord

Passons à présent aux surfaces et aux variétés à bord. Soit Σ une surface fermée. Pour toute variété M de bord Σ , introduisons l'espace vectoriel complexe $\mathcal{V}_k(\Sigma, M)$ engendré par les classes d'isotopies d'entrelacs coloriés (L, c)

de M . On définit $V_k(\Sigma, M)$ comme étant le quotient de $\mathcal{V}_k(\Sigma, M)$ par le radical de la forme hermitienne positive de $\mathcal{V}_k(\Sigma, M)$ donnée sur les générateurs par

$$(L_1, c_1), (L_2, c_2) \rightarrow Z_k(M \cup_\Sigma M^-, L_1 \sqcup L_2, c_1 \times c_2)$$

$Z_k(M, L, c) \in V_k(\Sigma, M)$ est défini comme la classe de (L, c) . Donc par définition, $V_k(\Sigma, M)$ est un espace hermitien engendré par les $Z_k(M, L, c)$.

On peut rendre les $V_k(\Sigma, M)$ indépendants de M de la même manière que la quantification des variétés symplectiques ne dépend pas du choix de la structure complexe. Si M_1 et M_2 ont même bord Σ , nous avons une forme sesquilinéaire non-dégénérée sur $V_k(\Sigma, M_1) \times V_k(\Sigma, M_2)$ donnée par

$$(Z_k(M_1, L_1, c_1), Z_k(M_2, L_2, c_2)) \rightarrow Z_k(M_1 \cup_\Sigma M_2^-, L_1 \sqcup L_2, c_1, c_2)$$

D'où un isomorphisme $\Psi_{M_1, M_2} : V_k(\Sigma, M_1) \rightarrow \overline{V_k(\Sigma, M_2)^*} \rightarrow V_k(\Sigma, M_2)$, la deuxième application découlant du produit scalaire. Ces isomorphismes sont compatibles à une puissance de τ_k près, en ce sens que

$$\Psi_{M_2, M_3} \circ \Psi_{M_1, M_2} = \tau_k^{n(M_1, M_2, M_3)} \Psi_{M_1, M_3}.$$

L'entier $n(M_1, M_2, M_3)$ est un indice de Maslov associé aux trois lagrangiens de $H_1(\Sigma)$, noyaux des morphismes $H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(M_i)$ ². Grâce à ces identifications, on peut considérer $Z_k(M_1, L, c)$ comme un vecteur de $V_k(\Sigma, M_2)$ bien défini à une puissance de τ_k près. L'identité

$$\langle Z_k(M_1, L_1, c_1), Z_k(M_2, L_2, c_1) \rangle = Z_k(M_1 \cup_\Sigma M_2^-, L_1 \cup L_2, c_1, c_2) \quad (3.6)$$

est alors vérifiée à une puissance de τ_k près.

3.5 Quantification des espaces de modules

Comme on peut le constater, la construction des topologues, parfaitement rigoureuse, ne fait plus du tout référence aux espaces de modules de fibrés plats. Cependant on aurait pu suivre l'idée de Witten et considérer l'espace $V_k^W(\Sigma)$ des sections holomorphes de $L_{\text{CS}}^k \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$, la structure kählerienne étant induite par une structure complexe de Σ .

N. Hitchin [Hit90] a montré qu'il existe une identification naturelle entre les $V_k^W(\Sigma)$ définis par deux structures complexes. Rappelons brièvement cette construction, une partie de mes travaux se plaçant dans ce contexte. Tout d'abord, pour éviter les singularités de $\mathcal{M}(\Sigma)$ on travaille dans un cadre

2. Pour la suite, il est important de noter que cet entier ne dépend pas de k

légèrement différent. Soit n et d deux entiers premiers entre eux avec $n \geq 2$. Supposons que Σ est une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 avec un bord connexe. On considère alors l'espace de modules $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$ des fibrés principaux $SU(n)$ plats sur Σ dont l'holonomie le long du bord est $\exp(2i\pi d/n)$ id. Cet espace est une variété lisse. Exactement comme pour $\mathcal{M}(\Sigma)$, $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$ admet une structure symplectique, un fibré préquantifiant L_{CS} , et une famille de structure complexe indexée par l'espace de Teichmüller \mathcal{T} de $\bar{\Sigma}$. Ici $\bar{\Sigma}$ est la surface fermée obtenue en collant à Σ un disque le long de son bord. Pour tout k et $\sigma \in \mathcal{T}$, on définit alors l'espace quantique

$$\mathcal{H}_{k,\sigma} := H^0(\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma), \mathcal{O}_\sigma(L_{\text{CS}}^k))$$

Par régularité elliptique, pour tout $k \geq 1$, la famille des $\mathcal{H}_{k,\sigma}$ avec $\sigma \in \mathcal{T}$, est un sous-fibré \mathcal{H}_k du fibré trivial de base \mathcal{T} de fibre $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma), L_{\text{CS}}^k)$. N. Hitchin montre que $\mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{T}$ admet une connexion naturelle projectivement plate qui a la forme

$$\nabla^{\mathcal{F}} + P_\sigma$$

où $\nabla^{\mathcal{F}}$ est la connexion triviale de $\mathcal{F} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ et pour tout $\sigma \in \mathcal{T}$, P_σ est un opérateur différentiel du second ordre explicite de $\mathcal{H}_{k,\sigma}$.

Cette connexion est invariante pour l'action du mapping class group $\text{Mod}(\Sigma)$, groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes de Σ préservant l'orientation et relatif au bord. On en déduit donc une représentation projective

$$\rho_k : \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_{k,\sigma_0})/\mathbb{C}^*$$

où σ_0 est un élément donné de \mathcal{T} . Curieusement, il n'est pas clair que la connexion précédente préserve une métrique de $\mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{T}$ et on ne sait pas si la représentation ci-dessus est unitaire.

3.6 Autres approches

Blocs conformes

Toujours selon les idées de Witten, on peut considérer l'espace de blocs conformes du modèle de Wess-Zumino-Witten. Rappelons très brièvement sa définition. On considère l'algèbre affine de Kac-Moody $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}((z)) \oplus \mathbb{C}c$ associée à la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de l'algèbre de Lie de G . Soit L_k la représentation basique de $\hat{\mathfrak{g}}$ au niveau $c = k$. On se donne une structure complexe sur Σ et un point $p \in \Sigma$. Soit $\mathcal{O}(\Sigma, p)$ l'espace des fonctions méromorphes de Σ

qui admettent un pôle en p et $\mathfrak{g}(\Sigma, p) = \mathcal{O}(\Sigma, p) \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On choisit une coordonnée holomorphe centrée en p , alors l'application qui associe à une fonction son développement de Taylor dans cette coordonnée est un morphisme $\mathfrak{g}(\Sigma, p) \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$. L'espace des blocs conformes est l'espace des coinvariants

$$V_k^{\text{con}}(\Sigma) = [L_k]_{\mathfrak{g}(\Sigma, p)}.$$

Comme c'était le cas pour $V_k^W(\Sigma)$, cette définition dépend du choix d'une structure complexe de Σ . En généralisant la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov à ce contexte, on identifie les espaces provenant de structures complexes différentes, et on obtient une représentation projective du mapping class group.

Il se trouve que $V_k^{\text{con}}(\Sigma)$ et $V_k^W(\Sigma)$ sont isomorphes. D'après E. Witten, ce résultat remonte à G. Segal. Une preuve complète a été donnée par A. Beauville et Y. Lazlo [BL94], et étendue par C. Pauly [Pau98] au cas où Σ a des points marqués. Enfin Y. Lazlo [Las98] a montré, dans le cas où $G = SU(n)$ et Σ a un point marqué colorié par un générateur du centre de $SU(n)$, que les connexions de Hitchin et de Knizhnik-Zamolodchikov sont les mêmes. Les représentations projectives de Γ_g^1 induites sont donc aussi les mêmes.

Comparaison

En quelle mesure les définitions topologiques et géométriques des $V_k(\Sigma)$ sont-elles équivalentes ? Tout d'abord, on montre que la dimension de $V_k(\Sigma)$ est donnée par la formule de Verlinde. Par l'approche combinatoire, cela se montre facilement, cf. par exemple [BHMV95]. Dans le cas des $V_k^{\text{con}}(\Sigma)$, c'est un résultat difficile, qui découle de la propriété de factorisation qui a été établie par Tsuchiya, Ueno and Yamada [TUY89]. D'autres preuves, qui s'appliquent directement pour les $V_k^W(\Sigma)$, sont dues à G. Daskalopoulos et R. Wentworth dans [DW93], E. Meinrenken et C. Woodward dans [MW98], et J.-M. Bismut et F. Labourie dans [BL99].

Ceci montre que $V_k^{\text{con}}(\Sigma)$ et $V_k^{\text{top}}(\Sigma)$ ont même dimension. En fait, ces espaces sont équivalents comme représentations projectives du mapping class groupe, cf. le livre de Kirillov et Bakalov et l'article récent de J. Andersen et K. Ueno dans [AU11].

Chapitre 4

Conjecture asymptotique de Witten

4.1 Conjectures semi-classiques

La conjecture asymptotique de Witten

Comme on l'a vu, les espaces hermitiens $V_k(\Sigma)$ ont été très largement étudiés. Par contre, il reste de nombreuses questions ouvertes relatives aux invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev $Z_k(X)$. Celle qui nous intéresse ici concerne la limite semi-classique des $Z_k(X)$.

