Feuille d'exercices du Chap. 2

Les exercices sans ($*$) sont des applications directes du cours. Les exercices marqués ($*$) sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Exercice 1 (Exam 7/6/11)**.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 1 \\ 1-t & 2t-1 & -1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 & t-1 \\ -1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Échelonner cette matrice en faisant des opérations sur les colonnes et calculer en fonction de t le déterminant et le rang de A_t ; lorsque $\mathrm{rang}(A_t) < 4$, donner une base de $\mathrm{Im}(A_t)$ et de $\mathrm{Ker}(A_t)$.

Exercice 2 (Exam 28/6/11)**.** Idem pour $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -t-1 & 0 \\ -1 & t-1 & 2 & 2-t \\ 2 & 4 & t & t-1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in k$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule :

$$(\star) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(\dagger) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.
5. Autre méthode pour ($\dagger$). Soit X une indéterminée, vérifier que $V(X, a_2, \dots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $n-1$. Calculer son coefficient dominant et remarquer ses racines évidentes, retrouver ainsi la formule ($\dagger$).

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice A_x ci-dessous soit inversible :

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 5 (CC 2011-12)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.
2) Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3) Déterminer une base de chaque espace propre V_λ en faisant des opérations sur les colonnes de $A - \lambda I_3$.

Exercice 6 (CC 2011-12)**.** Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
2) Compte tenu du résultat obtenu en 1), quel calcul faut-il faire pour savoir si B est diagonalisable ?
3) Effectuer ce calcul, et déterminer si B est diagonalisable ou non.

Exercice 7 (Examen du 28/6/11)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $c \neq 0$, et soient $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$(*) \qquad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Dîtes, en le justifiant, quelle est la dimension de E.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.
3. Soit $D : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ (i.e. $D(\mathbf{u})_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que E est stable par D.
4. On suppose que P a trois racines distinctes, non nulles, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Montrer que les suites $\mathbf{u} = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{v} = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (\lambda_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes. (On pourra soit utiliser l'endomorphisme D, soit considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $x\lambda_1^i + y\lambda_2^i + z\lambda_3^i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$). Que peut-on en déduire dans ce cas ?
5. On suppose que $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 4 = t_2$. Déterminer t_{99} et t_{100}.

Exercice 8 (Examen du 7/6/11)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, i.e. les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent -1, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$.

1. En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.
2. Quelle est la forme générale des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant cette relation de récurrence linéaire $u_n = bu_{n-1} + cu_{n-2}$? En utilisant les valeurs $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$ en déduire, en résolvant un système linéaire, une formule exacte donnant la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calculer D_8 et D_9.

Exercice 9. (extrait de l'examen du 7/6/11) Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1) Écrire la matrice $A - XI_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, montrer que le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (-1)^n \big(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\big).$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P (on ne demande pas de calculer λ). En utilisant le calcul précédent (remplaçant X par λ), montrer que l'espace propre $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension 1 et en donner un générateur.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

4) Soient $n = 4$, $a_0 = 0$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$; est-ce que A est diagonalisable ?

Exercice 10. Soient $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $M_a \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont a, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls et soit $P_a(X)$ le polynôme caractéristique de M_a :

$$P_a(X) = \mathrm{dét} \begin{pmatrix} -X & a & a & \cdots & a \\ a & -X & a & \ddots & a \\ a & a & -X & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & -X & a \\ a & \cdots & a & a & -X \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes puis les lignes de $M_a - XI_n$ (ou vice-versa), calculer $P_a(X)$ et $\mathrm{dét}(M_a) = P_a(0)$.

Exercice 11 $(*)$**.** Soit M_a la matrice de l'exercice précédent, voici une autre méthode pour déterminer, sans calculs, son polynôme caractéristique $P_a(X)$. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par M_a, i.e. tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = M_a$.

1. Montrer que l'espace propre $V_{-a} = \mathrm{Ker}(M_a + aI_n)$ est de dimension $n - 1$.
2. En calculant $\mathrm{Tr}(M_a)$, trouver la dernière valeur propre de M_a. En déduire que M_a est diagonalisable et déterminer $P_a(X)$ et $\mathrm{dét}(M_a) = P_a(0)$.

Exercice 12 (CC 2011-12)**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, exprimer les vecteurs Je_i dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer $J^2 e_i$, $J^3 e_i$ et $J^4 e_i$.

2) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4.
3) Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$; on suppose que $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?
4) Appliquer alors le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 13. 1) On considère les matrices suivantes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ (pour B, on a $t \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dîtes lesquelles sont diagonalisables, et trouvez pour celles-ci une base de vecteurs propres. Expliquez pourquoi les autres ne sont pas diagonalisables.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $G_t = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$?

Exercice 14. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base de diagonalisation $\mathcal{C}$ choisie.

Exercice 15 ($*$ CC 2010–11)**.** Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_9)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{10}$ et soit u l'endomorphisme défini par $u(e_j) = e_{j+2}$ pour $j = 0, 1, \ldots, 7$ et $u(e_8) = e_0$, $u(e_9) = e_1$, c.-à.-d., qui envoie $e_{j \bmod 10}$ sur $e_{j+2 \bmod 10}$.

1. Montrer, **sans calculer les espaces propres** et en citant un résultat du cours, que u est diagonalisable.
2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de u est contenu dans un ensemble E à 5 éléments, que l'on précisera.
3. On note ξ le nombre complexe $\exp(2i\pi/5)$ (où $i = \sqrt{-1}$). Calculer l'image par u des vecteurs $v_0 = e_0 + e_2 + e_4 + e_6 + e_8$ et $v_1 = e_0 + \xi^{-1}e_2 + \xi^{-2}e_4 + \xi^{-3}e_6 + \xi^{-4}e_8$.
4. Construire des vecteurs propres $v_2, \ldots, v_9$ de u, similaires aux précédents, et montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{C}^{10}$, puis écrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 16 ($*$ CC 2010–11)**.** Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient $f \in \mathrm{End}_k(V)$, λ une valeur propre de f, V_λ l'espace propre et $V_{(\lambda)}$ l'espace caractéristique associés. Si $g \in \mathrm{End}_k(V)$ commute à f (i.e. $f \circ g = g \circ f$), montrer que $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_N\}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux (i.e. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout i, j). Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{F}$ est diagonale. **Indication :** considérer d'abord le cas où tous les f_i sont des homothéties ; puis, si f_1 n'est pas une homothétie, considérer les espace propres de f_1 et procéder par récurrence sur $n = \dim V$.
3. On prend $k = \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}(V)$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable (on rappelle que pour tout élément g d'un groupe fini G de cardinal N, g^N égale l'élément neutre de G), puis qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de G est diagonale.