Equations différentielles ordinaires

Laurent Charles

10 janvier 2019

Notes pour la troisième partie d'un cours enseigné à l'ens de 2016 à 2018.

Table des matières

1 Équations linéaires et affines dépendant du temps

1.1 Le cas linéaire

Soient E un espace de Banach, I un intervalle et $A : I \to \mathcal{L}(E)$ une application continue. Considérons l'équation linéaire :

$$u : I \to E \text{ dérivable telle que } u'(t) = A(t)u(t),\ \forall t \in I \tag{1}$$

Observons que A étant continue, toute solution u est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus l'espace des solution est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

Théorème 1.1.1. *Pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, (1) a une unique solution u vérifiant $u(t_0) = x_0$. De plus si $M = \sup_{s\in I} \|A(s)\|$ est fini, alors pour tout $t \in I$, l'on a*

$$\|u(t)\| \leqslant e^{|t-t_0|M}\|x_0\|. \tag{2}$$

Démonstration. 1. Si $t \to A(t)$ est constante égale à A, alors $u(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ est solution. Pour voir qu'elle est unique, considérer une autre solution v et dériver $e^{-tA}v(t)$.

2. Si la dimension de E est 1, alors $A(t) = a(t)\,\mathrm{id}_E$ avec $a(t) \in \mathbb{R}$. Alors

$$u(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds\right) \tag{3}$$

est solution. Pour montrer l'unicité, dériver $v(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}$. On peut essayer de généraliser (3) en dimension supérieure, mais cela échoue. En effet il est faux que la dérivée de l'application exponentielle de $\mathcal{L}(E)$ en A soit $B \to Be^A$.

3. Pour traiter le cas général, on transforme l'équation différentielle en une équation intégrale. Soit S l'endomorphisme de $\mathcal{C}(I, E)$ défini par

$$(Su)(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)\ ds$$

Alors nous avons l'équivalence

$$(u \text{ vérifie (1) et } u(t_0) = x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 + Su = u$$

En effet, si u est solution de (1), elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)\ ds = u(t_0) + (Su)(t)$. La réciproque est immédiate.

4. Pour résoudre $x_0 + Su = u$, il suffit de montrer que $\mathrm{id} - S$ est inversible est de poser $u = (\mathrm{id} - S)^{-1}(x_0)$. Supposons I fermé et borné. On munit $\mathcal{C}(I, E)$ de la norme sup et $\mathcal{L}(\mathcal{C}(I, E))$ de la norme associée. Ces deux espaces sont des espaces de Banach car E en est un. Pour montrer que $\mathrm{id} - S$ est inversible, il suffit alors de montrer que la série de Neumann $\sum S^n$ est normalement convergente. Montrons par récurrence sur n que

$$\|S^n(u)(t)\| \leqslant \frac{\big(M|t - t_0|\big)^n}{n!} \|u\|_I \tag{4}$$

avec $\|u\|_I = \sup_{t \in I} \|u(t)\|$ et $M = \sup_{t \in I} \|A(t)\|$. Pour cela, on écrit avec $t \geqslant t_0$

$$\begin{aligned} \|(S^{n+1}u)(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|(S^n u)(s)\| \, ds \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}\|u\|_I}{n!} \int_{t_0}^{t} \big(|t - t_0|\big)^n \, ds = \frac{\big(M|t - t_0|\big)^{n+1}}{(n+1)!} \|u\|_I \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'hypothése de récurrence (4) à la deuxième ligne. On raisonne de même si $t \leqslant t_0$.

D'après (4), l'on a $\|S^n\| \leqslant (M\ell)^n / n!$ avec ℓ la longueur de I. Ceci établit la convergence normale de $\sum S^n$. Donc l'unique solution de (1) vérifiant $u(t_0) = x_0$ est donné par

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (S^n x_0)(t), \qquad \forall t \in I.$$

Et l'on déduit à nouveau par (4) que $\|u(t)\| \leqslant e^{M|t - t_0|} \|x_0\|$.

5. Pour traiter le cas d'un intervalle I quelconque, on introduit deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $a_n \leqslant t_0 \leqslant b_n$, (a_n) converge en décroissant vers $\inf I$, (b_n) converge en croissant vers $\sup I$. Si $\inf I$ est dans I, on prend $a_n = \inf I$. Et de même, si $\sup I \in I$, $b_n = \sup I$. D'après ce qui précède, l'équation (1) a une unique soultion u_n sur $[a_n, b_n]$. Donc la restriction de u_{n+1} à $[a_n, b_n]$ coincide avec u_n. Donc il existe une unique fonction $u : I \to E$ qui prolonge tous les u_n. On se convainc facilement que u est l'unique solution de (1). Elle vérifie (2) car les u_n aussi. □

1.2 Résolvente

Notons $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des solutions de (1). D'après le théorème 1.1.1, pour tout $t \in I$, l'application $R_t : \mathcal{E} \to E$ qui envoie u sur $u(t)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Pour tout $s, t \in I$, on introduit la *résolvante*

$$R_s^t := R_t R_s^{-1} : E \to E.$$

C'est l'application qui envoie $x \in E$ sur la valeur en t de la solution de (1) qui vaut x en s.

Proposition 1.2.1. *1.* $R_t^t = \mathrm{id}$, $R_t^r R_s^t = R_s^r$.

2. $R_s^t \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\|R_s^t\| \leqslant e^{M|t-s|}$ *où* $M = \sup_{[s,t]\cup[t,s]} \|A\|$.

3. l'application $I^2 \to \mathcal{L}(E)$ *qui envoie* (s,t) *sur* R_s^t *est continue, de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intérieur de* I^2 *avec pour dérivées partielles*

$$\frac{\partial R_s^t}{\partial t} = A(t) R_s^t, \qquad \frac{\partial R_s^t}{\partial s} = -R_s^t A(s)$$

Démonstration. 1. est immédiat. 2. découle du théorème 1.1.1. Pour montrer 3., on se donne $t_0 \in I$ et l'on écrit $R_s^t = R_{t_0}^t R_s^{t_0} = R_{t_0}^t (R_{t_0}^s)^{-1}$. Nous avons donc séparé les variables s et t et il suffit de montrer que l'application $I \to \mathcal{L}(E)$ qui envoie t sur $R_{t_0}^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Lorsque E est de dimension finie, cela équivaut à ce que pour tout $x \in E$, l'application $t \to R_{t_0}^t x$ est de classe $\mathcal{C}^1$. C'est bien vrai puisque $t \to R_{t_0}^t x$ est par définition la solution de (1) avec condition initiale $u(t_0) = x$. En général, si E est un espace de Banach, l'on considère l'équation différentielle

$$B : I \to \mathcal{L}(E) \text{ dérivable telle que } B'(t) = A(t) \circ B(t),\ \forall t \in I \tag{5}$$

On peut résoudre cette équation avec le théorème 1.1.1. En effet, l'application linéaire $G : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ telle que $G(A)(M) = AM$ étant continue, l'application $I \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$, $t \to G(A(t))$ est continue. Soit $B : I \to \mathcal{L}(E)$ la solution de (5) vérifiant $B(t_0) = \mathrm{id}$. En dérivant $t \to B(t)u$, on constate que $B(t) = R_{t_0}^t$. Ainsi $t \to R_{t_0}^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec pour dérivée $A(t) R_{t_0}^t$.