Dans le cas où X est fermée, la *conjecture asymptotique de Witten* prédit que l'invariant $Z_k(X)$, défini par Reshetikhin et Turaev, vérifie l'équivalent (3.5), autrement dit

$$Z_k(X) \sim \sum_{\rho \in \mathcal{M}^{\text{irr}}(X)} e^{i\eta(\rho)} |\tau(\rho)|^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi k \text{CS}(\rho)} \quad (4.1)$$

lorsque le niveau k tend vers l'infini. Ici il convient de faire des hypothèses sur X pour que le terme de droite ait du sens. Typiquement on suppose que pour tout $P \in \mathcal{M}(X)$, $H^1(X, \text{Ad } P) = 0$. On appelle cette condition la *rigidité infinitésimale*, car elle stipule que l'espace de tangente de Zariski de $\mathcal{M}(X)$ est en tout point réduit à 0. Sous cette hypothèse, $\mathcal{M}(X)$ est fini. Notons de plus que nous avons remplacé $\mathcal{M}(X)$ par le sous-ensemble $\mathcal{M}^{\text{irr}}(X)$ formé des fibrés P irréductibles, c'est à dire qui vérifie $H^0(X, \text{Ad } P) = 0$. La torsion de P est alors un scalaire.¹

1. D. Freed et R. Gompf conjecturent dans [FG91] que les éléments réductibles de $\mathcal{M}(X)$ contribuent de manière négligeable à la limite semi-classique, plus précisément avec

Bien entendu, l'argument de E. Witten n'est pas valable car on ne sait pas donner de sens à l'intégrale fonctionnelle (3.3). Cette conjecture a ceci de remarquable qu'elle relie l'invariant quantique, de nature combinatoire, à l'invariant de Chern-Simons et à la torsion. Dit autrement, cette conjecture permet de retrouver la géométrie des espaces de modules dans les invariants quantiques de dimension 3, géométrie qui n'apparaissait plus dans la définition combinatoire des topologues.

La conjecture a été établie rigoureusement pour de nombreuses variétés de Seifert, dans les travaux de L. Jeffrey [Jef92], L. Rozansky [Roz96b], [Roz95], [Roz96a], R. Lawrence et D. Zagier [LZ99], K. Hikami [Hik04], S. Hansen et T. Takata [HT02], S. Hansen [Han05], J. Andersen [And11]. Ce n'est pas un hasard si tous ces travaux traitent uniquement la géométrie de Seifert. En effet on dispose d'une description très concrète de ces variétés, qui permet d'une part de comprendre en détail leurs espaces de modules et d'autre part de calculer relativement facilement leurs invariants quantiques. Notons cependant que même pour la géométrie de Seifert, la conjecture n'est que partiellement établie car l'identification de l'amplitude avec la torsion a rarement été faite.

Suite aux travaux de B. Thurston, on pense que les variétés de dimension 3 les plus répandues sont hyperboliques. Comme aucune variété hyperbolique n'a de fibration de Seifert, les articles cités ci-dessus sont loin de clore le sujet. Une partie de mon travail dans ce domaine a été précisément de montrer cette conjecture pour des variétés hyperboliques. Dans [Cha10a], j'ai traité le cas de variétés qui sont des tores d'application de difféomorphismes de surface de genre ≥ 2 . En collaboration avec Julien Marché, dans les articles [CM11a] et [CM11b], nous avons montré la conjecture pour des variétés obtenues par chirurgie sur le noeud de 8. Ce sont les seules variétés hyperboliques pour lesquelles la conjecture a été établie.

Conjecture généralisée aux variétés à bord

Dans chacune de mes contributions, un étape importante de la preuve a consisté à établir une généralisation de la conjecture de Witten pour des variétés X avec bord non vide Σ . Expliquons de quoi il retourne. La question est de comprendre la limite semi-classique de $Z_k(X) \in V_k(\Sigma)$ considéré comme une section holomorphe de la puissance k -ième du fibré de Chern-

un facteur k^{-n} où $n = \frac{1}{2} \dim H^0(X, \text{Ad } P)$. Ils expliquent aussi comment renormaliser la torsion convenablement pour obtenir un scalaire. Lorsque $H^1(X, \text{Ad } P) \neq 0$, la torsion s'interprète comme un élément de volume de $\mathcal{M}(X)$, et selon L. Jeffrey [Jef92], il suffit alors de remplacer dans la conjecture la somme par une intégrale.

Simons de $\mathcal{M}(\Sigma)$. Compte tenu de mes travaux sur la quantification des variétés kählerienne, la conjecture naturelle est que la suite $(Z_k(X), k \in \mathbb{N})$ est un état lagrangien supporté par l'image de $r : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$. Rappelons qu'un état lagrangien se concentrant sur une variété lagrangienne Λ est décrit au premier ordre par une section plate unitaire de la restriction du fibré préquantifiant à Λ et par une racine carré du fibré des éléments de volume de Λ , cf. chapitre 2.2. Ici, on dispose de candidats naturels fournis par l'invariant de Chern-Simons et la torsion de Reidemeister. En effet, la section de r^*L_{CS} qui envoie la classe de jauge d'une connexion $a \in \Omega^1(X, \mathfrak{g})$ sur la classe de $(a|_\Sigma, \exp(i CS(a)))$ où CS est la fonctionnelle de Chern-Simons, est plate et unitaire. D'autre part, pour tout fibré G -principal $P \rightarrow X$ plat, l'espace tangent à $\mathcal{M}(X)$ en $[P]$ est $H^1(X, \text{Ad } P)$. La torsion de Reidemeister de P est un élément de volume du dual de $H^1(M, \text{Ad } P)$, bien défini au signe près.

Cette conjecture généralisée est compatible avec la formule (3.6) exprimant comme un produit scalaire l'invariant d'une variété X obtenue en recollant deux variétés X_1 et X_2 de même bord Σ ,

$$X = X_1 \cup_\Sigma X_2. \quad (4.2)$$

En effet, $\mathcal{M}(X)$ est le produit fibré de $\mathcal{M}(X_1) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$ et $\mathcal{M}(X_2) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$. Et à supposer que $\mathcal{M}(X_1)$ et $\mathcal{M}(X_2)$ s'intersectent transversalement, la torsion de Reidemeister de X se déduit par un argument du type Mayer-Vietoris de celles de X_1 et X_2 par la même formule qui donne le terme dominant du produit scalaire de deux états lagrangiens, cf. proposition 2.3.3 ou sa généralisation en dimension supérieure dans [Cha10d].

On peut de la sorte déduire la conjecture de Witten pour une variété fermée X : on présente cette dernière comme une réunion de deux variétés X_1 et X_2 pour lesquelles on sait établir la conjecture généralisée, puis on calcule le produit scalaire de $Z_k(X_1)$ et $Z_k(X_2)$. Les décompositions qui viennent à l'esprit sont

- les scindements de Heegaard,
- les mapping tore, et plus généralement les décompositions en livre ouvert,
- les chirurgies.

Par exemple, il est aisé de retrouver avec cette méthode l'asymptotique de Witten pour les espaces lenticulaires qui avait été initialement obtenue par L. Jeffrey [Jef92], cf. chapitre 4.3. On peut voir ces espaces soit comme des scindements de Heegaard de genre 1, ou bien de manière équivalente comme les espaces obtenus par chirurgie sur le noeud trivial.

En appliquant ce programme, on doit cependant faire face à plusieurs difficultés. Les espaces de modules de surfaces de genre supérieur à 2 ont des singularités plus sérieuses que celles du type orbifold. On peut parfois introduire des points marqués coloriés de sorte que ces singularités disparaissent, mais en faisant cela on calcule des invariants quantiques de variétés muni d'un entrelacs colorié.

Un autre problème est lié à l'espace de module de X . Comme cela a été dit, la rigidité infinitésimale de $\mathcal{M}(X)$ est utile pour énoncer la conjecture de Witten. Mais elle intervient aussi dans la preuve à la dernière étape. Précisément elle équivaut au fait que les projections de $\mathcal{M}(X_1)$ et $\mathcal{M}(X_2)$ dans $\mathcal{M}(\Sigma)$ s'intersectent transversalement. Et sous cette hypothèse on peut estimer facilement le produit scalaire de $Z_k(X_1)$ et $Z_k(X_2)$. On pense que génériquement la rigidité infinitésimale est vérifiée, malheureusement il n'y a pas de résultat dans la littérature qui confirme cela.

Enfin, il convient de montrer que $Z_k(X_1)$ et $Z_k(X_2)$ vérifient la conjecture de Witten généralisée. Dans les cas que j'ai considérés, c'est relativement simple pour l'une des deux variétés X_1, X_2 . Et pour l'autre, cela découle de résultats d'analyse microlocale, bien établis mais non triviaux : une extension du fait que la solution de l'équation de Schrödinger est donné par un opérateur intégral de Fourier associé au flot hamiltonien classique, ou une caractérisation des solutions microlocales de $T\Psi = 0$ pour T un opérateur de Toeplitz. Remarquons que ces deux résultats présentent un phénomène de transport.

Pour terminer, je résume les résultats que j'ai obtenus en appliquant ce programme. Les énoncés précis sont donnés dans les parties suivantes.

Mes travaux sur les tores d'applications

Rappelons que pour toute surface Σ , l'on définit une représentation projective du groupe modulaire Σ par automorphismes de $V_k(\Sigma)$, dite représentation quantique. Pour cela, on associe à chaque difféomorphisme φ de Σ , son cylindre d'application Σ_φ^c , puis l'endomorphisme $Z_k(\Sigma_\varphi^c) \in V_k(\Sigma \cup \Sigma^-) \simeq V_k(\Sigma) \otimes V_k(\Sigma)^*$. Par ailleurs, l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma_\varphi^c)$ est le graphe du symplectomorphisme de $\mathcal{M}(\Sigma)$ induit par φ . Ainsi la conjecture de Witten généralisée dans ce cas est que $Z_k(\Sigma_\varphi^c)$ est un opérateur intégral de Fourier associé à ce symplectomorphisme. Si maintenant Σ_φ est le tore d'application de φ , alors $Z_k(\Sigma_\varphi)$ est la trace de $Z_k(\Sigma_\varphi^c)$. Donc on utilisera dans ce cas le théorème 2.5.3 sur les traces des opérateurs intégraux de Fourier plutôt que le théorème 2.3.3 sur l'estimation du produit scalaire d'états lagrangiens.

