Quantification des variétés kähleriennes, limite semi-classique et théorie quantique des champs topologiques

Laurent Charles

Soutenance d'habilitation

Outline

Quantification des variétés kähleriennes

Les données

- M une variété complexe compacte connexe,
- $L \to M$ un fibré en droite holomorphe hermitien > 0,
- $\delta \to M$ un fibré en droite holomorphe hermitien qui est une racine carrée du fibré canonique $(\det T^{1,0}M)^*$.

Classique

L'espace des phases est (M, ω) où $\frac{1}{i}\omega$ est la courbure de Chern de L.
Si $s : U \to L$ est un repère holomorphe,

$$\omega = i \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

où $\varphi = -2 \ln |s|$.

Quantique

$\mathcal{Q}_k = H^0(M, L^k \otimes \delta)$ muni du produit scalaire

$$\langle s, t \rangle = \int_M (s, t)(x) \mu(x)$$

avec $\mu = \omega^n / n!$ la mesure de Liouville

La limite semi-classique est $k \to \infty$.

Etats lagrangiens [C03b]

Soit $\Gamma \subset M$ une sous-variété lagrangienne et

$$\Psi = (\Psi_k \in \mathcal{Q}_k = H^0(M, L^k \otimes \delta), \quad k \in \mathbb{N}^*)$$

un état lagrangien supporté par Γ.

Propriétés principales

Pour tout $x \in M \setminus \Gamma$, $\Psi_k(x) = \mathcal{O}(k^{-\infty})$ et pour tout $x \in \Gamma$,

$$\Psi_k(x) = k^{n/4} u(x)^k (\sigma(x) + \mathcal{O}(k^{-1}))$$

avec $u(x) \in L_x$ de norme 1 et $\sigma(x) \in \delta_x$. De plus,

- u est une section plate de $L \to \Gamma$ pour la connexion de Chern.
- comme $(\det T^{1,0}M)^*|_\Gamma \simeq (\det T\Gamma \otimes \mathbb{C})^*$, la section σ de $\delta \to \Gamma$ est une racine carrée d'un élément de volume de Γ, que l'on appelle le symbole de (Ψ).

Asymptotique des normes

$$\|\Psi_k\|^2 = \int_\Gamma |\sigma|^2 + \mathcal{O}(k^{-1})$$

Etats propres des opérateurs de Toeplitz

On suppose que $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ et soit $H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.
Introduisons pour tout entier k, l'endomorphisme

$$\hat{H}_k : \mathcal{Q}_k \to \mathcal{Q}_k, \qquad \psi \to \Pi_k\big((H + \tfrac{1}{k}\Delta H)\psi\big)$$

où Π_k est le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^\infty(M, L^k \otimes \delta)$ sur $\mathcal{Q}_k$.
Soit une famille d'états propres

$$\Psi_k \in \mathcal{Q}_k, \qquad \hat{H}_k \Psi_k = \lambda_k \Psi_k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

Théorème (C03b,C06a)

Supposons que $\lambda_k = E + \frac{1}{k} E_1 + \ldots$ avec E une valeur régulière de H. Alors quitte à le renormaliser, (Ψ_k) est un état lagrangien supporté par $H^{-1}(E)$ dont le symbole σ vérifie l'équation de transport

$$\mathcal{L}_X \sigma = i E_1 \sigma$$

où X est le champ hamiltonien de H.

Conditions de Bohr-Sommerfeld

Théorème (C03b,C06a)

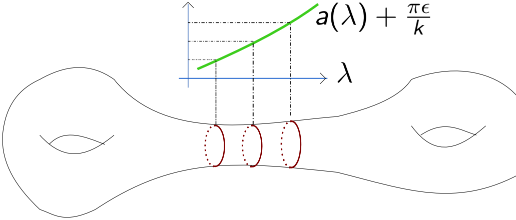
Au voisinage d'une valeur régulière de E de H telle que $H^{-1}(E)$ soit connexe, on a

$$\lambda \in \mathrm{Spectre}(\hat{H}_k) + \mathcal{O}(k^{-2}) \Leftrightarrow a(\lambda) + \frac{\pi\epsilon}{k} \in \frac{2\pi}{k}\mathbb{Z} + \mathcal{O}(k^{-2})$$

avec $\exp(ia(\lambda))$ *l'holonomie de* $L \to H^{-1}(\lambda)$ *et* $\epsilon = 0, 1$ *l'indice de* $H^{-1}(E)$.