On vient de voir que $\partial R_s^t / \partial t = A(t) R_s^t$. Par conséquent,

$$\frac{\partial R_s^t}{\partial s} = \frac{\partial (R_t^s)^{-1}}{\partial s} = -(R_t^s)^{-1}(A(s) R_t^s)(R_t^s)^{-1} = -R_s^t A(s) R_t^s R_s^t = -R_s^t A(s),$$

ce qui termine la preuve. □

1.3 Le cas affine, principe de Duhamel

Donnons nous à présent une application continue $b : I \to E$ et considérons l'équation affine

$$u'(t) = A(t) u(t) + b(t), \qquad \forall t \in I \tag{6}$$

L'ensemble des solutions, s'il est non vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ dirigée par l'espace vectoriel des solutions de (1). L'existence des solution découle du principe de Duhamel, qui est énoncé dans la proposition qui suit.

Proposition 1.3.1. *Soit t_0 dans I. Alors u est une solution de (6) si et seulement si*

$$u(t) = R_{t_0}^t u(t_0) + \int_{t_0}^t R_s^t b(s)\, ds, \qquad \forall t \in I.$$

Démonstration. Toute fonction $u : I \to E$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = R_{t_0}^t v(t)$ avec $v : I \to E$ donnée par $v(t) = R_t^{t_0} u(t)$. Alors u est dérivable ssi v l'est et lorsque c'est le cas,

$$u'(t) = A(t) R_{t_0}^t v(t) + R_{t_0}^t v'(t) = A(t) u(t) + R_{t_0}^t v'(t)$$

donc l'équation (6) equivaut à $R_{t_0}^t v'(t) = b(t)$ autrement dit $v'(t) = R_{t_0}^t b(t)$ autrement dit $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t R_s^{t_0} b(s)\, ds$. □

2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

2.1 Le théorème

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de E, I un intervalle ouvert et $X : U \times I \to E$ une application continue. On appelle X un *champ de vecteur* de U. Nous allons étudier les solutions de l'équation différentielle :

$$u'(t) = X(u(t), t) \tag{7}$$

où $u : I \to U$ est dérivable. Nous avons déjà traité le cas d'un champ affine $X(x, t) = A(t)x + B(t)$. Dans le cas général, deux phénomènes nouveaux se produisent.

1. pour le champ $X(x, t) = x^2$ avec $U = E = \mathbb{R}$, $u(t) = -1/t$ est solution de (7), mais n'est pas définie en 0 et ne peut pas être prolongée.
2. pour le champ $X(x, t) = 2|x|^{1/2}$ avec $U = E = \mathbb{R}$, $v(t) = 0$ et $w(t) = \text{signe}(t) t^2$ sont deux solutions distinctes de (7) qui ont même condition initiale : $v(0) = w(0)$. On peut même construire une famille à deux paramètres de solutions s'annulant en 0 (exercice).

Une *courbe intégrale* de X est un couple (J, u) où J est un intervalle ouvert contenu dans I et $u : J \to E$ est une application dérivable à valeurs dans U telle que

$$\forall \in J, \qquad u'(t) = X(u(t), t)$$

On dit que (J, u) a pour *condition initiale* $(x_0, t_0) \in U \times I$ si $t_0 \in J$ et $u(t_0) = x_0$.

Théorème 2.1.1. *Soient $X : U \times I \to E$ un champ de classe $\mathcal{C}^1$ ou plus généralement continue localement lipschitzien en x localement uniformément en t. Soit $c = (x_0, t_0) \in U \times I$. Alors*

1. *X admet une courbe intégrale de condition initiale c.*
2. *pour toutes courbes intégrales (I_1, u_1) et (I_2, u_2) de condition initiale c, $u_1 = u_2$ au voisinage de t_0*

Remarque 2.1.2. L'hypothèse que X est localement lipschitzien par rapport à x localement uniformément par rapport à t signifie : pour tout $(x_0, t_0) \in U \times I$, il existe $U' \subset U$ voisinage ouvert de x_0, $I' \subset I$ voisinage ouvert de t_0 et $c > 0$ tel que

$$\|X(x, t) - X(x', t)\| \leqslant c\|x - x'\|, \qquad \forall x, x' \in U',\ t \in I'. \qquad \square$$

Pour la preuve, on transformera l'équation différentielle en une équation intégrale et on appliquera le théorème du point fixe sur un espace de fonctions continues $\mathcal{C}(J, K)$ où J est un intervalle ouvert, K une partie compacte de E et avec la distance $d(f, g) = \sup_{t \in I} \|f(t) - g(t)\|$. On sait déjà que cet espace est complet.

Démonstration. si J est un intervalle ouvert contenue dans I, $\gamma : J \to U$ est continue, on définit $L(\gamma) : J \to E$ par

$$L(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\gamma(s), s)\, ds$$

Du fait que X soit continue, on déduit que $L(\gamma) = \gamma$ si et seulement si (J, γ) est une courbe intégrale de X de condition initiale c. Nous voulons donc montrer l'existence de points fixes de L.

Soient $J_\alpha = t_0 +]-\alpha, \alpha[$ et $V_r = B(x_0, r)$. On se donne des constantes strictement positives r, M et k telles que $J_r \subset I$, $\overline{V}_r \subset U$ et

$$\begin{aligned} \|X(x, t)\| &\leqslant M, \qquad \forall x \in \overline{V}_r,\ t \in J_r \\ \|X(x, t) - X(x', t)\| &\leqslant k\|x - x'\|, \qquad \forall x, x' \in \overline{V}_r,\ t \in J_r \end{aligned} \tag{8}$$

Lemme 2.1.3. *Si α vérifie $0 < \alpha < r$ et $\alpha M \leqslant r$, alors L est une application lipschitzienne de $\mathcal{C}(J_\alpha, \overline{V}_r)$ dans lui-même de rapport αk.*

Démonstration. Soit $\gamma : J_\alpha \to \overline{V}_r$ continue. Alors pour tout $t \in J_\alpha$,

$$\|L(\gamma)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} X(\gamma(s), s)\, ds \right\| \leqslant \alpha M$$

donc L envoie $\mathcal{C}(J_\alpha, \overline{V}_r)$ dans lui-même dès que $\alpha M \leqslant r$. De plus pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}(J_\alpha, \overline{V}_r)$,

$$\begin{aligned} \|L(\gamma_1)(t) - L(\gamma_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \big(X(\gamma_1(s), s) - X(\gamma_2(s), s)\big)\, ds \right\| \\ &\leqslant \alpha k \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty. \end{aligned}$$

□

On choisit α assez petit de sorte à vérifier les hypothèses du lemme et $\alpha k < 1$, et on applique le théorème du point fixe, ce qui nous montre le premier point du théorème. Pour le second point, considérons deux courbes intégrales (I_1, u_1) et (I_2, u_2) de condition initiale c. On choisit α suffisamment petit de sorte que pour $i = 1$ et 2, l'on ait $J_\alpha \subset I_i$, $u_i(J_\alpha) \subset \overline{V}_r$. Alors les restrictions de u_1 et u_2 à J_α sont des points fixes de L. Ce point fixe est unique. □

2.2 Courbes intégrales maximales

Soit $X : U \times I \to E$ un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 2.2.1.