Dans l'article [Cha12], j'ai montré que $Z_k(\Sigma_\varphi^c)$ est un opérateur intégral

de Fourier associé au symplectomorphisme induit par φ pour Σ de genre 1. J'en ai déduit en appliquant le théorème 2.5.3 la conjecture de Witten pour le tore d'application de φ , lorsque que ce dernier est hyperbolique. Ce résultat étend celui de L. Jeffrey du groupe $SU(2)$ à tous les groupes compact connexes et simplement connexes. Il faut noter que le genre 1 est très particulier. L'espace $V_k(\Sigma)$ admet des bases particulières dites bases de Verlinde, dont les éléments sont des fonctions theta. On sait calculer explicitement dans ces bases les $Z_k(\Sigma_\varphi^c)$ et on retrouve la représentation métaplectique de Weil introduite dans le chapitre 1.5. Enfin, l'hypothèse d'hyperbolicité de φ correspond à l'hypothèse de transversalité dans le théorème 2.5.3. Dans ce cas, le tore d'application Σ_φ a la géométrie Sol, il n'est ni de Seifert ni hyperbolique.

Dans l'article [Cha10a], j'ai considéré les représentations projectives définies par N. Hitchin, cf. chapitre 3.5. Ici la surface Σ est de genre $g \geq 2$ et l'on travaille avec le groupe $SU(n)$. Les représentations quantiques sont des représentations d'holonomie pour une connexion sur l'espace de Teichmüller. J'ai montré en introduisant la correction métaplectique que l'on pouvait relever ces représentations projectives en des représentations asymptotiques. J'ai aussi montré que ces représentations se faisaient par opérateurs intégraux de Fourier. Pour cela j'ai appliqué une méthode similaire à la preuve du théorème 2.5.2, qui montre que les solutions de l'équation de Schrödinger sont donnés par des opérateurs intégraux de Fourier. Enfin j'ai estimé la trace de ces représentations par le théorème 2.5.3. Le résultat montre, sous l'hypothèse de rigidité infinitésimale, la conjecture de Witten pour les invariants $Z_k(\Sigma_\varphi, L, c)$, où φ est un difféomorphisme de Σ préservant un point $p \in \Sigma$, et $L \subset \Sigma_\varphi$ est le cercle $\{p\}_\varphi$ colorié par un générateur c du centre de $SU(n)$. Les résultats sont énoncés en détail dans le chapitre 4.2.

L'idée de déduire la conjecture de Witten généralisée de la formule de Lefschetz était déjà présente dans la thèse de L. Jeffrey, puis celle de J. Andersen. Elle a d'ailleurs été appliquée avec succès dans l'article [And11] pour les difféomorphismes d'ordre fini. Dans ce cas précis, le tore d'application admet alors une fibration de Seifert. De plus, il n'est pas nécessaire d'introduire la connexion de Hitchin ou les opérateurs intégraux de Fourier. En effet un difféomorphisme φ d'ordre fini préserve une structure complexe de Σ et donc $Z_k(\Sigma_\varphi^c)$ se définit simplement comme l'application d'image directe par φ . Il est intéressant de constater que pour passer de la géométrie de Seifert à la géométrie hyperbolique, il nous faut utiliser des outils plus puissants fournis par l'analyse microlocale.

Mes travaux sur les complémentaires de noeud

Le cas des chirurgies sur les noeuds a été l'objet d'une collaboration avec Julien Marché. Ici on dispose de nombreux résultats autant sur les invariants quantiques que sur les variétés de caractères, ce qui donne plus de consistance à notre recherche. Une partie importante de nos travaux a consisté à énoncer une forme très précise de la conjecture généralisée pour les complémentaires de noeud, en distinguant la contribution des représentations centrales, abéliennes et irréductibles. Ainsi pour tout noeud K , nous prédisons le comportement asymptotique de l'invariant $Z_k(E_K)$ du complémentaire E_K , en tout point de l'espace des modules du tore périphérique Σ . Il est important de noter que $Z_k(E_K)$ est déterminé par les polynômes de Jones coloriés de K . De la sorte, la conjecture généralisée explique comment les polynômes de Jones coloriés encodent l'espace des modules $\mathcal{M}(E_K)$, l'application de restriction $\mathcal{M}(E_K) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$, sa torsion de Reidemeister et la section de Chern-Simons.²

De plus nous avons montré que cette conjecture généralisée implique la conjecture de Witten pour les variétés obtenues par chirurgie de Dehn sur ce noeud pour peu que l'hypothèse de rigidité infinitésimale soit vérifiée. Nous avons aussi mis en évidence des relations entre notre conjecture et deux autres conjectures bien connues : la conjecture de Melvin-Morton-Rozansky (MMR) et la conjecture AJ. Plus précisément, la conjecture MMR découle de la conjecture généralisée en estimant le produit scalaire de $Z_k(E_K)$ avec un état bien choisi. On retrouve de la sorte la version analytique de la conjecture MMR qui a été montré par S. Garoufalidis et T. Le dans [GL05]³. D'autre part, la caractérisation du microsupport par les opérateurs elliptiques permet d'interpréter le fait que le microsupport de $Z_k(E_K)$ soit contenu dans l'image de $\mathcal{M}(E_K) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$ comme une version géométrique de la conjecture AJ.

Une deuxième partie de nos travaux a consisté à démontrer cette conjecture généralisée pour le noeud de huit. Pour la preuve nous avons établi des relations aux q -différence satisfaites par les polynômes de Jones coloriés du noeud de 8 et déduit des équations vérifiées par $Z_k(E_K)$ où interviennent des opérateurs de Toeplitz. La conjecture découle alors essentiellement du théorème 2.3.1 qui caractérise les solutions locales de $T\Psi = 0$ où T est un opérateur de Toeplitz. Nous avons ensuite déduit la conjecture de Wit-

2. ceci n'est pas sans rappeler la célèbre conjecture du volume qui prédit que l'on peut extraire des polynômes de Jones coloriés le volume d'un complémentaire de noeud hyperbolique.

3. Une version formelle de la conjecture MMR avait été établie précédemment par D. Bar Natan et S. Garoufalidis [BNG96]

ten pour la plupart des variétés obtenues par chirurgie sur le noeud de huit. Grâce aux progrès récents sur les relations aux q -différences réalisés par T. Le et A. Tran [LT11], nous pouvons espérer généraliser notre preuve à d'autres famille de noeuds.

Enfin, dans l'article [Cha11], j'ai vérifié la conjecture généralisée pour les noeuds toriques. Ces noeuds présentent quelques caractéristiques intéressantes. Par exemple, lorsque l'on projette $\mathcal{M}(E_K)$ sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ où Σ est le tore périphérique, il arrive que plusieurs composantes connexes de $\mathcal{M}(E_K)$ se chevauchent en partie. Par contre leurs invariants de Chern-Simons sont en déphasage. Tout ceci se retrouve dans l'asymptotique de $Z_k(E_K)$. Il faut aussi noter que ma preuve est relativement élémentaire en ce sens qu'elle n'utilise pas les techniques de l'analyse microlocale. Il n'y a là rien de très surprenant car les noeuds toriques relèvent surtout de la géométrie de Seifert.

4.2 Cylindres et tores d'applications

Comme dans le chapitre 3.5, considérons une surface compacte Σ de genre ≥ 2 avec un bord connexe et deux entiers $1 \leq d < n$ premiers entre eux. L'espace des modules $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$, formés des fibrés principaux $SU(n)$ plats sur Σ dont l'holonomie le long du bord est $\exp(2i\pi d/n)$ id, admet une structure symplectique et un fibré préquantifiant L . Soit $\bar{\Sigma}$ la surface fermée obtenue en recollant Σ et un disque D le long de leur bord. Toute structure complexe de $\bar{\Sigma}$ induit une structure complexe sur $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$. Soit l'espace quantique

$$\mathcal{H}_k := H^0(\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma), \mathcal{O}(L^k)), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

correspondant à une de ces structures complexes. D'après N. Hitchin [Hit90], pour tout k , on a une représentation projective naturelle du groupe modulaire étendu $\text{Mod}(\Sigma) = \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma))$,

$$\rho_k : \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_{k,\sigma_0})/\mathbb{C}^*.$$

Au vu des résultats sur la quantification des symplectomorphismes du chapitre 2.5, on espère relever cette représentation projective à une représentation d'une extension finie de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans la limite semi-classique. C'est possible.

Tout d'abord, $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$ admet une structure métaplectique μ . $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$ étant simplement connexe, μ est unique à isomorphisme près et le groupe des automorphismes de μ relevant un symplectomorphisme est un revêtement double du groupe des symplectomorphisme des $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$. Le groupe modulaire étendu $\text{Mod}(\Sigma)$ agissant par symplectomorphisme sur cet espace de

modules, on en déduit une extension $\widetilde{\text{Mod}}(\Sigma)$ de $\text{Mod}(\Sigma)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons p la projection de $\widetilde{\text{Mod}}(\Sigma)$ sur $\text{Mod}(\Sigma)$.

Théorème 4.2.1 ([Cha10a]). *Il existe une famille d'application*

$$\tilde{\rho}_k : \widetilde{\text{Mod}}(\Sigma) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_{k,\sigma_0}), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

telle que pour tout $g \in \widetilde{\text{Mod}}(\Sigma)$, $[\tilde{\rho}_k(g)] = \rho_k(p(g))$ et pour tout $g, h \in \widetilde{\text{Mod}}(\Sigma)$,

$$\tilde{\rho}_k(g)\tilde{\rho}_k(h) = c_k(g, h)\tilde{\rho}_k(gh)$$

avec $(c_k(g, h))$ une suite de nombre complexe qui vaut $1 + \mathcal{O}(k^{-1})$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Démonstration. On considère la connexion de Hitchin avec correction métaplectique qui a été introduite dans [AGL12]. Ici la correction métaplectique revient à remplacer k par $k - 1$, car l'inverse du fibré de Chern-Simons est un fibré de demi-forme. Dans [Cha10a] j'ai montré que cette connexion de Hitchin avec correction métaplectique coïncidait avec la connexion de Hitchin à un facteur près. On prouve ensuite que la courbure de cette connexion est un $\mathcal{O}(k^{-1})$. Ce calcul repose sur une élimination miraculeuse particulière à la correction métaplectique qui avait déjà été observée dans [Cha07]. Les estimations semi-classique de courbures, sans correction métaplectique et donc sans élimination miraculeuse, remontent elles aux travaux de T. Foth et A. Uribe [FU07]. \square

Le deuxième résultat que je démontre concerne l'asymptotique de la trace des opérateurs $\tilde{\rho}_k(g)$ lorsque k tend vers l'infini, pour un élément donné $h \in \widetilde{\text{Mod}}(\Sigma)$. Introduisons les différents termes qui apparaissent dans le développement asymptotique.

