Feuille d'exercices du Chap. 6

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Exercice 1 (question de cours)**.** Montrer que toute forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénérée. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (très classique)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard, montrer que $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n\,(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 3 (CC 2010–11)**.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5|}{\sqrt{55}} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 4 (CC 2009–10)**.** 1) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + 2y + 5z)^2 \leq 30$; dans quel cas a-t-on $(x + 2y + 5z)^2 = 30$?
2) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq 17/10$; dans quel cas a-t-on $(x + y + z)^2 = 17/10$?

Exercice 5 $(*)$**.** Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, montrer que

$$\Big(\int_a^b |f(t)|\, dt \Big)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2\, dt\,.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? Indication : remarquer que $|f(t)|^2 = f(t)^2$.

Exercice 6 (CC 2011-12)**.** Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $\|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$ la norme euclidienne associée. Soit $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbb{N}^\times$, soit $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi pt)$. On admet que :

$$(*) \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad (e_p \mid e_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q, n \in \mathbb{N}$, on pose $c_q(f) = (e_q \mid f)$ puis $S_n(f) = \sum_{q=0}^{n} c_q(f) e_q$ et $R_n(f) = f - S_n(f)$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(e_p \mid R_n(f)) = 0$ pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$.
2) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

3) (bonus) En utilisant l'égalité $\cos(\theta)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)\big)$, démontrer la formule $(*)$.

Exercice 7 (CC 2010–11)**.** Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A (pour calculer $P_A(X)$, on pourra faire des opérations sur les colonnes pour faire apparaître au moins un zéro), puis une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
3. En déduire la signature de la forme quadratique $Q(x,y,z) = -7x^2 + 8xy - 8xz + 5y^2 - 4yz + 5z^2$.

Exercice 8. Diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (très classique)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ la matrice symétrique dont tous les coefficients sont 1, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A (*cf.* Feuille n° 2), puis en déduire la signature et le rang de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$: $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j} 2\, x_i x_j$.
2. Plus généralement, déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$:
$$Q_a(x_1, \dots, x_n) = a\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) + \sum_{i<j} 2\, x_i x_j.$$

Exercice 10 (Exam 8/6/2012)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. On note V_1 (resp. V_2) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{C}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ (resp. $\mathcal{C}_2 = (e_{n+1}, \dots, e_{2n})$), de sorte que $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2$.

1. Soient $S_1, S_2 \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles et S la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c} S_1 & 0 \\ \hline 0 & S_2 \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Pour $i = 1, 2$, soit ϕ_i la forme bilinéaire symétrique sur V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(\phi_i) = S_i$, et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = S$. On note (p_i, q_i) la signature de ϕ_i pour $i = 1, 2$; exprimer la signature de ϕ en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2. (Indication : pour $i = 1, 2$, considérer une base $\mathcal{D}_i$ de V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}_i}(\phi_i)$ soit diagonale.)
2. Soit $J = J_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de J et montrer que J est diagonalisable.
3. On fixe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < 0 < \mu$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :
$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda)\, x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\, x_i x_j + \sum_{i=n+1}^{2n} (1+\mu)\, x_i^2 + \sum_{n+1 \leq i < j \leq 2n} 2\, x_i x_j$$
et soit ϕ sa forme polaire. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

4. En utilisant les questions précédentes, déterminer en fonction des valeurs de λ et μ la signature de q. (On indiquera en particulier dans quel cas q est dégénérée.)

Exercice 11 (Exam 29/6/2012). 1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\alpha A + \beta I_p$ est diagonalisable et exprimer ses valeurs propres en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^\times$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = 2(x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} 2\, x_i\, x_{n+i},$$

et soit ϕ la forme polaire de q. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

3. On suppose dans cette question que $n = 1$. Écrire dans ce cas la matrice A et déterminer ses valeurs propres et une base orthonormée (f, g) de vecteurs propres.

4. On revient au cas n arbitraire. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ associé à A et, pour $i = 1, \dots, n$, soit P_i le plan de $\mathbb{R}^{2n}$ engendré par e_i et e_{n+i}. Montrer que P_i est stable par u et, en utilisant la question précédente, construire une base orthonormée (f_i, g_i) de P_i formée de vecteurs propres de A. Puis écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer ainsi les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ de A (comptées avec multiplicité).

5. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha > 0$, soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$Q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \beta\, x_i^2 + \alpha\, q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \beta\, x_i^2 + 2\,\alpha\,(x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n}),$$

et soit ψ sa forme polaire. Écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$.

6. En utilisant la question 1), déterminer en fonction des valeurs de β la signature de Q (on rappelle que $\alpha > 0$). On indiquera en particulier dans quels cas Q est dégénérée.

Exercice 12 (Partiel 9/4/10). On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel : $(x \mid y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique.

1. Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + 2x_2 = 0$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Donner une base orthonormée $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $f_1 \in D$ et écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_D)$. Puis, en utilisant la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$, déterminer la matrice A de s_D dans la base canonique.

