Feuille d'exercices du Chap. 7

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soient I le point de coordonnées $(1,1)$ et $r = r(I, \pi/4)$ la rotation de centre I et d'angle $\pi/4$, i.e. pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, le point $M' = r(M)$ est défini par $\overrightarrow{IM'} = \vec{r}(\overrightarrow{IM})$, où $\vec{r}$ est la rotation vectorielle d'angle $\pi/4$.

1. Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$, exprimer ses coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R} = (I, e_1, e_2)$ en fonction de x et y.
2. Exprimer les coordonnées (X', Y') de $M' = r(M)$ en fonction de X et Y, puis de x et y.
3. En déduire les coordonnées (x', y') de M' dans $\mathcal{R}_0$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soit $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite affine d'équation $3y - x = 1$ (resp. $x + 2y = 4$) et soit p (resp. s) la projection sur $\mathcal{D}_1$ (resp. la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_1$) parallèlement à $\mathcal{D}_2$.

1. (Question de cours) Déterminer la direction D_1 de $\mathcal{D}_1$ (resp. D_2 de $\mathcal{D}_2$).
2. Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{I\}$ pour un point I que l'on déterminera.
3. Déterminer un vecteur v_1 (resp. v_2) engendrant la droite vectorielle D_1 (resp. D_2) puis, notant $\mathcal{C}$ la base (v_1, v_2), écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C})$.
4. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(I, \mathcal{C})$ de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Pour tout point $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, exprimer les coordonnées (X, Y) de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de x et y.
5. Soient (X', Y') les coordonnées de $M' = p(M)$, et (X'', Y'') celles de $M'' = s(M)$, dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer (X', Y') et (X'', Y'') en fonction de X et Y.
6. Dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, déterminer les coordonnées (x', y') de M' et (x'', y'') de M''.

Exercice 3 $(*)$**.**

1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner l'équation de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0)$ et de direction $D = \mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u} = ae_1 + be_2 \neq 0$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation du plan affine $\mathcal{P}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de direction $P = \mathbb{R}\vec{u} \oplus \mathbb{R}\vec{v}$, où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner les équations de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de direction $D = \mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur ci-dessus.

Exercice 4 (Examen 28/6/10)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{E}$, on écrira $M(x, y, z)$ pour indiquer que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(-1, 0, 1)$ et de direction le plan vectoriel P engendré par $f_1 = e_1 + 2e_2$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Soit D la droite vectorielle $P^{\perp}$. On note π_D (resp. π_P) la projection orthogonale sur D (resp. P) et σ la symétrie orthogonale par rapport à P.

1. Donner un vecteur non nul $f_3 \in D$.
2. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, rappeler les formules exprimant $\pi_D(v)$, $\pi_P(v)$ et $\sigma(v)$ en fonction de v et de f_3, puis écrire dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la matrice A (resp. B) de π_P (resp. σ).
3. Soient f la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et g la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IM}$ puis déterminer celles (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des points $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.

4. Soit t_u la translation de vecteur $u = f_1 - f_2$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, déterminer les coordonnées (x_1', y_1', z_1') et (x_2', y_2', z_2') des points $M_1' = t_u(M_1)$ et $M_2' = t_u(M_2)$. Déterminer, en le justifiant, la nature et les caractéristiques de la transformation affine $t_u \circ g$.

Exercice 5 (CC 2009–10)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z+2 \\ x \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.
3. Déterminer l'ensemble des points $I \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$, calculer dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{If(I)}$, et donner la nature et les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 6 (CC 2009–10)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f, puis sa nature et ses caractéristiques géométriques.

Exercice 7 (Examen 10/6/10)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine telle que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, $M' = f(M)$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\Big(x + y + \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}\Big(x + y - \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ z' &= \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\Big) + 1 \end{aligned}$$

1. Déterminer la partie linéaire ϕ de f et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. Montrer que ϕ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.
3. Soit $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les projections orthogonales u et v de w sur $F = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id})$ et sur $F^{\perp}$. Soit t_{-u} la translation de vecteur $-u$; déterminer un point fixe I de $g = t_{-u} \circ f$.
4. Déterminer la nature de f et préciser ses caractéristiques géométriques.