1. *Si (I_1, u_1) et (I_2, u_2) sont deux courbes intégrales de X, alors $I_3 = \{t \in I_1 \cap I_2 / \ u_1(t) = u_2(t)\}$ est vide ou bien coincide avec $I_1 \cap I_2$.*
2. *pour tout $c \in U \times I$, il existe une unique courbe intégrale (I_c, u_c) de condition initiale c qui prolonge toute courbe intégrale de condition initiale c.*
3. *Pour tout $c, c' \in U \times I$, si c' est condition initiale de (I_c, u_c) alors $(I_{c'}, u_{c'}) = (I_c, u_c)$.*

Etant donné deux courbes intégrales (I_1, u_1) et (I_2, u_2), on dit que (I_1, u_1) *prolonge* (I_2, u_2) si $I_2 \subset I_1$ et $u_1 = u_2$ sur I_2. Cela définit une relation d'ordre sur l'ensemble des courbes intégrales. Pour tout $c \in U \times I$, on appellera la courbe (I_c, u_c) la courbe intégrale *maximale* de condition initiale c. Il s'agit du plus grand élément de l'ensemble des courbes intégrales de condition initiale c.

Preuve. 1. I_3 est fermé dans $I_1 \cap I_2$ par continuité de u_1 et u_2. I_3 est aussi ouvert d'après le deuxième point (unicité) du théorème 2.1.1. Enfin $I_1 \cap I_2$ est connexe.

2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des courbes intégrales de condition initiale c. On remarque que pour tout (I_1, u_1), (I_2, u_2) dans $\mathcal{C}$, $u_1 = u_2$ sur $I_1 \cap I_2$ d'après le premier point. On définit alors I_c comme la réunion des J tels que $(J, u) \in \mathcal{C}$ et pour tout $t \in I_c$, l'on pose $u_c(t) = u(t)$ si $(J, u) \in \mathcal{C}$ et $t \in J$. u_c est bien définie par la remarque préliminaire. L'on vérifie immédiatement que c'est bien une courbe intégrale. Enfin, (I_c, u_c) est unique car un plus grand élément est toujours unique.

3. si c' est condition initiale de (I_c, u_c) alors $(I_{c'}, u_{c'})$ prolonge (I_c, u_c), donc c est condition initiale de $(I_{c'}, u_{c'})$ donc (I_c, u_c) prolonge $(I_{c'}, u_{c'})$. $\square$

3 Estimations sur les durées de vie et trajectoires

3.1 Sortie des compacts

Proposition 3.1.1. *Pour tout $c_0 \in U \times I$, il existe $\epsilon > 0$ et W voisinage de c_0 tel que $]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[\subset I_{(\xi,\tau)}$ pour tout $(\xi, \tau) \in W$.*

Démonstration. On reprend la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour tout $\gamma : J \to U$ continue, on note

$$L_c(\gamma)(t) = \xi + \int_\tau^t X(\gamma(s), s)\, ds \qquad \text{où} \qquad c = (\xi, \tau)$$

Soit $c_0 = (x_0, t_0)$. Introduisons les mêmes quantités r, M et k qu'en (8) avec $J_r = t_0 +]-r, r[$ et $V_r = B(x_0, r)$. Choisissons $\xi \in V_{r/2}$ et $\tau \in J_{r/2}$ de sorte que $B(\xi, r/2) \subset V_r$ et $\tau +]-r/2, r/2[\subset J_r$. On peut alors appliquer le lemme 2.1.3 avec (ξ, τ), $r/2$ au lieu de (x_0, t_0) et r. Les constantes M et k ne dépendent pas de ces nouveaux paramètres. On en déduit que pour tout $\xi \in V_{r/2}$ et $\tau \in J_{r/2}$, L_c est une contraction de $\mathcal{C}(]\tau - \alpha, \tau + \alpha[, \overline{B}(\xi, r/2))$ dès que $\alpha < r/2$, $\alpha M \leqslant r/2$ et $\alpha k < 1$. Choisissons $\alpha > 0$ vérifiant ces conditions et appliquons le théorème du point fixe. Il nous vient pour tout $\xi \in V_{r/2}$ et $\tau \in J_{r/2}$ une courbe intégrale de condition initiale (ξ, τ) définie sur $]\tau - \alpha, \tau + \alpha[$. $\square$

Conséquence 3.1.2. Pour tout compact K de $U \times I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $(x_0, t_0) \in K$, $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset I_{(x_0,t_0)}$.

Proposition 3.1.3 (Lemme de sortie des compacts)**.** *Soit $c \in U \times I$ tel que $a = \sup I_c < \sup I$. Alors $u_c(t) \to \infty$ lorsque $t \to a$, c'est-à-dire que pour tout compact K de U, il existe $t \in I_c$ tel que $u_c([t, a[) \cap K = \emptyset$.*

On a un résultat analogue pour la borne inférieure b de I_c : si $b > \inf I$, alors $u_c(t) \to \infty$ lorsque $t \to b$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite (t_n) de I_c tendant vers a telle que $(u_c(t_n))$ prenne ses valeurs dans un compact de U. Alors quitte à remplacer (t_n) par une sous-suite $(u_c(t_n))$ converge vers $x \in U$. D'après la proposition 3.1.1, il existe $\epsilon > 0$ et V voisinage de (x, a) dans $U \times I$ tels que pour tout $(x_0, t_0) \in V$, l'on a $t_0 +]-\epsilon, \epsilon[\subset I_{(x_0,t_0)}$. Si n est suffisamment grand, $(u_c(t_n), t_n) \in V$ donc $I_c = I_{(u_c(t_n),t_n)}$ contient $t_n +]-\epsilon, \epsilon[$, ce qui est impossible lorsque $t_n > a - \epsilon$. □

Conséquence 3.1.4. Soient $c = (x_0, t_0) \in U \times I$ et $r, \epsilon > 0$ tels que

$$\|X(x,t)\| \leqslant M \text{ pour tout } (x,t) \in \overline{B}(x_0, r) \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset U \times I.$$

Alors $I_{(x_0,t_0)}$ contient $t_0 +]-\beta, \beta[$ où $\beta = \min(\epsilon, r/M)$.

Ici, r/M est le temps nécessaire pour que x_0 sorte de la boule $\overline{B}(x_0, r)$ en se déplaçant à une vitesse plus petite que M. Pour comparer, la preuve du théorème 2.1.1 donne $t_0 +]-\alpha, \alpha[\subset I_{(x_0,t_0)}$ avec $\alpha = \min(\epsilon, r/M, 1/k)$ où k est la constante de Lipschitz

$$\sup\left\{ \frac{\|X(x,t) - X(y,t)\|}{\|x-y\|} / \ (x,y) \in \overline{B}(x_0, r),\ x \neq y,\ t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \right\}.$$

Ici, β ne dépend plus de k.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Si la borne supérieure de I_c est plus petite que $t_0 + \beta$, elle est finie et alors d'après la proposition 3.1.3, $u_c(t)$ sort du compact $\overline{B}(x_0, r)$ lorsque t est suffisamment grand. Donc

$$t_+ := \inf\{t \geqslant t_0 / \ \|u_c(t) - x_0\| > r\}$$

est fini, et $t_+ - t_0 < r/M$. Par continuité de u, $\|u_c(t_+) - x_0\| = r$. Comme pour tout $t \in [0, t_+]$, $\|u_c(t) - x_0\| \leqslant r$, nous avons par hypothèse que $\|u_c'(t)\| \leqslant M$ et donc par le théorème des accroissements finis,

$$r = \|u_c(t_+) - x_0\| \leqslant M(t_+ - t_0) < r,$$

une contradiction. □

Conséquence 3.1.5. S'il existe un compact K de U tel que pour tout $x \in U \setminus K$ et $t \in I$, l'on ait $X(x,t) = 0$. Alors pour tout $c \in U \times I$, $I_c = I$.