Soit φ un difféomorphisme de Σ fixant $\partial\Sigma$ et représentant $p(h)$. Notons Σ_φ le tore d'application de φ ,

$$\Sigma_\varphi := (\Sigma \times \mathbb{R}) / (x, t + 1) \sim (\varphi(x), t)$$

Plongeons le bord de Σ dans Σ_φ par l'application $x \rightarrow [x, 0]$. Considérons l'espace des modules $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$ formé des classes d'isomorphisme de fibrés plats $SU(n)$ -principaux de base Σ_φ et dont l'holonomie le long de $\partial\Sigma$ est $\exp(2i\pi d/n)$.

Étendons φ à $\bar{\Sigma}$ par l'identité sur D . Alors $\bar{\Sigma}_\varphi$ est une variété fermée contenant Σ_φ . Pour tout $P \in \mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$, le fibré associé à P par la représentation adjointe de $SU(n)$ est un fibré plat dont l'holonomie le long de $\partial\Sigma$

est triviale. Il s'étend donc en un fibré plat sur $\bar{\Sigma}_\varphi$ que nous notons $(\text{ad } P)$. On montre que l'espace tangent au sens de Zariski de $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$ en P est le groupe $H^1(\bar{\Sigma}_\varphi, \text{ad } P)$. Si cet espace est réduit à 0, alors P est isolé dans $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$.

Introduisons les invariants de Chern-Simons des éléments de $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$. Ceci nécessite quelques précautions car Σ_φ n'est pas fermé. Le bord de Σ_φ est le tore $T = (\partial\Sigma) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Pour tout $a \in \Omega^1(\Sigma_\varphi, \mathfrak{su}(n))$, introduisons

$$\text{CS}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_\varphi} \text{tr}(da \wedge a + \frac{2}{3}a^3).$$

Il est faux que que la classe modulo 2π de $\text{CS}(a)$ ne dépende que de la classe de jauge de a . Par contre fixons un difféomorphisme $\partial\Sigma \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de sorte que $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \ni (x, y)$. Pour tout $P \in \mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$, il existe $a \in \Omega^1(\Sigma_\varphi, \mathfrak{su}(n))$ représentant P et dont la restriction au bord est de la forme $pdx + qdy$ avec $p, q \in \mathfrak{su}(n)$. On montre alors que la classe modulo $2\pi\mathbb{Z}$ de $n\varphi(P)$, où

$$\varphi(P) := \text{CS}(a) + \frac{1}{4\pi} \text{tr}(pq), \quad (4.3)$$

ne dépend pas du choix de a .

Théorème 4.2.2 ([Cha10a]). *Supposons que pour tout $P \in \mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$, le premier groupe de cohomologie $H^1(\bar{\Sigma}_\varphi, \text{ad } P)$ soit trivial. Alors*

$$\text{tr}(\tilde{\rho}_k(g)) = \frac{1}{n} \sum_{P \in \mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)} i^{m(g,P)} e^{in(k+1)\varphi(P)} |\tau(\text{ad } P)|^{1/2} + \mathcal{O}(k^{-1})$$

où pour tout $P \in \mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$,

- $\varphi(P)$ est défini dans l'équation (4.3),
- $\tau(\text{ad } P)$ est la torsion de Reidemeister du fibré vectoriel plat $\text{ad } P \rightarrow \bar{\Sigma}_\varphi$,
- $m(g, P) \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Le résultat est en accord avec la conjecture de Witten, la trace de $\tilde{\rho}_k(g)$ représentant l'invariant quantique de Σ_φ muni du cercle $t \rightarrow [x_0, t] \in \Sigma_\varphi$ colorié par $\exp(2i\pi d/n)$.

On peut en fait énoncer un résultat plus général où on ne suppose pas la rigidité infinitésimale $H^1(\Sigma_\varphi, \text{ad } P) = 0$ pour tout P . Pour cela il nous faut introduire quelques notations supplémentaires. L'endomorphisme $\tilde{\rho}_k(g)$ de \mathcal{H}_k admet un noyau au sens de Schwartz, sa restriction à la diagonale s'identifie à une fonction que nous noterons $x \rightarrow \tilde{\rho}_k(g)(x)$. Nous avons

$$\text{tr}(\tilde{\rho}_k(g)) = \int_{\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)} \tilde{\rho}_k(g)(x) \mu(x)$$

où μ est la mesure de Liouville de $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$.

D'autre part, notons j l'injection de Σ dans Σ_φ donnée par $j(x) = [x, 0]$. Notons p l'application de $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi)$ dans $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$, qui envoie F sur j^*F . Chaque fibre de cette application contient n points.

Théorème 4.2.3 ([Cha10a]). *Soit $f \in C^\infty(\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma))$. Si le support de f ne rencontre pas $p(\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma_\varphi))$, alors*

$$\int_{\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)} f(x) \tilde{\rho}_k(g)(x) \mu(x) = \mathcal{O}(k^{-\infty})$$

Si pour tout $P \in p^{-1}(\text{Supp}(f))$, $H^1(\Sigma_\varphi, \text{ad } P) = 0$, alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)} f(x) \tilde{\rho}_k(g)(x) \mu(x) = \\ & \frac{1}{n} \sum_{P \in p^{-1}(\text{Supp}(f))} i^{m(g,P)} e^{in(k+1)\varphi(P)} |\tau(\text{ad } P)|^{1/2} f(P) + \mathcal{O}(k^{-1}) \end{aligned}$$

où $m(g, P)$, $\varphi(P)$ et $\tau(\text{ad } P)$ sont définis comme dans le théorème 4.2.2.

Pour prouver les deux théorèmes précédents, on montre dans un premier temps que pour tout $h \in \widetilde{\text{Mod}}(\Sigma)$, la famille des $\tilde{\rho}_k(h)$, $k \in \mathbb{N}^*$ est un opérateur intégral de Fourier associé à l'action de h sur l'espace des module $\mathcal{M}_{n,d}(\Sigma)$. La preuve de ce résultat consiste à intégrer l'équation de transport parallèle pour la connexion de Hitchin, de la même manière que l'on résout l'équation de Schrödinger avec des opérateurs intégraux de Fourier. Ensuite on applique le théorème 2.5.3 ou sa version locale pour estimer la trace. Il reste alors à interpréter les différents termes du résultat en fonction des invariants du tore d'application Σ_φ . Les détails sont contenues dans l'article [[Cha10a]].

4.3 Complémentaire de noeud

Commençons par énoncer le résultat démontré avec J. Marché. Si X est une variété, l'espace de modules $\mathcal{M}(X)$ s'identifie aux classes de conjugaisons des morphismes $\pi_1(X) \rightarrow G$. On note $\mathcal{M}_{\text{irr}}(X)$ et $\mathcal{M}_{\text{ab}}(X)$ les parties de $\mathcal{M}(X)$ formées respectivement des représentations irréductibles ou abéliennes non-centrales.

Théorème 4.3.1 ([CM11b]). *Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux avec p qui n'est pas divisible par 4. Soit X la variété obtenue par la*

chirurgie de paramètre (p, q) sur le noeud de huit. Supposons que pour tout $\rho \in \mathcal{M}_{\text{irr}}(X)$, $H^1(X, \text{Ad}_\rho) = 0$. Alors l'invariant de Reshetikhin-Turaev de X vérifie

$$\begin{aligned} Z_k(X) &= \sum_{\rho \in \mathcal{M}_{\text{irr}}(X)} \frac{e^{im(\rho)\frac{\pi}{4}} (\mathbb{T}(\rho))^{\frac{1}{2}}}{2} e^{2i\pi k \text{CS}(\rho)} \\ &+ \sum_{\rho \in \mathcal{M}_{\text{ab}}(X)} \frac{e^{im(\rho)\frac{\pi}{4}} (\mathbb{T}(\rho))^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} k^{-\frac{1}{2}} e^{2i\pi k \text{CS}(\rho)} + \mathcal{O}(k^{-1}) \end{aligned}$$

où pour tout $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $m(\rho)$ est un entier, $\mathbb{T}(\rho)$ est la torsion de Reidemeister de ρ et $\text{CS}(\rho)$ l'invariant de Chern-Simons de ρ .

Il est facile de voir que l'hypothèse de rigidité infinitésimale est vérifiée pour une famille infinie de pentes p/q . Comme l'ont démontré ensuite J. Marché et G. Maurin, l'ensemble des couples (p, q) qui ne vérifient pas cette condition, est fini. Il n'est d'ailleurs pas exclu que cet ensemble soit vide.

Expliquons les grandes lignes de la preuve du théorème. Considérons un noeud K de la sphère S^3 . Soit N un voisinage tubulaire de K , E_K le complémentaire de N et $\Sigma = \partial N$ le tore périphérique. On appelle état du noeud le vecteur $Z_k(E_K) \in V_k(\Sigma)$. Notons $\mu, \lambda \in H_1(\Sigma)$ les classes d'homologie d'un méridien et d'une longitude de K . Le remplissage de Dehn de E_K de paramètre (p, q) est

$$X = E_K \cup_\phi (D^2 \times S^1)^-$$

où $\phi : \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \Sigma$ est un homéomorphisme préservant l'orientation qui envoie la classe de ∂D^2 sur $p\mu + q\lambda$. Par conséquent, nous avons

$$Z_k(X) = \langle Z_k(E_K), Z_k(D^2 \times S^1) \rangle_{V_k(\Sigma)} \quad (4.4)$$

où l'on identifie le bord de $D^2 \times S^1$ avec Σ par ϕ de sorte que $Z_k(N) \in V_k(\Sigma)$. Ici, $V_k(\Sigma)$ et les vecteurs $Z_k(E_K)$, $Z_k(D^2 \times S^1)$ sont définis comme dans le chapitre 3.4. Nous avons volontairement omis le facteur correctif provenant de l'anomalie, l'égalité ci-dessus est vérifiée à une puissance de τ_k près.