Exercice 8 (Examen 28/6/11)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soient I le point $(0,2,0)$, w le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, et $\mathcal{D}$ la droite affine $I + \mathbb{R}w$. Soit f le vissage d'axe $\mathcal{D}$ orienté par w, d'angle $\pi/4$ et de vecteur de vissage $\sqrt{2}w = e_1 - e_3$, et soit $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire.

1. Déterminer un vecteur unitaire v tel que $\mathcal{C} = (e_2, v, w)$ soit une BON directe. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et son inverse P^{-1}.
2. Écrire la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f})$, puis la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ (on écrira B sous la forme $B = \dfrac{1}{4}A$, où tous les coefficients de A sont de la forme $p + q\sqrt{2}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$).
3. Soit g la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par w, et d'angle $\pi/4$. Pour tout point $M = (x, y, z)$, déterminer les vecteurs $\overrightarrow{Ig(M)}$ puis $\overrightarrow{If(M)}$.
4. Déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = f(M)$.

Exercice 9 (Exam 8/6/2012)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = 1$ et soient P la direction de $\mathcal{P}$ et σ la partie linéaire de s.

1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P, puis choisir un point $I \in \mathcal{P}$ et pour tout point $M = (x, y, z)$ calculer le vecteur $\overrightarrow{Is(M)}$ puis déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$.

Soit t_w la translation de vecteur $w = 3e_2$ et soit $g = t_w \circ s$.

2. Déterminer les projections orthogonales v et u de w sur $D = P^\perp$ et P respectivement.
3. Déterminer les caractéristiques géométriques de g.

Exercice 10 (Exam 8/6/2012)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/4$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathrm{SO}(3)$.
3. Écrire la matrice $B = RA$ et montrer que $B \in \mathrm{SO}(3)$.
4. Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (L'angle à trouver θ n'est pas, a priori, de la forme $q\pi$, avec $q \in \mathbb{Q}$; pour le déterminer on se contentera de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)
5. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B - I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente (on ne cherchera pas à calculer explicitement les f_i). Pour $i = 1, 2, 3$, exprimer Bf_i dans la base $\mathcal{C}$.
6. Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ comme dans la question précédente, et pour $i = 1, 2, 3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)

7. Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR$. (On pourra remarquer que $C = R^{-1}BR$.)

Exercice 11 (Exam 29/6/2012)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/6$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.
3. Écrire la matrice $B = RA$, montrer que $B \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(B)$.
4. Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (L'angle à trouver θ n'est pas, a priori, de la forme $q\pi$, avec $q \in \mathbb{Q}$; pour le déterminer on se contentera de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)
5. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B + I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente (on ne cherchera pas à calculer explicitement les f_i). Pour $i = 1, 2, 3$, exprimer Bf_i dans la base $\mathcal{C}$.
6. Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ comme dans la question précédente, et pour $i = 1, 2, 3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)
7. Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR = R^{-1}BR$.

Exercice 12 (Exam 8/6/2012)**.** Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $e_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et soit D_θ la droite vectorielle $\mathbb{R}e_\theta$. (Noter que $e_{\theta+\pi} = -e_\theta$, de sorte que $D_{\theta+\pi} = D_\theta$.) On note σ_θ la symétrie orthogonale par rapport à D_θ et l'on rappelle que, pour tous θ, φ, la composée $\sigma_{\theta+\varphi} \circ \sigma_\varphi$ est la rotation d'angle 2θ.

1. Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de σ_0, puis de σ_θ pour θ arbitraire.

On note $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 2. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, on note $t_v : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur v. On note $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$ (sa partie linéaire est la symétrie orthogonale σ_D, où D est la direction de $\mathcal{D}$).

2. Soient D une droite vectorielle, A un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ la droite affine $A + D$. Soient $v \in D^\perp$. Montrer que $s_{\mathcal{D}} \circ t_{-v}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $\mathcal{D}' = t_{v'}(\mathcal{D}) = A + v' + D$, pour un $v' \in D^\perp$ que l'on déterminera en fonction de v.

On fixe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, on note D la droite vectorielle D_φ, et l'on fixe deux points $A, I \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AI} \in D^\perp$. Soit $r = r(I, \theta)$ la rotation de centre I et d'angle θ, soit $s = s_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D} = A + D$, soit t_u la translation de vecteur u, et soit $f = r \circ s \circ t_u$.