Démonstration. Soit $c = (x_0, t_0) \in U \times I$. Si $x_0 \notin K$, alors $I_c = I$ et u_c est constante égale à x_0. Si $x_0 \in K$, alors $u_c(I_c) \subset K$ d'après la phrase précédente, et donc $I_c = I$. □

3.2 Lemme de Gronwall

Théorème 3.2.1. *Soit $g : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ un champ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soient $\gamma : I \to E$ et $\rho : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables qui vérifient pour tout $t \in I$*

$$\rho'(t) = g(\rho(t), t) \qquad \text{et} \qquad \|\gamma'(t)\| \leqslant g(\|\gamma(t)\|, t) \tag{9}$$

Supposons qu'en $t_0 \in I$, on ait $\|\gamma(t_0)\| \leqslant \rho(t_0)$. Alors pour tout $t \geqslant t_0$ dans I, on a $\|\gamma(t)\| \leqslant \rho(t)$.

Il est instructif de comparer le résultat avec l'inégalité des accroissements finis. Dans ce cas, $\|\gamma'(t)\| \leqslant C$ sur I implique $\|\gamma(t)\| \leqslant \|\gamma(t_0)\| + C|t - t_0|$. Plus généralement $\|\gamma'(t)\| \leqslant C(t)$ avec $C(t)$ qui dépend continuement de t implique $\|\gamma(t)\| \leqslant \|\gamma(t_0)\| + \left|\int_{t_0}^{t} C(s)\, ds\right|$. C'est immédiat si l'on suppose γ de classe $\mathcal{C}^1$ et sinon on adapte facilement la preuve du théorème des accroissements finis. Dans le lemme de Gronwall, on a une version plus intelligente, où le majorant dans l'hypothèse dépend de $\|\gamma(t)\|$. Le majorant qui en résulte s'obtient en intégrant l'équation différentielle associée.

Une application typique du lemme de Gronwall est le fait que $\|\gamma'(t)\| \leqslant k\|\gamma(t)\|$ pour tout $t \in I$ implique que pour tout $t, t_0 \in I$,

$$\|\gamma(t)\| \leqslant \|\gamma(t_0)\| e^{k|t-t_0|}. \tag{10}$$

Pour le voir, on choisit $g(\rho, t) = k\rho$ et on applique le théorème 3.2.1 à $s \to \gamma(s)$ lorsque $t \geqslant t_0$ et à $s \to \gamma(2t_0 - s)$ lorsque $t \leqslant t_0$. On déduira de l'inégalité (10) un contrôle sur les courbes intégrales d'un champ en fonction de la condition initiale, cf. lemme 4.2.1.

Démonstration. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \geqslant 0$. Alors une condition suffisante (et nécessaire) pour que $f \geqslant 0$ sur $[a, b[$ est que pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) = 0$ entraine $f(t + h) \geqslant 0$ pour tout $h > 0$ assez petit. En effet, cette condition implique que la borne supérieure des t vérifiant $f \geqslant 0$ sur $[a, t]$ est b (raisonner par l'absurde).

Il suffit alors de montrer que $\|\gamma(t_1)\| = \rho(t_1)$ entraine qu'il existe $t_2 > t_1$ dans I tel que

$$\|\gamma(t)\| \leqslant \rho(t), \qquad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{11}$$

Une première tentative (qui va échouer) consiste à écrire d'une part

$$\rho(t_1 + h) = \rho(t_1) + h\rho'(t_1) + \mathrm{o}(h) = \rho(t_1) + hg(\rho(t_1), t_1) + \mathrm{o}(h)$$

et d'autre part, $\gamma(t_1+h) = \gamma(t_1) + h\gamma'(t_1) + \mathrm{o}(h)$ donc pour $h \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t_1+h)\| &\leqslant \|\gamma(t_1)\| + h\|\gamma'(t_1)\| + \mathrm{o}(h) \\
&= \rho(t_1) + h\|\gamma'(t_1)\| + \mathrm{o}(h) \\
&\leqslant \rho(t_1) + hg(\rho(t_1), t_1) + \mathrm{o}(h).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|\gamma(t_1+h)\| - \rho(t_1+h) \leqslant \mathrm{o}(h)$, ce qui ne suffit pas à montrer que cela est négatif.

Passons à la vraie preuve. Par hypothèse, il existe $k > 0$ tel que pour tout t assez proche de t_1 et r, r' assez proche de $\rho(t_1)$, l'on ait

$$|g(t,r) - g(t,r')| \leqslant k|r - r'|. \tag{12}$$

Choisissons $t_2 > t_1$ tel que $(t_2 - t_1) \leqslant (2k)^{-1}$ et pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on puisse appliquer (12) à $r = \rho(t)$ et $r' = \|\gamma(t)\|$. On montre alors que pour tout $\epsilon \in]0,1]$, l'on a

$$\|\gamma(t)\| \leqslant \rho(t) + \epsilon(t - t_1), \qquad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{13}$$

Ceci impliquera (11) en faisant tendre ϵ vers 0. D'après la remarque préliminaire de la preuve, pour établir (13), il suffit de vérifier que si $\|\gamma(t_3)\| = \rho(t_3) + \epsilon(t_3 - t_1)$ pour un certain $t_3 \in [t_1, t_2]$, alors (13) est satisfaite pour tout $t \geqslant t_3$ suffisamment proche de t_3. Pour $h \geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\|\gamma(t_3+h)\| - \rho(t_3+h) \\
&= \|\gamma(t_3) + h\gamma'(t_3) + \mathrm{o}(h)\| - (\rho(t_3) + h\rho'(t_3) + \mathrm{o}(h)) \\
&\leqslant \|x(t_3)\| - \rho(t_3) + h(\|\gamma'(t_3)\| - \rho'(t_3) + \mathrm{o}(1))
\end{aligned}$$

Utilisons à présent l'hypothèse du théorème,

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t_3)\| - \rho'(t_3) &\leqslant g(\|\gamma(t_3)\|, t_3) - g(\rho(t_3), t_3) && \text{d'après (9)} \\
&\leqslant k\big|\|\gamma(t_3)\| - \rho(t_3)\big| = k\epsilon(t_3 - t_1) && \text{d'après (12)} \\
&\leqslant \epsilon/2
\end{aligned}$$

car $t_3 \leqslant t_2$ et $t_2 - t_1 \leqslant (2k)^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t_3+h)\| - \rho(t_3+h) &\leqslant \epsilon(t_3 - t_1) + h(\epsilon/2 + \mathrm{o}(1)) \\
&\leqslant \epsilon(t_3 + h - t_1)
\end{aligned}$$

lorsque h est suffisamment proche de 0. □

Corollaire 3.2.2. *Soit* $X : E \times I \to E$ *et* $g : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ *qui vérifient tous deux les hypothèses de Cauchy-Lipschitz et* $\|X(x,t)\| \leqslant g(\|x\|, t)$ *sur* $E \times I$. *Alors pour tout* $x_0 \in E$ *et* $t_0, t_1 \in I$ *tels que* $t_0 \leqslant t_1$, *si la courbe intégrale maximale de* g *avec condition initiale* $(\|x_0\|, t_0)$ *est définie sur* $[t_0, t_1]$, *alors il en est de même pour la courbe intégrale maximale de* X *de condition initiale* (x_0, t_0).