Preuve

$\exp(ik(a(\lambda) + \frac{\pi\epsilon}{k}))$ est l'holonomie de $L^k \otimes \delta \to H^{-1}(\lambda)$ pour la connexion dont les sections plates vérifient $(\nabla_X^{L^k} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathcal{L}_X^{\delta})s = 0$.



Sur la définition de l'indice

Il tient le rôle de l'indice de Maslov pour les opérateurs de Toeplitz.
Le fibré de demi-forme δ détermine

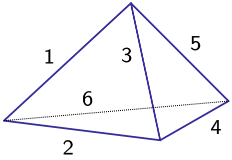
$$\varphi \in \mathrm{Mor}(H_1(U(M)), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \text{ tel que } \varphi(U_x(M)) = 1$$

où $U(M) = (TM \setminus 0)/\mathbb{R}^+$.
L'indice d'une courbe immergée $\gamma : S^1 \to M$ est $\varphi([\gamma'])$.

Remarques supplémentaires

- Généralisation en dimension quelconque pour des systèmes complètement intégrables d'opérateurs de Toeplitz
- thèse de Le Floch: conditions de Bohr-Sommerfeld singulières.

Asymptotiques des 6j-symboles et espace de polygones



Théorème (Roberts, 99)

Si $\ell_1, \ldots, \ell_6 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ sont les longueurs d'un tétraèdre euclidien T non dégénéré, alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} k\ell_1 & k\ell_2 & k\ell_3 \\ k\ell_4 & k\ell_5 & k\ell_6 \end{array} \right\} = \frac{k^{-3/2}}{(12\pi V)^{1/2}} \Big(\cos(k\alpha + \beta) + \mathcal{O}(k^{-1}) \Big)$$

où V est le volume de T, $\alpha = \sum \ell_i \theta_i$ avec θ_i les angles diédraux de T et $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sum \theta_i$.

Une autre preuve [C10d]

montrer que c'est l'asymptotique du produit scalaire de deux états lagrangiens.

Définition des $6j$-symboles

Soit $G = SU(2)$ et pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $\rho_m : G \to U(V_m)$ la représentation irréductible de dimension $2m+1$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \ell_1 & \ell_2 & m \\ \ell_3 & \ell_4 & m' \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{mm'}} \langle \Psi_m, \Psi'_{m'} \rangle_{\mathcal{Q}_\ell}$$

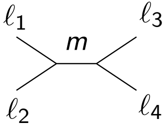
où

$$\mathcal{Q}_\ell = (V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2} \otimes V_{\ell_3} \otimes V_{\ell_4})^G, \qquad \ell \in (\tfrac{1}{2}\mathbb{N})^4$$

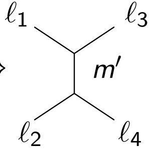
et

$$\hat{H}_\ell \Psi_m = (m^2 + \tfrac{1}{2})\Psi_m, \qquad \hat{H}'_\ell \Psi'_{m'} = ((m')^2 + \tfrac{1}{2})\Psi'_{m'}$$

avec $\hat{H}_\ell$, $\hat{H}'_\ell$ les restrictions à $\mathcal{Q}_\ell$ des Casimir de $\rho_{\ell_1} \otimes \rho_{\ell_2} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ et $\rho_{\ell_1} \otimes \mathrm{id} \otimes \rho_{\ell_3} \otimes \mathrm{id}$.



$$= \sum \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_1 & \ell_2 & m \\ \ell_3 & \ell_4 & m' \end{array} \right\}$$

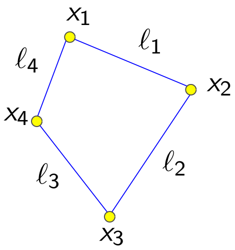


Réalisation géométrique

D'après le théorème "$[Q, R] = 0$" de Guillemin-Sternberg, on a que

$$\mathcal{Q}_{k\ell} \simeq H^0(M_\ell, L_\ell^k)$$

où M_ℓ est l'espace des quadrilatères de $\mathbb{R}^3$ de côtés de longueurs ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 à isométrie directe près.