3. Sans faire de calculs, dire quelle est la nature géométrique de f.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer, en faisant un minimum de calculs, que $f = s_{I+D_\psi} \circ t_w$, pour un angle ψ que l'on exprimera en fonction de φ et θ et un vecteur w que l'on exprimera en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et u.

On prend $\boxed{\varphi = \pi/6 = \theta, \quad I = (1,1), \quad A = (2, 1-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad u = -2\sqrt{3}e_2.}$

5. Vérifier que $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à la droite $D = D_{\pi/6}$. Puis, pour tout point $M = (x, y)$, déduire de la question précédente les coordonnées (x', y') du point $M' = f(M)$.
6. (Peut se faire indépendamment des questions précédentes.) On prend φ, θ, I, A, u comme ci-dessus. Pour tout $M = (x, y)$, déterminer par des calculs directs le point $t_u(M)$, puis les vecteurs $\overrightarrow{Ast_u(M)}$, $\overrightarrow{Ist_u(M)}$ et $\overrightarrow{If(M)}$, et enfin les coordonnées (x', y') de $f(M)$.

Exercice 13 (Exam 7/6/2011)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère le cône $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Soit A le point $(0,1,1)$ de Γ. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note P_λ le plan vectoriel engendré par e_1 et $e_3 + \lambda e_2$, et $\mathcal{P}_\lambda$ le plan affine $A + P_\lambda$.

1. Donner un vecteur u_λ tel que (e_1, u_λ) soit une BON de P_λ.
2. Pour tout point M de $\mathcal{P}_\lambda$, de coordonnées (x, t) dans le repère (A, e_1, u_λ) de $\mathcal{P}_\lambda$, déterminer les coordonnées de M dans le repère canonique $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda \cap \Gamma$. Écrire l'équation de $\mathcal{C}_\lambda$ sous la forme $q(x, t) + \alpha x + \beta t = k$, où q est une forme quadratique et α, β, k des réels que l'on déterminera. Désormais, on suppose $\lambda \neq 1$.
4. Pour quelles valeurs de λ, $\mathcal{C}_\lambda$ est-elle une parabole, resp. une hyperbole, resp. une ellipse ? Lorsque $\mathcal{C}_\lambda$ est une parabole, écrire son équation sous la forme $x^2 = 2pt$, pour un réel p qu'on déterminera.
5. Lorsque $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole ou une ellipse, écrire son équation sous la forme $\dfrac{T^2}{a^2} \pm \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, où $T = t + \mu$, pour des réels μ, a, b que l'on déterminera (avec $a, b > 0$). Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ avec les droites d'équation $T = 0$ ou $x = 0$.
6. Soit P le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2. Déterminer l'intersection de Γ avec le plan affine $A + P$.

Exercice 14 (CC 2010-11)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien, muni du repère orthonormé canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soit e un réel ≥ 0 ; on considère l'ensemble $\mathcal{C}_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (1-e)x^2 - 2x = 0\}$.

1. Quelle est la nature de $\mathcal{C}_e$ lorsque $e = 0$?
2. Désormais, on suppose $e > 0$. Donner la forme normale de l'équation de $\mathcal{C}_e$ et déterminer en fonction de e la nature de la conique $\mathcal{C}_e$. Lorsque $\mathcal{C}_e$ est une ellipse, déterminer les coordonnées de son centre de symétrie I_e et de ses deux foyers F_e et F'_e.
3. Pour $e = \dfrac{1}{2}, 1, 2$, faire un dessin représentant $\mathcal{C}_e$.

Exercice 15 (Exam 28/6/2011)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B})$, où O désigne le point $(0,0)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique (e_1, e_2). On fixe un réel $h > 0$. Pour tout réel $e > 0$ soit alors $\mathcal{C}_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = e^2(x+h)^2\}$.

1. Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}_e$ avec la droite d'équation $x = 0$ est formée de deux points D_e^+ et D_e^- que l'on déterminera.
2. Écrire l'équation de $\mathcal{C}_e$ sous la forme $q(x, y) + \alpha x + \beta y = k$, où q est une forme quadratique et α, β, k des réels que l'on déterminera, puis déterminer les valeurs de e pour lesquelles $\mathcal{C}_e$ est une parabole, resp. une ellipse, resp. une hyperbole.
3. On suppose que $\mathcal{C}_e$ est une parabole. Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}_e$ avec la droite d'équation $y = 0$ est un point P que l'on déterminera.