Démonstration. Notons (I_c, u_c) la courbe intégrale maximale de X pour $c = (x_0, t_0)$ et (J, ρ) la courbe intégrale maximale de g pour la condition initiale $(\|x_0\|, t_0)$. Par le théorème 3.2.1, le fait que ρ soit définie sur $[t_0, t_1]$ implique que u_c reste bornée sur $[t_0, t_1] \cap I_c$. Par le lemme de sortie des compacts, proposition 3.1.3, la borne supérieure de I_c est plus grande que t_1. □

Conséquence 3.2.3. Si $X : E \times I \to E$ vérifie $\|X(x,t)\| \leqslant A\|X\| + B$ pour deux constantes A, B indépendantes de $(x,t) \in E \times I$, alors les courbes intégrales maximales de X sont toutes définies sur I.

Démonstration. On applique le corollaire 3.2.2 à X et $-X(\cdot, -t)$ pour controler les bornes supérieures et inférieures des intervalles. On utilise que les courbes intégrales maximales de $\rho'(t) = A\rho(t) + B$ sont définies sur I. □

4 Flot

4.1 Définition

On considère un champ $X : U \times I \to E$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour tout $s, t \in I$, on note Ω_s^t l'ensemble des $x \in U$ tels que $t \in I_{(x,s)}$ et on définit l'application de *flot* $\Phi_s^t : \Omega_s^t \to E$, $x \to u_{(x,s)}(t)$.

Proposition 4.1.1. *Pour tout* $t_0, t, s \in I$, *on a*

1. $\Omega_{t_0}^{t_0} = U$ *et* $\Phi_{t_0}^{t_0} = \mathrm{id}_U$.
2. *si* $t_0 \leqslant s \leqslant t$ *ou* $t \leqslant s \leqslant t_0$, *alors* $\Omega_{t_0}^t \subset \Omega_{t_0}^s$.
3. *si* $x \in \Omega_{t_0}^s$, *alors* $\Phi_{t_0}^s(x) \in \Omega_s^t$ *ssi* $x \in \Omega_{t_0}^t$. *Et quand c'est le cas,* $\Phi_s^t(\Phi_{t_0}^s(x)) = \Phi_{t_0}^t(x)$.
4. Φ_t^s *est une bijection de* Ω_t^s *dans* Ω_s^t *d'inverse* Φ_s^t.

Preuve. 1. et 2. sont immédiats.

3. Soit $x \in \Omega_{t_0}^s$ et $y = \Phi_{t_0}^s(x)$. Alors (y, s) est condition initiale de $(I_{(x,t_0)}, u_{(x,t_0)})$ donc $(I_{(y,s)}, u_{(y,s)}) = (I_{(x,t_0)}, u_{(x,t_0)})$ d'après le troisième point de la proposition 2.2.1, ce qui démontre le résultat.

4. D'après 1. et 3. appliqué à $t = t_0$, $\Phi_t^s(\Omega_t^s) \subset \Omega_s^t$ et $\mathrm{id}_U = \Phi_s^t \circ \Phi_t^s$ sur Ω_t^s. On peut intervertir s et t dans cet argument, d'où la conclusion. $\square$

Théorème 4.1.2. *Pour tout $s, t \in I$, Ω_s^t est ouvert dans E et $\Phi_s^t : \Omega_s^t \to E$ est continue. Si de plus X est de classe $\mathcal{C}^k$, alors Φ_s^t est de classe $\mathcal{C}^k$.*

D'après le point 4. de la proposition 4.1.1, le théorème 4.1.2 appliqué à Φ_s^t et Φ_t^s implique que Φ_s^t est un homéomorphisme de Ω_s^t dans Ω_t^s et même un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque le champs est de classe $\mathcal{C}^k$.

4.2 Preuve du théorème 4.1.2

Lemme 4.2.1. *Soient $s, t \in I$ et $x \in \Omega_s^t$. Alors il existe un voisinage V de x dans U et $k > 0$ tels que pour tout $y \in V$ et τ compris entre s et t, $y \in \Omega_s^\tau$ et*

$$\|\Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^\tau(x)\| \leqslant \|y - x\| e^{k|\tau - s|}. \tag{14}$$

On peut considérer ce résultat comme une version quantitative de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. L'estimation est optimale en ce sens que pour $X(x, t) = kt$, on a $u(t) = e^{k(t-t_0)} u(t_0)$ et l'inégalité (14) est alors une égalité lorsque $\tau \geqslant s$.

En choisissant $\tau = t$, on en déduit que x est intérieur à Ω_s^t et que Φ_s^t est continue en x, et donc la première partie du théorème 4.1.2.

Démonstration. Supposons $s \leqslant t$. On se donne $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble

$$K := \{\Phi_s^\tau(x) + u / \ \tau \in [s, t] \text{ et } \|u\| \leqslant \epsilon\} \tag{15}$$

soit contenu dans U. Pour se faire, il suffit de chosir ϵ strictement inférieur à la distance du compact $\{\Phi_s^\tau(x) / \ \tau \in [s, t]\}$ au fermé U^c. L'ensemble $K \times [s, t]$ étant compact, il existe $k > 0$ tel que

$$\|X(y, \tau) - X(z, \tau)\| \leqslant k\|y - z\|, \qquad \forall y, z \in K,\ \forall \tau \in [s, t]. \tag{16}$$

Soit $R = \epsilon e^{-k|t-s|}$ et $y \in E$ tel que $\|y - x\| \leqslant R$. Pour comprendre la suite de la preuve, faisons deux remarques :

1. Si $y \in \Omega_s^t$ et (14) est vérifié avec $\tau \in [s, t]$, alors $\Phi_s^\tau(y) \in K$.
2. Si $y \in \Omega_s^t$ et pour tout $\tau \in [s, t]$, $\Phi_s^\tau(y)$ est dans K, alors $\gamma(\tau) := \Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^\tau(x)$ vérifie $\|\gamma'(\tau)\| \leqslant k\|\gamma(\tau)\|$, ce qui implique par le lemme de Gronwall que $\|\gamma(\tau)\| \leqslant \|\gamma(s)\| e^{k(\tau - s)}$, c'est-à-dire (14).