Quantification géométrique de $\mathcal{M}(\Sigma)$

Pour calculer ce produit scalaire, nous allons réaliser $V_k(\Sigma)$ comme la quantification géométrique de $\mathcal{M}(\Sigma)$. L'espace de module $\mathcal{M}(\Sigma)$ s'identifie à l'espace des classes de conjugaisons de morphisme de $\pi_1(\Sigma)$ dans G . Ici $\pi_1(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^2$, et l'on déduit que $\mathcal{M}(\Sigma)$ est le quotient d'un tore de dimension

2. Plus précisément, notons $E = H_1(\Sigma, \mathbb{R})$, $R = H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ et π l'application de E/R dans $\mathcal{M}(\Sigma)$ définie pour tout $x \in E$ par

$$\pi([x])(\gamma) = \exp((\gamma \cdot x)D)$$

où le point \cdot désigne le produit d'intersection et D est la matrice diagonale de coefficients $2i\pi, -2i\pi$. Alors π se factorise en une bijection de $(E/R)/\mathbb{Z}_2$ sur $\mathcal{M}(\Sigma)$, où \mathbb{Z}_2 agit par $\pm \text{id}$.

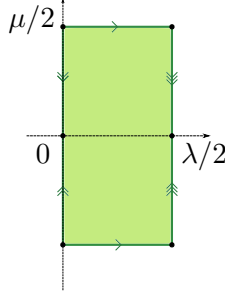


FIGURE 4.1 – L'orbifold $\mathcal{M}(\Sigma)$

Ainsi $\mathcal{M}(\Sigma)$ hérite d'une structure d'orbifold, son espace topologique sous-jacent étant une sphère, cf. figure 4.1. $\mathcal{M}(\Sigma)$ a quatre points singuliers qui correspondent aux représentations centrales.

En multipliant le produit d'intersection de $E = H_1(\Sigma, \mathbb{R})$ par 4π , on obtient une forme antisymétrique sur E et le quotient E/R hérite d'une forme symplectique de volume 4π . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.5, on a un fibré préquantifiant naturel $L \rightarrow E/R$. Ce fibré préquantifiant s'identifie à π^*L_{CS} , où $L_{CS} \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$ est le fibré de Chern-Simons. Introduisons une structure complexe linéaire sur E et une droite de demi-formes δ . Notons \mathcal{H}_k l'espace des sections holomorphes de $L^k \otimes \delta \rightarrow E/R$. On définit la quantification de $(E/R)/\mathbb{Z}_2$ comme étant le sous-espace $\mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ de \mathcal{H}_k , formé des sections alternées, i.e. vérifiant

$$f(-x) = -f(x).$$

Notons que $\mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ s'identifie à l'espace des sections holomorphes d'un fibré sur l'orbifold $(E/R)/\mathbb{Z}_2$.

Reste à identifier $V_k(\Sigma)$ et $\mathcal{H}_k^{\text{alt}}$. Donnons nous une base (μ', λ') de R . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.5, (μ', λ') détermine une base (Ψ_ℓ) de \mathcal{H}_k vérifiant (1.8) et (1.9). Alors la famille

$$(\Psi_\ell - \Psi_{-\ell}, \ell = 1, \dots, k - 1)$$

est une base de $\mathcal{H}_k^{\text{alt}}$. D'autre part, introduisons le tore solide N , remplissage de Dehn de Σ dans lequel μ' se contracte. Soit L le noeud en bande de N obtenu en épaississant λ' dans Σ et en le poussant dans N . Alors les vecteurs $Z_k(N, L, \ell)$, $\ell = 1, \dots, k-1$, forment une base de $V_k(\Sigma)$, dite *base de Verlinde* associée à (μ', λ') . On identifie $V_k(\Sigma)$ et $\mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ de sorte que

$$Z_k(N, L, \ell) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_\ell - \Psi_{-\ell}), \quad \forall \ell = 1, \dots, k-1.$$

Cette identification est naturelle, en ce sens qu'elle ne dépend pas du choix de la base (μ', λ') à un facteur $\exp(i\pi(\frac{n}{4} + \frac{n'}{2k}))$ près⁴, cf. théorème de [CM11a].

États des tores solides

Il est facile de déduire des formules explicites donnant les fonction thetas, que $(Z_k(N) = Z_k(N, L, 1))$ est un état lagrangien supporté par le segment $I = \{[x\mu'] / x \in \mathbb{R}\}$. Comme on s'y attend, I est l'image de la restriction $\mathcal{M}(N) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Z_k(N)(x\mu') = e^{i\frac{\pi}{4}m} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} t^k(x\mu') \sqrt{2} \sin(2\pi x) \Omega_{\mu'} + \mathcal{O}(k^{-3/4})$$

où t est la section plate de $L_{\text{CS}} \rightarrow I$ qui vaut 1 en l'origine, $\Omega_{\mu'} \in \delta$ est tel que $\Omega_{\mu'}^2(\mu') = 1$.

Si on choisit $\mu' = p\mu + q\lambda$, on déduit que le vecteur $Z_k(D^2 \times S^1)$ entrant dans le produit scalaire (4.4) est un état lagrangien. Si K est le noeud trivial et donc E_K un tore solide, alors en choisissant $\mu' = \lambda$, on déduit que $Z_k(E_K)$ est aussi un état lagrangien. On peut alors estimer le produit scalaire (4.4) avec la proposition 2.3.3, cf. figure 4.2.

Dans ce cas, les variétés obtenues par chirurgie sont les espaces lenticulaires, et on retrouve la formule asymptotique démontrée par L. Jeffrey [Jef92]

$$Z_k(L(p, q)) \sim i \sqrt{\frac{2}{p}} k^{-1/2} \sum_{\ell=1}^{p-1} e^{2i\pi \frac{q\ell^2}{p} k} \sin\left(\frac{2\pi q\ell}{p}\right) \sin\left(\frac{2\pi\ell}{p}\right)$$

pour $p > q > 1$.

4. En fait, la base (Ψ_ℓ) est seulement déterminée à un signe près, et la base de Verlinde à une puissance de τ_k près.

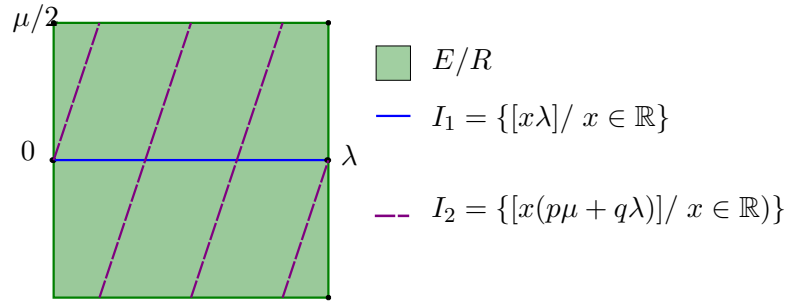


FIGURE 4.2 – Intersection lagrangienne donnant l'espace lenticulaire $L(2, 3)$

Asymptotique des états de noeud

Supposons maintenant que K est noué. On souhaite montrer un résultat similaire pour le vecteur $Z_k(E_K)$ appelé état du noeud. Commençons par décrire $\mathcal{M}(E_K)$ et l'application de restriction $r : \mathcal{M}(E_K) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$. Rappelons que $H_1(E_K)$ est cyclique engendré par la classe du méridien. Par conséquence l'espace $\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)$, formé des classes des représentations abéliennes de $\mathcal{M}(E_K)$, est un segment. De plus la restriction de r à $\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)$ est un plongement d'image le segment $\{[x\lambda] / x \in \mathbb{R}\}$, cf. figure 4.3.

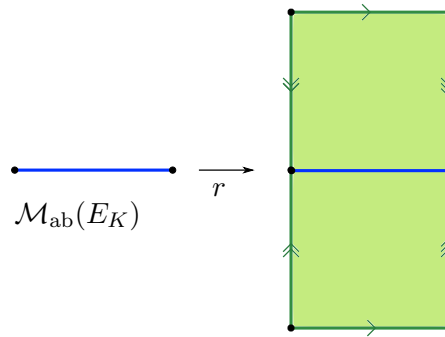
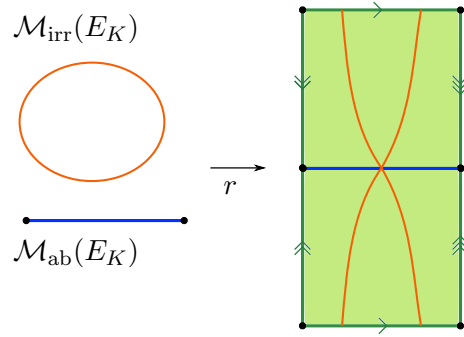


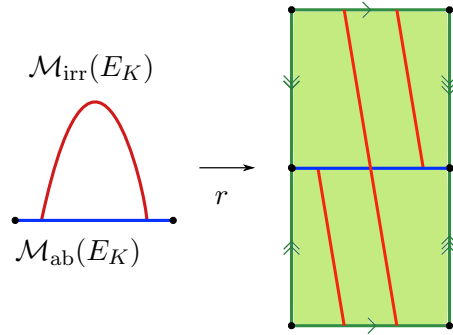
FIGURE 4.3 – $\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)$ et l'application r

Le complémentaire $\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)$ de $\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)$ varie considérablement en fonction du noeud. C'est d'ailleurs un résultat difficile de P. Kronheimer et T. Mrowka [KM04] que $\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)$ est non-vide dès que le noeud est noué. Lorsque K est le noeud de huit, $\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)$ est un cercle et la restriction de r à $\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)$ est un plongement avec un point double qui appartient aussi à l'image de $\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)$, cf. figure 4.4.