D'après le théorème "$[Q, R] = 0$" [C06b-C10d] pour les Toeplitz ,

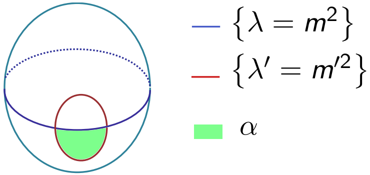
$$\hat{H} = (\tfrac{1}{k^2}\hat{H}_{k\ell},\ k \in \mathbb{N}^*), \quad \hat{H}' = (\tfrac{1}{k^2}\hat{H}'_{k\ell},\ k \in \mathbb{N}^*)$$

sont des opérateurs de Toeplitz de symboles principaux

$$\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_3 - x_1|^2, \qquad \lambda'(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_2 - x_4|^2$$

Donc (Ψ_{km}) et $(\Psi'_{km'})$ sont donc des états lagrangiens supportés par $\{\lambda = m^2\}$ et $\{\lambda' = m'^2\}$ respectivement.

D'après [C10d], le produit scalaire de deux états lagrangiens dont les supports s'intersectent transversalement, admet un développement asymptotique, dont on sait calculer les termes principaux.

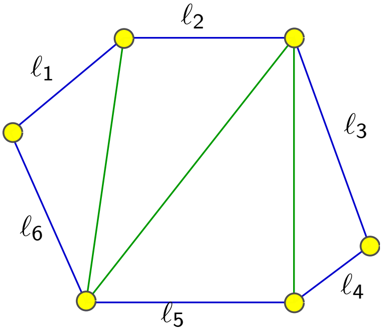


On retrouve l'asymptotique de J. Roberts.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} k\ell_1 & k\ell_2 & km \\ k\ell_3 & k\ell_4 & km' \end{array} \right\} = \frac{k^{-3/2}}{(12\pi V)^{1/2}} \Big(\cos(k\alpha + \beta) + \mathcal{O}(k^{-1}) \Big)$$

Généralisation

Ce qui se précède se généralise [C10d] à
M_ℓ = espace de polygones à n côtés de longueurs $\ell_1, \ldots, \ell_n$.
avec $\mathcal{Q}_\ell = (V_{\ell_1} \otimes \ldots \otimes V_{\ell_n})^G$
De plus, pour toute décomposition en triangles du polygone standard à n côtés, on a un système intégrable quantique, i.e. $n-3$ opérateurs de Toeplitz auto-adjoints qui commutent deux à deux dont les symboles forment un système intégrable classique.



Autres résultats et conjectures

- Asymptotique des $6j$-symboles quantiques (Taylor-Woodward 05, Marché-Paul 13)
- soit $\mathcal{M}_\ell =$ espace de polygones sphériques à n côtés de longueurs $\ell_1, \ldots, \ell_n$.
  La quantification de $\mathcal{M}_\ell$ est défini en théorie quantique des champs topologiques comme $V_k(\Sigma)$ où Σ est la sphère privée de n points coloriés par les ℓ_i.
  A chaque décomposition en pantalons de Σ est associé une base de $V_k(\Sigma)$.
  On conjecture que les vecteurs de cette base sont des états lagrangiens.

Polynômes de Jones et états lagrangiens

Etant donné un noeud K de S^3, on définit ses polynômes de Jones $P_n \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$, $n \in \mathbb{Z}$.
Question: quelle information peut-on extraire de (P_n) ?
la variété des caractères du complémentaire du noeud, sa torsion de Reidemeister et les invariants de Chern-Simons.

TQFT pour le groupe $G = SU(2)$ et le niveau k

Dans l'approche des topologues (Reshetikhin-Turaev 91), on définit

- pour toute surface fermée Σ, un espace hermitien $V_k(\Sigma)$.
- pour toute variété M^3 compacte de bord Σ, $Z_k(M) \in V_k(\Sigma)$.

Dans la construction géométrique (Witten, Hitchin),

$$V_k^W(\Sigma) = H^0(\mathcal{M}(\Sigma), L_\Sigma^k)$$

où $\mathcal{M}(\Sigma) = \mathrm{Mor}(\pi_1(\Sigma), G)/G$ et L_Σ le fibré de Chern-Simons.