Bref, il suffit de montrer que $\Phi_s^\tau(y)$ est dans K pour tout $\tau \in [s,t]$, et ceci découle de ce que l'on veut démontrer ! On se sort de ce faux raisonnement par un argument dit de Bootstrap. Soit l'ensemble

$$J := \{t_+/\ t_+ \geqslant s,\ [s,t_+] \subset I_{(y,s)},\ \Phi_s^\tau(y) \in K \text{ pour tout } \tau \in [s,t_+]\}.$$

J est un intervalle non vide, de borne inférieure s et de borne supérieure $T \leqslant \sup I_{(y,x)}$. On veut montrer que $t \in J$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $T < t$. Alors T est finie, et donc $T < \sup I_{(y,s)}$, car par le lemme de sortie des compacts, $T = \sup I_{(y,x)}$ impliquerait que $\Phi_t^\tau(y)$ sort de K lorsque τ se rapproche de T. Donc $T \in I_{(y,s)}$ et par continuité de $\tau \to \Phi_s^\tau(y)$, T appartient à J.

Par le lemme de Gronwall, l'inégalité (14) est alors vérifiée pour tout $\tau \in [s,T]$. Comme $|T-s| < |t-s|$, il vient $\|\Phi_s^T(y) - \Phi_s^T(x)\| < \epsilon$. Mais alors $\|\Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^\tau(x)\| < \epsilon$ pour $\tau > T$ suffisamment proche de T, ce qui contredit que T est la borne supérieure de J.

La preuve pour $s \geqslant t$ est similaire. On peut aussi réunir les deux cas en travaillant avec $\tau \in [0,1] \to \Phi_s^{s+\tau(t-s)}(y)$. □

Remarque 4.2.2. On déduit de cette preuve que Φ_s^t est localement lipschitzien. En effet, si $y,z \in B(x,R)$, alors comme on l'a vu, $y,z \in \Omega_s^t$ et pour tout $\tau \in [s,t]$, $\Phi_s^\tau(y)$ et $\Phi_s^\tau(z)$ sont dans le compact K. Par (16), $\gamma(\tau) := \Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^\tau(z)$ vérifie $\|\gamma'(\tau)\| \leqslant k\|\gamma(\tau)\|$ et donc par le lemme de Gronwall

$$\|\Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^\tau(z)\| \leqslant \|y-z\| e^{k|\tau-s|}. \qquad \square$$

Supposons à présent que X admette en tout point une dérivée partielle $D_1X(x,t) \in \mathcal{L}(E)$ par rapport aux variables d'espace et que $D_1X(x,t)$ dépend continuement de (x,t). Soient $s,t \in I$ et $x \in \Omega_s^t$. Pour tout τ compris entre s et t, l'on note $M(\tau) = D_1X(\Phi_s^\tau(x),\tau)$ et R_σ^τ la résolvente de l'équation différentielle associée. En particulier,

$$R_s^s = \mathrm{id}_E, \qquad \frac{d}{d\tau} R_s^\tau = M(\tau) R_s^\tau$$

pour tout τ entre s et t.

Lemme 4.2.3. *L'application Φ_s^t est dérivable en x de dérivée R_s^t, c'est-à-dire*

$$\Phi_s^t(x+v) = \Phi_s^t(x) + R_s^t v + \mathrm{o}(\|v\|).$$

Le fait que la dérivé de Φ_s^t vérifie elle-même une équation différentielle peut se retrouver en dérivant par rapport à x l'équation du flot : $\frac{d}{dt}\Phi_s^t(x) = X(\Phi_s^t(x),t)$. Ce calcul n'est pas justifié à priori.

Démonstration. On suppose $s \leqslant t$, la preuve pour $s \geqslant t$ est similaire. On introduit comme dans la preuve du lemme 4.2.1 l'ensemble K défini en (15) et les constantes ϵ, k et R. Soit α un module de continuité uniforme de $D_1 X$ sur le compact $K \times [s,t]$. Donc pour tout $y, z \in K$ et $\tau \in [s,t]$, l'on a

$$\|D_1 X(y,\tau) - D_1 X(z,\tau)\| \leqslant \alpha(\|y-z\|). \tag{17}$$

Soit v de norme $\|v\| \leqslant R$ et $\gamma(\tau) = \Phi_s^\tau(x+v) - \Phi_s^\tau(x)$. Nous voulons montrer que $\gamma(\tau) = R_s^t v + \mathrm{o}(\|v\|)$. Définissons $b(\tau)$ de sorte à avoir l'égalité

$$\gamma'(\tau) = M(\tau)\gamma(\tau) + b(\tau)$$

et nous obtenons par le principe de Duhamel que

$$\gamma(t) = R_s^t v + \int_s^t R_r^t b(r)\, dr.$$

Comme R_r^t est borné pour $r \in [s,t]$, il nous suffit de montrer que $\|b(r)\| = \mathrm{o}(\|v\|)$ avec un o uniforme par rapport à $r \in [s.t]$.

Par définition de b,

$$\begin{aligned} b(\tau) &= X(\Phi_s^\tau(x+v),\tau) - X(\Phi_s^\tau(x),\tau) - D_1 X(\Phi_s^\tau(x),\tau)(\gamma(\tau)) \\ &= X(y+\gamma(\tau),\tau) - X(y,\tau) - D_1 X(y,\tau)(\gamma(\tau)) \end{aligned}$$

où $y = \Phi_s^\tau(x)$. Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $\|u\| \leqslant \epsilon$ de sorte que $[y, y+u] \subset K$, l'on a

$$\begin{aligned} &\|X(y+u,\tau) - X(y,\tau) - D_1 X(y,\tau)(u)\| \\ &\leqslant \|u\| \sup_{r\in[0,1]} \|D_1 X(y+ru,\tau) - D_1 X(y,\tau)\| \\ &\leqslant \|u\|\alpha(\|u\|) \end{aligned}$$

où α est le module de continuité uniforme (17). Donc

$$\|b(\tau)\| \leqslant \|\gamma(\tau)\|\alpha(\|\gamma(\tau)\|)$$

Enfin, d'après le lemme 4.2.1, pour tout $\tau \in [s,t]$, $\|\gamma(\tau)\| \leqslant C\|v\|$ avec $C = e^{k|t-s|}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Nous avons donc montré que Φ_s^t est dérivable. La dérivée est continue d'après le lemmme suivant.

Lemme 4.2.4. *Soit $\mathcal{P}$ un espace métrique, $I = [a,b]$ et $A : I \times \mathcal{P} \to \mathcal{L}(E)$ une application bornée uniformément continue. Alors la résolvante $R_a^b(\omega)$ de l'équation différentielle $x'(t) = A(t,\omega)x(t)$ dépend continuement de ω.*

Démonstration. On rappelle que pour tout $s,t \in [a,b]$, $\|R_s^t(\omega)\| \leqslant C = e^{(b-a)M}$ avec $M = \sup\{\|A(t,\omega)\|/\ (t,\omega) \in I \times \mathcal{P}\}$. Pour montrer la continuité en ω_0, introduisons $u(t) = R_a^t(\omega) - R_a^t(\omega_0)$. On a

$$u'(t) = A(t,\omega_0)u(t) + b(t)$$

avec $b(t) = (A(t,\omega) - A(t,\omega_0))R_a^t(\omega)$. On a $\|b(t)\| \leqslant C\delta(\|\omega - \omega_0\|)$ où δ est un module de continuité uniforme de A. Par le principe de Duhamel,

$$u(t) = \int_a^t R_s^t(\omega_0)b(s)\,ds$$

donc $\|u(t)\| \leqslant (b-a)C^2\delta(\|\omega - \omega_0\|)$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 4.2.5. *Si X est de classe $\mathcal{C}^k$, alors pour tout $s,t \in I$, Φ_s^t est de classe $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. On le démontre par récurrence sur k en appliquant l'hypothèse de récurrence au champ $\tilde{X} : U \times \mathcal{L}(E) \times I \to E \times \mathcal{L}(E)$ donné par

$$\tilde{X}(x,A,t) = (X(x,t), D_1X(x,t) \circ A)$$

de flot $\tilde{\Phi}_s^t(x,A) = (\Phi_s^t(x), (\Phi_s^t)'(x) \circ A)$. Si X est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, $\tilde{X}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, donc par hypothèse de récurrence, $\tilde{\Phi}_s^t$ est de classe $\mathcal{C}^k$, donc Φ_s^t est de classe $\mathcal{C}^k$. □

4.3 Régularité en toutes les variables

Notons $\Omega := \{(x,s,t)/\ x \in \Omega_s^t\}$ et Φ l'application de Ω dans E qui envoie (x,s,t) sur $\Phi_s^t(x)$.