2. Soit n un vecteur non nul orthogonal à D. Citer une formule du cours exprimant, pour $x \in \mathbb{R}^2$ arbitraire, $s_D(x)$ en fonction de x et de n, puis en appliquant cette formule à e_1 et e_2, calculer directement $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s_D)$.

3. Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \mathrm{SO}(2)$ et calculer A^2. En déduire les caractéristiques géométriques de A.

4. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ et soit $B = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2 - q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2 - p^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in O(2)$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 13 (CC 2010–11)**.** On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ \mid\ )$ et de la norme euclidienne associée $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$. Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

1. Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire et bijective.
2. Pour tout $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u, v) \in E$ tel que $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = (f(u, v) \mid w)$ pour tout $w \in E$. On note $f(u, v) = u \wedge v$ et on l'appelle le produit vectoriel de u et v.
3. Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et prenant $w = e_1$, puis $w = e_2$ et $w = e_3$, déterminer les coordonnées (f_1, f_2, f_3) de $u \wedge v$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
4. Montrer que l'application $E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire, et qu'elle est alternée (i.e. $u \wedge u = 0$ pour tout $u \in E$).
5. Soient $u, v, w \in E$. Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, montrer que $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w)$.
6. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et soit $p \in E$ l'unique vecteur tel que $\mathcal{B} = (u, v, p)$ soit une base orthonormée directe de E. En utilisant la question précédente montrer que, pour tout $w \in E$, on a $(u \wedge v \mid w) = (p \mid w)$. Que peut-on en conclure ?
7. Soit $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{pmatrix} \in O(3)$ et soient C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. Déduire de la question précédente que $A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2$, et donc aussi que $A \in O^-(3) \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2$. (Remarque : On a donc $C_3 = \mathrm{dét}(A)\, C_1 \wedge C_2$.)
   Si par exemple $t_3 \neq 0$, en déduire, en utilisant la formule explicite pour $C_1 \wedge C_2$ obtenue en 3, que $A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow u_1 v_2 - u_2 v_1 = t_3$ (et donc $A \in O^-(3) \Leftrightarrow u_1 v_2 - u_2 v_1 = -t_3$).
8. Soient $x, y \in E$ deux vecteurs linéairement indépendants, et soient $r = \|x\|$ et $r' = \|y\|$. Soit P le plan engendré par x et y, soit (u, v) une base orthonormée de P, où $u = \dfrac{1}{r} x$ et soit θ l'unique élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $y = r'(\cos(\theta) u + \sin(\theta) v)$. Montrer que $\|x \wedge y\| = rr' \,|\sin(\theta)|$. Indication : Utiliser la question 4 pour exprimer $x \wedge y$ en fonction de $u \wedge v$ puis, notant $\mathcal{B}$ la base orthonormée directe $(u, v, u \wedge v)$, calculer $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(x, y, x \wedge y)$ et utiliser la question 5.
9. Montrer qu'une base orthonormée $\mathcal{C} = (u, v, f)$ est directe si et seulement si la base $\mathcal{D} = (f, u, v)$ est directe.
10. Soient $f \in E$ un vecteur unitaire et P le plan orthogonal à f. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et soit θ l'unique élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$. Soit R la rotation d'axe $\mathbb{R}f$ orienté par f et d'angle θ. Montrer que :
    $$(*) \qquad \forall y \in P, \qquad R(y) = a\, y + b\, f \wedge y,$$
    (si $y = 0$ c'est clair, et si $y \neq 0$ écrire $y = r\, u$ avec u unitaire et $r = \|y\|$), puis que :
    $$(**) \qquad \forall x \in E, \qquad R(x) = (x \mid f) f + a\, \pi(x) + b\, f \wedge \pi(x) = (x \mid f) f + a\, \pi(x) + b\, f \wedge x,$$
    où $\pi(x) = x - (x \mid f) f$ est la projection orthogonale de x sur P. Enfin, si $f = \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}$, écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(R)$ sous la forme $aI_3 + (1 - a)S + bA$, pour deux matrices S, A à déterminer.

Exercice 14. 1. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour chacune des matrices de 1., décrire géométriquement l'isométrie de $\mathbb{R}^3$ correspondante.

Exercice 15. Soient $(\ |\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et σ la symétrie orthogonale par rapport à P.
Citer une formule du cours exprimant $\sigma(x)$ en fonction de x et de n, où n est un vecteur $\neq 0$ orthogonal à P, puis en appliquant cette formule à e_1, e_2, e_3, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\sigma)$.

Exercice 16. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Exercice 17 (Exam 29/6/2012)**.** On admet que, pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\exp({}^tB) = {}^t\exp(B)$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A qui sont antisymétriques (i.e. ${}^tA = -A$).

1. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer, en le justifiant soigneusement, que $\exp(A) \in O(n)$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On admet que la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{dét}(\exp(tA))$ est continue. En utilisant ceci, montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}(n)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par A. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer les valeurs propres de A et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A, puis écrire les matrices $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.
4. Calculer P^{-1} puis, en utilisant que $P^{-1}\exp(tA)P = \exp(tA')$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$ et montrer que c'est la matrice d'une rotation que l'on précisera.