État du noeud

Soit $E_k = S^3 \setminus N_K$ avec N_K un voisinage tubulaire de K. Alors $Z_k(E_K) \in V_k(\Sigma)$ où Σ est le tore périphérique de K.
Dans la base de Verlinde $(e_1, \ldots, e_{k-1})$ associée à la longitude λ et au méridien μ de Σ, l'on a

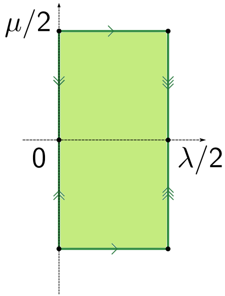
$$Z_k(E_K) = \frac{\sin(\pi/k)}{\sqrt{k}} \sum_{\ell=1}^{k-1} P_\ell(-e^{i\pi/2k}) e_\ell.$$

L'oreiller

$\mathcal{M}(\Sigma) = H_1(\Sigma, \mathbb{R})/H_1(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}_2$. On a un isomorphisme (essentiellement unique)

$$V_k(\Sigma) \simeq H^0(\mathcal{M}(\Sigma), L_\Sigma^k \otimes \delta)$$

qui commute avec l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma) \simeq \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$.



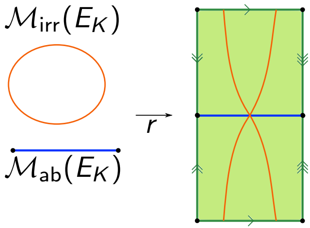
Limite semi-classique

Soit $\mathcal{M}(E_K) = \mathrm{Mor}(\pi_1(E_K), G)/G$ et $r : \mathcal{M}(E_K) \to \mathcal{M}(\Sigma)$ l'application de restriction. Alors

- L'image de r est lagrangienne,
- L'invariant de Chern-Simons définit une section plate u_K de $r^* L_\Sigma \to \mathcal{M}(E_K)$,
- La torsion de Reidemeister définit un élément de volume $\mathbb{T}$ de $\mathcal{M}(E_K)$.

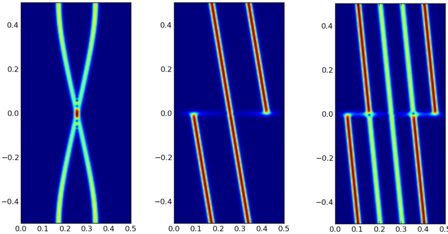
Conjecture

$(Z_k(M))$ est un état lagrangien supporté par l'image de r, dont les données associées sont la section u_K et une racine carrée de $\mathbb{T}$.



Figure

norme ponctuelle de $Z_k(E_K)$ pour $k = 100$ et K le noeud de huit, le noeud de trèfle et le noeud torique (2,5)



Théorème (C-Marché 11ab, C11)

La conjecture est vraie pour le noeud de huit et les noeuds toriques.

Preuve

- relations aux q-différences des polynômes de Jones.
- La torsion de Reidemeister vérifie une équation de transport

Conjecture de Witten

Cette conjecture prédit l'asymptotique de $Z_k(M)$ lorsque M est une variété fermée et a été établie pour de nombreuses variétés de Seifert (Jeffrey 92, Rozansky 95-96, Lawrence-Zagier 99, Hikami 04, Hansen 05).

Théorème (C-Marché 11b)

Soit M la variété obtenue par chirurgie de pente p/q sur le noeud de huit. Si p n'est pas divisible par 4 et $H^1(M, Ad_\rho) = 0$ pour tout $\rho \in \mathcal{M}(M)$, alors

$$Z_k(M) = \sum_{\rho \in \mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(M)} e^{i \frac{m(\rho)}{4}\pi} \sqrt{\mathbb{T}(\rho)} e^{ik\,\mathrm{CS}(\rho)} + \mathcal{O}(k^{-1/2})$$

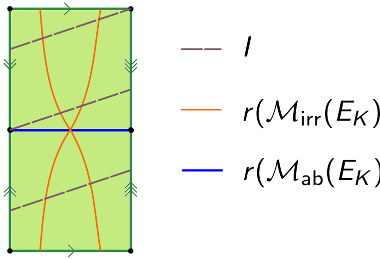
où pour toute représentation ρ, $m(\rho) \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{T}(\rho)$ est la torsion de Reidemeister de Ad_ρ et $\mathrm{CS}(\rho)$ est l'invariant de Chern-Simons de ρ.