Lorsque K est un noeud torique de paramètres a, b , $\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)$ est réu-

FIGURE 4.4 – $\mathcal{M}(E_K)$ pour le noeud de huit

nion disjointe de $(a-1)(b-1)/2$ intervalles ouverts. Les extrémités de ces intervalles sont des points distincts de $\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)$. La restriction de r à chaque composante connexe de $\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)$ est un plongement, les images de ces différents intervalles peuvent se superposer, cf. les figures 4.5 et 4.6 pour le noeud de trèfle et le noeud torique (2, 5).

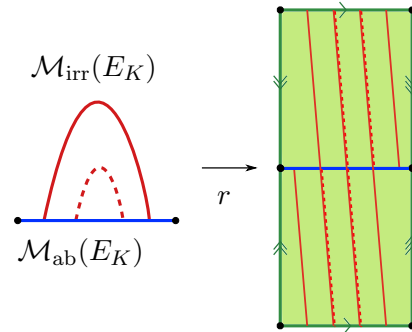
FIGURE 4.5 – $\mathcal{M}(E_K)$ pour le noeud de trèfle

Théorème 4.3.2 ([CM11a], [CM11b], [Cha11]). *Soit K le noeud de 8 ou bien un noeud torique. Pour tout point $x \in \mathcal{M}(\Sigma)$, nous avons*

- si $x \notin r(\mathcal{M}(E_K))$, $Z_k(E_K)(x) = \mathcal{O}(k^{-\infty})$.
- si $r^{-1}(x) = \{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ et ρ_j irréductible pour tout j , alors

$$Z_k(E_K)(x) \sim \sum_{j=1, \dots, N} e^{im_j \pi/4} k^{3/4} \frac{\sqrt{\mathbb{T}(\rho_j)}}{4\pi^{3/4}} e^{2i\pi k \text{CS}(\rho_j)}$$

où les m_j sont des entiers.

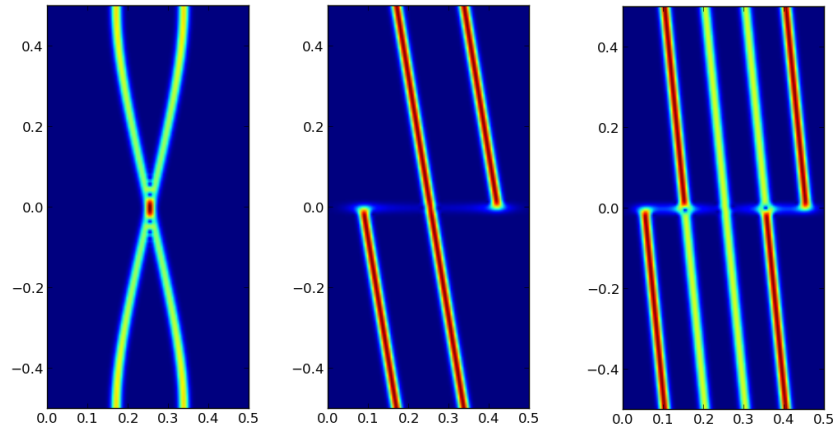
FIGURE 4.6 – $\mathcal{M}(E_K)$ pour le noeud torique (2,5)

– si $r^{-1}(x) = \{\rho\}$ et ρ abélienne régulière, alors

$$Z_k(E_K)(x) \sim e^{im\pi/4} k^{1/4} \frac{\sqrt{\mathbb{T}(\rho)}}{2^{3/2}\pi^{3/4}} e^{2i\pi k \text{CS}(\rho)}$$

avec m un entier.

Le résultat que nous avons démontré est en fait plus précis : il dit que $Z_k(E_K)$ est un état lagrangien supporté par $r(\mathcal{M}(E_K))$ au sens du chapitre 2.2. Une confirmation du résultat est fournie par des simulations numériques, cf. figure 4.7 que l'on comparera avec les figures 4.4, 4.5 et 4.6.

FIGURE 4.7 – norme ponctuelle de $Z_k(E_K)$ pour $k = 100$ et K le noeud de huit, le noeud de trèfle et le noeud torique (2,5)

Dans le cas du noeud de huit, le théorème précédent donne l'asymptotique de $Z_k(E_K)$ en tout point excepté le point triple $r(\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)) \cap r(\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K))$. On en déduit le théorème 4.3.1, i.e. la conjecture asymptotique de Witten pour presque toute variété X obtenue par chirurgie sur le noeud de huit. Pour cela on estime le produit scalaire (4.4) grâce à la proposition 2.3.3. Par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de X est le quotient du groupe fondamental de E_K par le sous-groupe engendré par un lacet de classe d'homologie $p\mu + q\lambda$. Par conséquent, l'espace des module $\mathcal{M}(X)$ s'identifie à

$$\{\rho \in \mathcal{M}(E_K) / r(\rho) \in I\}$$

où I est le segment $[(p\mu + q\lambda)\mathbb{R}]$. On suppose que p n'est pas divisible par 4 afin que le point $r(\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K)) \cap r(\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K))$ n'appartienne pas à I . Sous cette hypothèse $\mathcal{M}(X)$ est en bijection avec $r(\mathcal{M}(E_K)) \cap I$, cf. figure 4.8. L'hypothèse de rigidité infinitésimale est équivalente au fait que $r(\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K))$

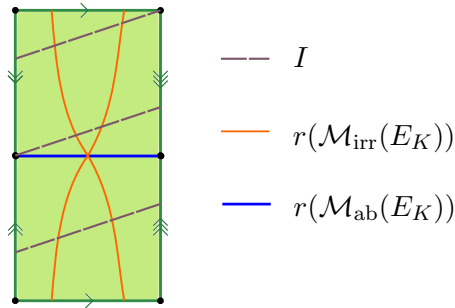


FIGURE 4.8 – Chirurgie sur le noeud de huit de pente 1/3

intersecte transversalement I . Si elle est vérifiée, on peut appliquer la proposition 2.3.3. Grâce au théorème de Mayer-Vietoris, on calcule la torsion de Reidemeister d'une représentation ρ de $\pi_1(X)$ en fonction de la torsion de Reidemeister de la restriction de ρ à $\pi_1(E_K)$. De même l'invariant de Chern-Simons de X se déduit de celui de la restriction de ρ à E_K .

Le noeud de huit

Expliquons la preuve du théorème 4.3.2 pour le noeud de huit. De l'équation (3.6), on déduit les coefficients de $Z_k(E_K)$ dans la base de Verlinde associée à $(\mu', \lambda') := (\mu, \lambda)$:

$$Z_k(E_K) = \sqrt{\frac{2}{k}} \sin(\pi/k) \sum_{\ell=1, \dots, k-1} J_\ell^K(-e^{i\pi/2k}) Z_k(N, L, \ell),$$

où les J_ℓ^K sont les polynômes de Jones coloriés de K . Dans le cas des noeuds toriques ou du noeud de 8, on sait calculer explicitement ces polynômes [Mor95], [Hab02]. Par exemple pour le noeud de 8,

$$J_n^8 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{n+m\}!}{\{1\}\{n-m-1\}!}$$

où l'on note pour tout entier n , $\{n\} := t^{2n} - t^{-2n}$ et $\{n\}! = \{1\} \dots \{n\}$. A partir de ces formules, on montre que les polynômes de Jones vérifient des relations aux q -différences :

$$P(\mathcal{M}, \mathcal{L}, t) J_n^K = 0 \quad (4.5)$$

Ici \mathcal{M} et \mathcal{L} sont les endomorphismes de l'espace $(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])^{\mathbb{Z}}$ donnés par

$$(\mathcal{M}f)_n = t^{2n} f_n, \quad (\mathcal{L}f)_n = f_{n+1}.$$

De plus P est une fonction polynomiale de \mathcal{M} , \mathcal{L} et t . Une telle relation implique que l'état du noeud $Z_k(E_K) \in \mathcal{H}_k^{\text{alt}}$ vérifie :

$$P(M, L, e^{-i\pi/k}) Z_k(E_K) = 0 \quad (4.6)$$

où M et L sont les opérateurs de \mathcal{H}_k donnés dans la base (Ψ_ℓ) par

$$M\Psi_\ell = e^{i\frac{\pi\ell}{k}} \Psi_\ell, \quad L\Psi_\ell = \Psi_{\ell-1}.$$

D'après le théorème 2.1.3, $P(M, L, e^{-i\pi/k})$ est un opérateur de Toeplitz de symbole principal

$$\sigma([x\mu + y\lambda]) = P(e^{-2i\pi y}, e^{-2i\pi x}, 1).$$

Par un raisonnement d'ellipticité, on déduit que si $\sigma(z) \neq 0$ pour un certain z , alors $Z_k(E_K)(z) = \mathcal{O}(k^{-\infty})$. Donc pour montrer le premier point du théorème 4.3.2, il suffit d'exhiber pour chaque point $z \notin r(\mathcal{M}(E_K))$ une relation aux q -différence telle que le symbole σ ne s'annule pas en z , ce que nous avons fait dans [CM11a] pour le noeud de huit.⁵

5. D'après un résultat de S. Garoufalidis et Thang Lê [GL05], tout noeud admet au moins une relation aux q -différence homogène. Par contre, il est difficile de donner explicitement de telles relations. La conjecture AJ relie ces relations à la variété des caractères $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ de l'extérieur du noeud. Cette conjecture a été énoncée et vérifiée dans le cas du noeud de huit par S. Garoufalidis dans [Gar04]. On peut en fait interpréter le premier point du théorème 4.3.2 comme une variante lisse de la conjecture AJ , cf. la discussion du chapitre 5.8 de [CM11a]. Cependant, les relations aux q -différence utilisées dans [Gar04] ne sont pas suffisantes pour montrer notre résultat.