Proposition 4.3.1. *Ω est ouvert et $\Phi : \Omega \to E$ est continue.*

Nous avons analysé précédemment la dépendance de $u_{(x,s)}(t) = \Phi_s^t(x)$ en x. Nous savons bien entendu que cette quantité est dérivable par rapport à t, sa dérivée étant le champ en $(\Phi_s^t(x), t)$. Il reste à étudier la dépendance en s.

Démonstration. Soit $(x,s,t) \in \Omega$. Supposons $s \leqslant t$, on adapte facilement ce qui suit pour $t \leqslant s$. Par hypothèse, $t \in I_{(x,s)}$ qui est ouvert. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $t + \epsilon \in I_{(x,s)}$. En appliquant le lemme 4.2.1 sur l'intervalle $[s, t+\epsilon]$, il nous vient un voisinage V de x contenu dans $\Omega_s^{t+\epsilon}$.

Lemme 4.3.2. *Il existe W voisinage de $(x,s) \in U \times I$ et $C > 0$ tels que pour tout $(y,\sigma) \in W$, $y \in \Omega_\sigma^s$ et*

$$\|\Phi_\sigma^s(y) - y\| \leqslant C|s-\sigma|. \tag{18}$$

Par conséquent si (σ, y) est dans W, alors

$$\|\Phi_\sigma^s(y) - x\| \leqslant C|\sigma - s| + \|y - x\|. \tag{19}$$

Donc quitte à réduire W, $\Phi_\sigma^s(y)$ appartient au voisinage V de x précédemment défini et donc $y \in \Omega_\sigma^{t+\epsilon}$. Autrement dit le voisinage $W \times [s, t+\epsilon]$ de (x,s,t) est contenu dans Ω. Donc Ω est ouvert. Pour montrer la continuité de Φ en (x,s,t), on utilise à nouveau que $\Phi(y,\sigma,\tau) = \Phi_s^\tau(\Phi_\sigma^s(y))$. L'inégalité (19) assure la continuité de $(y,\sigma) \to \Phi_\sigma^s(y)$ en (x,s). L'inégalité déduite du lemme 4.2.1

$$\begin{aligned}\|\Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^t(x)\| &\leqslant \|\Phi_s^\tau(y) - \Phi_s^t(y)\| + \|\Phi_s^t(y) - \Phi_s^t(x)\| \\ &\leqslant M|\tau - t| + \|y - x\| e^{k|t-s|}\end{aligned}$$

assure la continuité de $(y,\tau) \to \Phi_s^\tau(y)$ en (x,t). Ici M est un majorant du champ X sur le compact qui convient. □

Preuve du lemme 4.3.2. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B}(x,\epsilon) \times [s-\epsilon, s+\epsilon] \subset U \times I$. La borne supérieure C de $\|X(y,\sigma)\|$ sur $\overline{B}(x,\epsilon) \times [s-\epsilon, s+\epsilon]$ est finie. Un point de $\overline{B}(x,\epsilon/3)$ qui se déplace à une vitesse plus petite que C peut sortir de $\overline{B}(x,\epsilon)$ seulement au bout d'un laps de temps de $\epsilon/2C$. Soit $W = \overline{B}(x,\epsilon/3) \times [s-\epsilon', s+\epsilon']$ avec $\epsilon' = \min(\epsilon, \epsilon/3C)$. En raisonnant comme dans la conséquence 3.1.4, on montre que pour tout $(y,\sigma) \in W$ et r compris entre σ et s, $\Phi_\sigma^r(y)$ est bien définie et reste dans $\overline{B}(x,\epsilon)$. Et (18) découle de l'inégalité des accroissements finis. □

Théorème 4.3.3. *Si X est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec pour dérivées*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,s,t) = X(\Phi(x,s,t),t), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial s}(x,s,t) = -D_1\Phi(x,s,t)(X(x,s))$$

De plus, $D_1\Phi(x,s,t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}(D_1\Phi(x,s,t)) = D_1X(\Phi(x,s,t),t) \circ D_1\Phi(x,s,t).$$

Démonstration. Montrons que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Nous savons déjà que $D_1\Phi(x,s,t)$ existe et est la résolvante du champ linéaire $t \to D_1X(\Phi(x,s,t),t)$. Cette résolvante dépend continuement de x, s, t par le lemme 4.3.4. Par définition du flot,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,s,t) = X(\Phi(x,s,t),t)$$

donc $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ existe et dépend continuement de (x,s,t).

Il reste à dériver par rapport à s. Nous avons $\Phi(\Phi(x,s,t),t,s) = x$ donc $y = \Phi(x,s,t)$ vérifie $\Phi(y,t,s) - x = 0$. De plus l'application $(y,s) \to \Phi(y,t,s) - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée par rapport à y est inversible, donc par le théorème des fonctions implicites, $y = \Phi(x,s,t)$ dépend de manière $\mathcal{C}^1$ de s. Sa dérivée vérifie

$$D_1\Phi(y,t,s)(y'(s)) + X(\Phi(y,t,s),s) = 0.$$

Or $\Phi(y,t,s) = x$ et l'inverse de $D_1\Phi(y,t,s)$ est $D_1\Phi(x,s,t)$, donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(x,s,t) = y'(s) = -D_1\Phi(x,s,t)(X(x,s)).$$

qui est aussi continue en (x,s,t).