Preuve

$M = E_K \cup_h N$ où N est un tore solide et $h = \partial N \to \Sigma$ un difféomorphisme, donc

$$Z_k(M) = \left\langle Z_k(E_K), Z_k(N,h) \right\rangle_{V_k(\Sigma)}$$

produit scalaire d'états lagrangiens supportés respect. par $r(\mathcal{M}(E_K))$ et l'image I de $\mathcal{M}(N) \to \mathcal{M}(\Sigma)$.



Représentation quantique du groupe modulaire

Propriété générale de la tqft (V_k, Z_k)

A toute surface Σ, est associé une représentation projective r_k du groupe modulaire de Σ dans $V_k(\Sigma)$. De plus, pour tout difféomorphisme φ de Σ,

$$\mathrm{tr}(r_k(\varphi)) = Z_k(M_\varphi)$$

où M_φ est le tore d'application de φ.

$$M_\varphi = \big(M \times [0,1]\big)/((x,0) \sim (\varphi(x),1)).$$

On peut par cette formule vérifier la conjecture de Witten:

- Jeffrey (92) pour les difféomophismes du tore,
- Andersen (11) pour les difféomorphisme d'ordre fini.

Lorsque Σ est une surface de genre $\geqslant 2$ avec un point marqué colorié par $-\,\mathrm{id}$, on peut aussi définir géométriquement les $r_k(\varphi)$ par la connexion de Hitchin. Dans ce cas, j'ai montré [C10a] que pour tout difféomorphisme φ de Σ,

1. $(r_k(\varphi))$ est un opérateur intégral de Fourier, i.e. son noyau au sens de Schwartz est un état lagrangien.
2. $Z_k(M_\varphi)$ vérifie la conjecture de Witten sous la bonne hypothèse de rigidité.

La preuve de (1) repose sur une analogie entre la connexion de Hitchin et l'équation de Schödinger qui avait été observé par Foth-Uribe (07).
La preuve de (2) passe par une formule de Lefschetz généralisée.

Sur la preuve de la conjecture de Witten

La nouveauté des résultats précédents: on traite des variétés hyperboliques.
Dans les deux cas, on décompose $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$ (présentation par chirurgie ou bien tore d'application).
Puis nous avons

1. montré que $Z_k(M_1)$ et $Z_k(M_2)$ sont des états lagrangiens de $V_k(\Sigma)$,
2. estimé le produit scalaire $\langle Z_k(M_1), Z_k(M_2) \rangle_{V_k(\Sigma)}$

La preuve de (1) utilise que les états propres des opérateurs de Toeplitz en dimension 2 sont des états lagrangiens, ou que le transport parallèle pour la connexion de Hitchin est un opérateur intégral de Fourier.
La preuve de (2) utilise la formule donnant le produit scalaire des états lagrangiens, ou la formule de Lefschetz généralisée.

Quantification des symplectomorphismes

Les automorphismes de (M, L, δ) agissent sur $\mathcal{Q}_k = H^0(M, L^k \otimes \delta)$. On veut définir plus généralement une représentation du groupe des symplectomorphismes, au moyen d'opérateurs intégraux de Fourier.

Théorème (C06)

Si $H_1(M) = 0$, on a une représentation asymptotique d'une extension centrale G par $\mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe des symplectomorphismes, c'est à dire une famille d'applications

$$\rho_k : G \to \mathrm{U}(\mathcal{Q}_k), \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

telle que $\rho_k(\phi \circ \psi) = \rho_k(\phi) \circ \rho_k(\psi) + \mathcal{O}(k^{-1})$

On a aussi une formule de Lefschetz qui donne l'asymptotique de la trace de $\rho_k(\phi)$ lorsque ϕ est non dégénéré [C10].
De plus, la solution de l'equation de Schrödinger avec pour hamiltonien un opérateur de Toeplitz est $\rho_k(\phi_t) + \mathcal{O}(k^{-1})$ où ϕ_t est le flot hamiltonien du symbole principal de l'opérateur.