Pour obtenir l'asymptotique de $Z_k(E_K)$ sur $r(\mathcal{M}(E_K))$, nous avons aussi utilisé des équations aux q -différences, avec un second membre cette fois ci. Comme précédemment on en déduit une équation satisfaite par $Z_k(E_K)$. Par exemple, pour le noeud de huit, nous avons :

$$Q_k Z_k(E_K) = R_k Z_k^0 \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_k &= (q^{-1}M^2 - qM^{-2})L + (qM^2 + q^{-1}M^{-2})L^{-1} \\ &\quad + (M^2 - M^{-2})(-M^4 - M^{-4} + M^2 + M^{-2} + q^2 + q^{-2}), \\ R_k &= (M^5 + M^{-5} + M^3 + M^{-3} - (q^2 + q^{-2})(M + M^{-1})) \end{aligned}$$

où $q = e^{-2i\pi/k}$. Ici Z_k^0 est le premier vecteur de la base de Verlinde associée à la base $(\lambda, -\mu)$. Nous savons que Z_k^0 est un état lagrangien supporté par $r(\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K))$ et nous connaissons son symbole principal. En inversant (Q_k) au voisinage des points où son symbole principal $\sigma(Q_k)$ ne s'annule pas, on obtient l'asymptotique de l'état du noeud le long de $r(\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K))$. Il s'agit d'un état lagrangien dont le symbole principal s'obtient en multipliant celui de Z_k^0 par la restriction de $\sigma(R_k)/\sigma(Q_k)$ à $r(\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K))$. On reconnaît alors la torsion qui dans le cas abélien s'exprime très facilement en fonction du polynôme d'Alexander du noeud.

L'asymptotique de l'état du noeud de huit sur la partie irréductible se déduit aussi de l'équation (4.7). Si U est un voisinage suffisamment petit d'une des composantes connexes de $r(\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K)) \setminus r(\mathcal{M}_{\text{ab}}(E_K))$, la restriction du symbole de Q_k à U s'annule exactement sur $r(\mathcal{M}_{\text{irr}}(E_K))$ et l'état Z_k^0 est négligeable sur U . On déduit du théorème 2.3.1 que la restriction de $Z_k(E_K)$ à U est un état lagrangien dont le symbole principal vérifie une équation de transport. Nous avons montré que la torsion de Reidemeister du noeud de huit vérifie cette équation de transport. Ceci implique le deuxième point du théorème à une constante multiplicative près. Pour déterminer cette constante, nous avons utilisé l'équation (4.4) et l'asymptotique du théorème 4.3.1 lorsque $p/q = 1$ qui a été établi par K. Hikami dans [Hik05].

Les noeuds toriques

Lorsque K est un noeud torique, une difficulté est que $r(\mathcal{M}(E_K))$ n'est pas fermé pour la topologie de Zariski alors les relations aux q -différences sont par définition polynomiales. Donc il faut une idée supplémentaire pour démontrer le premier point du théorème 4.3.2. La deuxième partie de la

preuve précédente pose aussi problème. Plus précisément, si K est le noeud torique de paramètre (a, b) , $Z_k(E_K)$ vérifie l'équation (4.7) avec cette fois ci

$$Q_k = \text{id} - (q^{-1}M)^{-2ab}L^{-2}, \quad R_k = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i q^{\epsilon_i} (q^{-1}M)^{-ab+p_i}$$

où $(\epsilon_i, p_i) = (1, -a-b), (-1, -a+b), (1, a+b), (-1, a-b)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Comme précédemment, le second membre $R_k Z_k^0$ est un état lagrangien supporté par le cercle $D_0 = [\lambda\mathbb{R}] \subset E/R$. Le lieu caractéristique C , ensemble des zéros du symbole principal de Q_k , est la réunion des deux cercles D_{ab} et $D_{ab} + \frac{1}{2ab}\lambda$ où $D_{ab} = [(ab\mu - \lambda)\mathbb{R}]$, cf. figure 4.9.

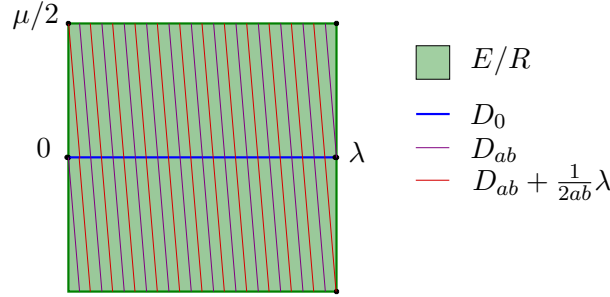


FIGURE 4.9 – Lieu caractéristique C et D_0

On en déduit que l'état du noeud est négligeable en dehors de tout point de $C \cup D_0$. En inversant localement Q_k , on trouve l'asymptotique de $Z_k(E_K)$ au voisinage des points de $D_0 \setminus C$. De plus sur chaque composante connexe de $C \setminus D_0$, $Z_k(E_K)$ est déterminé à une constante multiplicative près par l'équation (4.7) grâce au théorème 2.3.1.

A chaque point d'intersection du lieu caractéristique et de D_0 , l'état se recompose d'une manière dépendante du second membre $R_k Z_k^0$.

Pour bien décrire ces transitions et démontrer le théorème 4.3.2, il convient en fait de travailler avec le réseau R' de base $(2(ab\mu - \lambda), \lambda)$. La quantification de E/R' contient comme sous-espace \mathcal{H}_k et en réécrivant l'équation (4.7), on arrive à la résoudre exactement de façon complètement élémentaire sans utiliser la théorie des opérateurs de Toeplitz. Les détails sont dans l'article [Cha11].

Publications personnelles

- [Cha99] L. Charles. Feynman path integral and Toeplitz quantization. *Helv. Phys. Acta*, 72(5-6) :341–355, 1999.
- [Cha03a] L. Charles. Berezin-Toeplitz operators, a semi-classical approach. *Comm. Math. Phys.*, 239(1-2) :1–28, 2003.
- [Cha03b] L. Charles. Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10) :1527–1566, 2003.
- [Cha06a] L. Charles. Symbolic calculus for Toeplitz operators with half-form. *J. Symplectic Geom.*, 4(2) :171–198, 2006.
- [Cha06b] L. Charles. Toeplitz operators and Hamiltonian torus actions. *J. Funct. Anal.*, 236(1) :299–350, 2006.
- [Cha07] L. Charles. Semi-classical properties of geometric quantization with metaplectic correction. *Comm. Math. Phys.*, 270(2) :445–480, 2007.
- [Cha10a] L. Charles. Asymptotic properties of the quantum representations of the mapping class group. arxiv, derniere version sur <http://www.math.jussieu.fr/~charles/Articles/>, 2010.
- [Cha10b] L. Charles. A Lefschetz fixed point formula for symplectomorphisms, 2010.
- [Cha10c] L. Charles. A note on the Chern-Simons bundle and the mapping class group. <http://people.math.jussieu.fr/~charles/Articles/>, 2010.
- [Cha10d] L. Charles. On the quantization of polygon spaces. *Asian J. Math.*, 14(1) :109–152, 2010.
- [Cha11] L. Charles. Torus knot state asymptotics. *ArXiv e-prints*, July 2011.

- [Cha12] Laurent Charles. Asymptotic properties of the quantum representations of the modular group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(11) :5829–5856, 2012.
- [CM11a] L. Charles and J. Marche. Knot state asymptotics I, AJ Conjecture and abelian representations. *arXiv :1107.1645*, 2011.
- [CM11b] L. Charles and J. Marche. Knot state asymptotics II, Witten conjecture and irreducible representations. *arXiv :1107.1646*, 2011.
- [CPN11] L. Charles, A. Pelayo, and S. V. Ngoc. Isospectrality for quantum toric integrable systems. *ArXiv e-prints, to appear in Annales de l'ENS*, November 2011.
- [CVN08] L. Charles and S. Vũ Ngọc. Spectral asymptotics via the semi-classical Birkhoff normal form. *Duke Math. J.*, 143(3) :463–511, 2008.

Bibliographie

- [AB83] M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505) :523–615, 1983.
- [AGL12] Jørgen Ellegaard Andersen, Niels Leth Gammelgaard, and Magnus Roed Lauridsen. Hitchin’s connection in metaplectic quantization. *Quantum Topol.*, 3(3-4) :327–357, 2012.
- [And06] Jørgen Ellegaard Andersen. Asymptotic faithfulness of the quantum $SU(n)$ representations of the mapping class groups. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :347–368, 2006.
- [And11] J. Andersen. The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori I. *ArXiv e-prints*, April 2011.
- [AU11] J. Andersen and K. Ueno. Construction of the Reshetikhin-Turaev TQFT from conformal field theory. *ArXiv e-prints*, October 2011.
- [BBS08] Robert Berman, Bo Berndtsson, and Johannes Sjöstrand. A direct approach to Bergman kernel asymptotics for positive line bundles. *Ark. Mat.*, 46(2) :197–217, 2008.
- [BdM95] Louis Boutet de Monvel. Cônes symplectiques et opérateurs de Toeplitz. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 13, Année 1994–1995*, volume 13 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 157–166. Univ. Grenoble I, Saint, 1995.
- [BdM02] Louis Boutet de Monvel. Related semi-classical and Toeplitz algebras. In *Deformation quantization (Strasbourg, 2001)*, volume 1 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 163–190. de Gruyter, Berlin, 2002.
- [BdM79] Louis Boutet de Monvel. On the index of Toeplitz operators of several complex variables. *Invent. Math.*, 50(3) :249–272, 1978/79.

- [BdMG81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*, volume 99 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [BdMS76] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő. In *Journées : Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975)*, pages 123–164. Astérisque, No. 34–35. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [Ber75] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40 :153–174, 1975.
- [BHMV95] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, and P. Vogel. Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket. *Topology*, 34(4) :883–927, 1995.
- [BL94] A. Beauville and Y. Laszlo. Conformal blocks and generalized theta functions. *Comm. Math. Phys.*, 164(2) :385–419, 1994.
- [BL99] J-M. Bismut and F. Labourie. Symplectic geometry and the Verlinde formulas. In *Surveys in differential geometry : differential geometry inspired by string theory*, volume 5 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 97–311. Int. Press, Boston, MA, 1999.
- [BNG96] Dror Bar-Natan and Stavros Garoufalidis. On the Melvin-Morton-Rozansky conjecture. *Invent. Math.*, 125(1) :103–133, 1996.
- [BPU95] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe. Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series. *Invent. Math.*, 122(2) :359–402, 1995.
- [BPU98] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe. Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(4) :1189–1229, 1998.
- [BU03] D. Borthwick and A. Uribe. On the pseudospectra of Berezin-Toeplitz operators. *Methods Appl. Anal.*, 10(1) :31–65, 2003.
- [CS83] Marc Culler and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1) :109–146, 1983.
- [CS85] Jeff Cheeger and James Simons. Differential characters and geometric invariants. In *Geometry and topology (College Park, Md., 1983/84)*, volume 1167 of *Lecture Notes in Math.*, pages 50–80. Springer, Berlin, 1985.