Donc Φ est $\mathcal{C}^1$. On montre que X de classe $\mathcal{C}^k$ implique Φ de classe $\mathcal{C}^k$ par la même récurrence que dans la preuve de la proposition 4.2.5. □

Lemme 4.3.4. *Soit $\mathcal{P}$ un espace métrique, $I = [a,b]$ et $A : I \times \mathcal{P} \to \mathcal{L}(E)$ une application bornée uniformément continue. Alors la résolvante $R_s^t(\omega)$ de l'équation différentielle $x'(t) = A(t,\omega)x(t)$ dépend continuement de s, t et ω.*

Démonstration. Comme $R_s^t(\omega) = R_a^t(\omega)(R_a^s(\omega))^{-1}$, il suffit de montrer que $(t,\omega) \to R_a^t(\omega)$ est continue. Nous avons déjà établi la continuité en ω avec t fixé dans le lemme 4.2.4. Il suffit alors de montrer que $R_a^t(\omega)$ est continue en t uniformément par rapport à ω. Pour cela, on écrit simplement que $R_a^t(\omega) = R_a^{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t A(s,\omega)R_a^s(\omega)\,ds$ et donc

$$\|R_a^t(\omega) - R_a^{t_0}(\omega)\| \leqslant e^{M(b-a)}M|t-t_0|$$

avec $M = \sup\{\|A(t,\omega)\| /\ (t,\omega) \in I \times \mathcal{P}\}$. □

5 Champs autonomes

Un champ de U est dit *autonome* s'il ne dépend pas du temps. Il s'agit donc d'une application $X : U \to E$. On supposera qu'elle est localement lipschitzienne pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

5.1 Courbes intégrales et trajectoires

On dit qu'une courbe intégrale de X est *d'origine* $x \in U$ si elle admet pour condition initiale $(x, 0)$. On note (I_x, u_x) la courbe intégrale maximale de condition initiale c. On l'appelle courbe intégrale maximale d'origine x et I_x l'intervalle de vie de x.

Proposition 5.1.1.

1. *si (I, u) est une courbe intégrale de X, alors $(s + I, u(\cdot - s))$ est aussi une courbe intégrale de X.*
2. *Pour tout $c = (x, s) \in U \times \mathbb{R}$, $(I_c, u_c) = (s + I_x, u_x(\cdot - s))$.*
3. *Pour tout $x \in U$ et $s \in I_x$, si $y = u_x(s)$, $I_y = I_x - s$ et $u_y = u_x(\cdot + s)$.*

Démonstration. La première assertion est immédiate. Pour la seconde, $(s + I_x, u_x(\cdot - s))$ est une courbe intégrale d'après 1, de condition initiale c, donc elle prolongée par (I_c, u_c). De même, $(-s + I_c, u_c(\cdot + s))$ est une courbe intégrale d'origine x donc elle est prolongée par (I_x, u_x). Pour la troisième assertion, $c' = (y, s)$ est une condition initiale de (I_x, u_x), donc $(I_x, u_x) = (I_{c'}, u_{c'}) = (s + I_y, u_y(\cdot - s))$ d'après 2. □

On appelle *trajectoire* d'un point $x \in U$ l'ensemble $u_x(I_x)$.

Proposition 5.1.2. *Pour tout $x, y \in U$, $u_x(I_x) = u_y(I_y)$ ou bien $u_x(I_x) \cap u_y(I_y) = \emptyset$. Donc l'ensemble des trajectoires est une partition de U.*

Démonstration. Si $u_x(t) = u_y(s) = z$, alors $(I_z, u_z) = (I_x - t, u_x(\cdot + t)) = (I_y - s, u_y(\cdot + s))$. Donc $I_x = I_y - s + t$ et pour tout $r \in I_x$, $u_x(r) = u_y(r + s - t)$. □

Proposition 5.1.3. *Pour tout $x \in U$, une et une seule des assertions suivantes est vérifiée :*

— *$I_x = \mathbb{R}$ et u_x est constante.*
— *u_x est injective.*
— *$I_x = \mathbb{R}$ et il existe $T > 0$ tel que u_x se factorise en une injection continue de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans U.*

Donc la trajectoire de x est ou bien réduite à un point, ou bien l'image de $\mathbb{R}$ par une injection continue, ou bien homéomorphe à un cercle.

On remarque que le premier cas de figure se produit exactement lorsque $X(x) = 0$.

Démonstration. Si u_x n'est pas injective, alors il existe $t \neq s$ tels que $u_x(t) = u_x(s)$. Ceci implique que $I_x = \mathbb{R}$ et $t - s = T'$ est une période de u_x. En effet, d'après le dernier point de la proposition 5.1.1, $y = u_x(s) = u_x(t)$ entraine $I_y = I_x - s = I_x - t$ et $u_y = u_x(\cdot + s) = u_x(\cdot + t)$, donc $I_x = I_x + T'$ et $u_x = u_x(\cdot + T')$.

Soit G l'ensemble des périodes de u_x. C'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. S'il est dense, alors u_x étant continue, u_x est constante, et nous sommes dans le premier cas. Sinon $G = T\mathbb{Z}$, pour un certain $T > 0$. Donc u_x se factorise en $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to U$, $[t] \to u_x(t)$. Cette application est injective car comme nous l'avons vu, $u_x(t) = u_x(s)$ entraine que $t - s$ est une période et donc $t - s \in T\mathbb{Z}$. Par ailleurs cette application est fermée car $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ est compact. $\square$

5.2 Flot des champs complets

Dans cette partie, on suppose X *complet*, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$, l'intervalle de vie de x est $\mathbb{R}$. On peut alors définir pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\Phi_t : U \to U$ qui envoie x sur $u_x(t)$.

Proposition 5.2.1.

1. *L'application $U \times \mathbb{R} \to E$, $(x, t) \to \Phi_t(x)$ est continue, de classe $\mathcal{C}^k$ si X est de classe $\mathcal{C}^k$.*
2. *Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.*
3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, Φ_t est un homéomorphisme de U d'inverse Φ_{-t} et lorsque X est de classe $\mathcal{C}^k$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. Le premier point découle des résultats de la partie 4. Le second point est une conséquence du 3 de la proposition 5.1.1. En effet, si $y = u_x(s)$, l'on a $\Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_t(y) = u_y(t) = u_x(t + s) = \Phi_{t+s}(x)$. Le trosième point découle des deux premiers. $\square$

Proposition 5.2.2. *Soit $x \in U$ tel que $\Phi_t(x) \to y \in U$ lorsque $t \to \infty$. Alors $X(y) = 0$.*

Le résultat est un analogue continu du fait suivant : si une suite convergente (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, alors la limite est un point fixe de f.

Démonstration. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, Φ_s est continue et donc $\Phi_s(\Phi_t(x)) \to \Phi_s(y)$ lorsque $t \to \infty$. Par ailleurs $\Phi_s(\Phi_t(x)) = \Phi_{s+t}(x) \to y$. Donc $\Phi_s(y) = y$ pour tout s. $\square$

Proposition 5.2.3. *Soit $u : \mathbb{R} \to U$ une courbe intégrale maximale injective. Alors $u([0,\infty[)$, $u(]-\infty,0])$ et $u(\mathbb{R})$ ne sont pas compacts.*

Démonstration. Faisons la preuve pour $K = u([0,\infty[)$. On raisonne par l'absurde et l'on suppose K compact.

Montrons que tout point de $u(\mathbb{R})$ est limite d'une suite $u(t_n)$ avec t_n qui tend vers $+\infty$. $(u(n))$ est une suite de K compact, donc elle admet une sous-suite $(u(t'_n))$ convergente dans K. Soit $u(s')$ la limite. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a avec $\delta = s - s'$

$$u(t'_n + \delta) = \Phi_\delta(u(t'_n)) \to \Phi_\delta(u(s')) = u(s)$$

quand $n \to \infty$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(]n,\infty[)$ est dense dans K, ouvert dans K car $u([0,n])$ est fermé et $u(]n,\infty[) = K \setminus u([0,n])$ car u injective. En appliquant le théorème de Baire dans K, il vient que $\cap_n u(]n,\infty[)$ est dense dans K, mais cette intersection est vide car u est injective $\square$