- [DLM06] Xianzhe Dai, Kefeng Liu, and Xiaonan Ma. On the asymptotic expansion of Bergman kernel. *J. Differential Geom.*, 72(1) :1–41, 2006.
- [DW93] G. Daskalopoulos and R. Wentworth. Local degeneration of the moduli space of vector bundles and factorization of rank two theta functions. I. *Math. Ann.*, 297(3) :417–466, 1993.
- [Fed95] Boris V. Fedosov. The index theorem for deformation quantization. In *Boundary value problems, Schrödinger operators, deformation quantization*, volume 8 of *Math. Top.*, pages 206–318. Akademie Verlag, Berlin, 1995.
- [FG91] Daniel S. Freed and Robert E. Gompf. Computer calculation of Witten’s 3-manifold invariant. *Comm. Math. Phys.*, 141(1) :79–117, 1991.
- [FU07] T. Foth and A. Uribe. The manifold of compatible almost complex structures and geometric quantization. *Comm. Math. Phys.*, 274(2) :357–379, 2007.
- [Gar04] S. Garoufalidis. On the characteristic and deformation varieties of a knot. In *Proceedings of the Casson Fest*, volume 7 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 291–309 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004.
- [GL05] S. Garoufalidis and Thang T. Q. Lê. The colored Jones function is q -holonomic. *Geom. Topol.*, 9 :1253–1293 (electronic), 2005.
- [GM00] V. L. Ginzburg and R. Montgomery. Geometric quantization and no-go theorems. In *Poisson geometry (Warsaw, 1998)*, volume 51 of *Banach Center Publ.*, pages 69–77. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2000.
- [GS82] V. Guillemin and S. Sternberg. Geometric quantization and multiplicities of group representations. *Invent. Math.*, 67(3) :515–538, 1982.
- [Gui84] Victor Guillemin. Toeplitz operators in n dimensions. *Integral Equations Operator Theory*, 7(2) :145–205, 1984.
- [Gui93] V. Guillemin. Residue traces for certain algebras of Fourier integral operators. *J. Funct. Anal.*, 115(2) :391–417, 1993.
- [Hab02] Kazuo Habiro. On the quantum \mathfrak{sl}_2 invariants of knots and integral homology spheres. In *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, volume 4 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 55–68 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

- [Han05] K. Hansen. Analytic asymptotic expansions of the Reshetikhin–Turaev invariants of Seifert 3-manifolds for $SU(2)$. *ArXiv Mathematics e-prints*, October 2005.
- [HC56] Harish-Chandra. Representations of semisimple Lie groups. V. *Amer. J. Math.*, 78 :1–41, 1956.
- [Hik04] K. Hikami. Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot. *Internat. J. Math.*, 15(9) :959–965, 2004.
- [Hik05] K. Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, 16(6) :661–685, 2005.
- [Hir66] F. Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*. Third enlarged edition. New appendix and translation from the second German edition by R. L. E. Schwarzenberger, with an additional section by A. Borel. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [Hit90] N. J. Hitchin. Flat connections and geometric quantization. *Comm. Math. Phys.*, 131(2) :347–380, 1990.
- [HK07] B. C. Hall and W. D. Kirwin. Unitarity in “quantization commutes with reduction”. *Comm. Math. Phys.*, 275(2) :401–422, 2007.
- [Hör71] Lars Hörmander. Fourier integral operators. I. *Acta Math.*, 127(1-2) :79–183, 1971.
- [HT02] S. K. Hansen and T. Takata. Quantum invariants of Seifert 3-manifolds and their asymptotic expansions. In *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, volume 4 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 69–87 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [Jef92] L. C. Jeffrey. Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation. *Comm. Math. Phys.*, 147(3) :563–604, 1992.
- [Kla91] Eric Paul Klassen. Representations of knot groups in $SU(2)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 326(2) :795–828, 1991.
- [KM95] Michael Kapovich and John Millson. On the moduli space of polygons in the Euclidean plane. *J. Differential Geom.*, 42(2) :430–464, 1995.
- [KM04] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Witten’s conjecture and property P. *Geom. Topol.*, 8 :295–310 (electronic), 2004.

- [Kod53] K. Kodaira. On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 39 :1268–1273, 1953.
- [Kos70] Bertram Kostant. On certain unitary representations which arise from a quantization theory. In *Group Representations in Math. and Phys. (Battelle Seattle 1969 Rencontres)*, Lecture Notes in Physics, Vol. 6, pages 237–253. Springer, Berlin, 1970.
- [KS01] Alexander V. Karabegov and Martin Schlichenmaier. Identification of Berezin-Toeplitz deformation quantization. *J. Reine Angew. Math.*, 540 :49–76, 2001.
- [Las98] Yves Laszlo. Hitchin’s and WZW connections are the same. *J. Differential Geom.*, 49(3) :547–576, 1998.
- [Lic91] W. B. R. Lickorish. Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra. *Math. Ann.*, 290(4) :657–670, 1991.
- [LT11] T. T. Q. Le and A. T. Tran. On the AJ conjecture for knots. *ArXiv e-prints*, November 2011.
- [Lu00] Zhiqin Lu. On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch. *Amer. J. Math.*, 122(2) :235–273, 2000.
- [LZ99] R. Lawrence and D. Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. *Asian J. Math.*, 3(1) :93–107, 1999. Sir Michael Atiyah : a great mathematician of the twentieth century.
- [MM07] Xiaonan Ma and George Marinescu. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, volume 254 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [Mor95] H. R. Morton. The coloured Jones function and Alexander polynomial for torus knots. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 117(1) :129–135, 1995.
- [MW98] E. Meinrenken and C. Woodward. Hamiltonian loop group actions and Verlinde factorization. *J. Differential Geom.*, 50(3) :417–469, 1998.
- [Pau98] C. Pauly. Fibrés paraboliques de rang 2 et fonctions thêta généralisées. *Math. Z.*, 228(1) :31–50, 1998.
- [Rob99] Justin Roberts. Classical $6j$ -symbols and the tetrahedron. *Geom. Topol.*, 3 :21–66 (electronic), 1999.
- [Roz95] L. Rozansky. A large k asymptotics of Witten’s invariant of Seifert manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 171(2) :279–322, 1995.

- [Roz96a] L. Rozansky. A contribution of the trivial connection to the Jones polynomial and Witten's invariant of 3d manifolds. I, II. *Comm. Math. Phys.*, 175(2) :275–296, 297–318, 1996.
- [Roz96b] L. Rozansky. Residue formulas for the large k asymptotics of Witten's invariants of Seifert manifolds. The case of $SU(2)$. *Comm. Math. Phys.*, 178(1) :27–60, 1996.
- [RSW89] T. R. Ramadas, I. M. Singer, and J. Weitsman. Some comments on Chern-Simons gauge theory. *Comm. Math. Phys.*, 126(2) :409–420, 1989.
- [RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3) :547–597, 1991.
- [Sch10] Martin Schlichenmaier. Berezin-Toeplitz quantization for compact Kähler manifolds. A review of results. *Adv. Math. Phys.*, pages Art. ID 927280, 38, 2010.
- [Ser95] Jean-Pierre Serre. Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts (d'après Armand Borel et André Weil). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 2*, pages Exp. No. 100, 447–454. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [Sou70] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Maitrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.
- [Tuy87] G. M. Tuynman. Quantization : towards a comparison between methods. *J. Math. Phys.*, 28(12) :2829–2840, 1987.
- [TUY89] Akihiro Tsuchiya, Kenji Ueno, and Yasuhiko Yamada. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. In *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, volume 19 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 459–566. Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [Wei64] A. Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111 :143–211, 1964.
- [Wit89] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3) :351–399, 1989.
- [Woo92] N. M. J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1992. Oxford Science Publications.

- [Xu12] Hao Xu. A Closed Formula for the Asymptotic Expansion of the Bergman Kernel. *Comm. Math. Phys.*, 314(3) :555–585, 2012.
- [Zel97] Steven Zelditch. Index and dynamics of quantized contact transformations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(1) :305–363, 1997.
- [Zel98] Steve Zelditch. Szegő kernels and a theorem of Tian. *Internat. Math. Res. Notices*, (6) :317–331, 1998.

Table des matières

1	Quantification	9
1.1	Fibrés préquantifiants	9
1.2	Structures complexes	11
1.3	Correction métaplectique	14
1.4	Orbites coadjointes	15
1.5	Fonctions theta et représentation de Weil	16
2	Limite semi-classique	19
2.1	Opérateurs de Toeplitz	19
2.1.1	Composition et symboles	19
2.1.2	Équivalence semi-classique	21
2.1.3	Symboles covariants non-normalisés et noyau de Szegő	22
2.1.4	Des exemples	24
2.1.5	Théorie homogène	25
2.2	États Lagrangiens	26
2.3	Modes et conditions de Bohr-Sommerfeld	30
2.4	Quantification et structures complexes	34
2.5	Quantification et symplectomorphisme	37
2.6	Réduction Symplectique	39
2.7	Espaces de polygones	44
3	Théorie quantique des champs	49
3.1	Espaces de modules de fibrés	49
3.2	Une quantification de l'espace des modules	50
3.3	La construction de E. Witten	52
3.4	L'approche des topologues	55
3.5	Quantification des espaces de modules	57
3.6	Autres approches	58

4	Conjecture asymptotique de Witten	61
4.1	Conjectures semi-classiques	61
4.2	Cylindres et tores d'applications	67
4.3	Complémentaire de noeud	70