4. On suppose que $\mathcal{C}_e$ est une ellipse. Écrire l'équation de $\mathcal{C}_e$ sous la forme

$$\frac{(x-\mu)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pour des réels μ, a, b (avec $a, b > 0$) que l'on déterminera. Soit C_e le point $(\mu, 0)$. Calculer les abscisses $x_e^- < x_e^+$ des points d'intersection $S_e^- = (x_e^-, 0)$ et $S_e^+ = (x_e^+, 0)$ de $\mathcal{C}_e$ avec la droite $y = 0$, puis montrer que $\mathcal{C}_e$ coupe la droite $\Delta_e = C_e + \mathbb{R}e_2$ en deux points T_e^- et T_e^+ que l'on déterminera.

5. On suppose que $\mathcal{C}_e$ est une hyperbole. Écrire l'équation de $\mathcal{C}_e$ sous la forme

$$\frac{(x-\mu)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pour des réels μ, a, b (avec $a, b > 0$) que l'on déterminera. Soit C_e le point $(\mu, 0)$. Calculer les abscisses $x_e^- < x_e^+$ des points d'intersection $S_e^- = (x_e^-, 0)$ et $S_e^+ = (x_e^+, 0)$ de $\mathcal{C}_e$ avec la droite $y = 0$. D'autre part, soit $\mathcal{D}_e^+$ (resp. $\mathcal{D}_e^-$) la droite affine passant par le point C_e et de vecteur directeur $ae_1 + be_2$ (resp. $ae_1 - be_2$), et soit $A_e^+ = (0, y_e^+)$ (resp. $A_e^- = (0, y_e^-)$) le point d'intersection de $\mathcal{D}_e^+$ (resp. $\mathcal{D}_e^-$) avec la droite $x = 0$. Déterminer y_e^+ et y_e^-.

6. On prend maintenant $h = 3$ et l'on fixe e_0 tel que $\mathcal{C}_{e_0}$ soit une parabole. Représenter sur un même dessin les coniques $\mathcal{C}_e$ pour $e = e_0/2, e_0, \sqrt{2}e_0$, en faisant figurer les points $D_e^\pm$ de la question 1), le point P de la question 3), les points $S_e^\pm$, C_e et $T_e^\pm$ des questions 4) et 5), ainsi que les points $A_e^\pm$ et les droites $\mathcal{D}_e^\pm$ de la question 5). (Lorsque $\mathcal{C}_e$ est une hyperbole, on pourra ne représenter que la partie de $\mathcal{C}_e$ et de $\mathcal{D}_e^\pm$ contenue dans le demi-plan $x \geq \mu$. D'autre part, on rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $\sqrt{3} \simeq 1,7$.)

Exercice 16 (Exam 8/6/2012)**.** Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fixée, et soit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = c_n\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$, et déterminer sa direction E.
2. Déterminer $\dim(E)$ et une base $\mathcal{B}$ de E formée de suites géométriques.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^\times$ tel que $a^2 - a - 2 \neq 0$. On prend pour c la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ tel que la suite μc appartienne à $\mathcal{E}_c$ (i.e. tel qu'on ait $\mu a^{n+2} - \mu a^{n+1} - 2\mu a^n = a^n$ pour tout n).
4. On prend $a = 1$, i.e. c est la suite telle que $c_n = 1$ pour tout n. Soit alors μ comme dans la question précédente, et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de $\mathcal{E}_c$ tel que $x_0 = 3/2$ et $x_1 = 1/2$. Exprimer $w = x - \mu c$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, puis donner une formule pour la valeur de x_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 17 (Ensembles convexes)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Pour $P \neq Q$ dans $\mathcal{E}$, on rappelle que l'ensemble des points $(1-t)P + tQ$, avec $t \in [0, 1]$, est le **segment** $[P, Q]$, i.e. l'ensemble des points de la droite affine (PQ) qui sont entre P et Q. (Si $P = Q$, alors $[P, Q] = \{P\}$). Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite **convexe** si elle vérifie la propriété suivante : pour tous points $P, Q \in \mathcal{C}$ et tout réel $t \in [0, 1]$, le point $(1-t)P + tQ$ appartient à $\mathcal{C}$. Ceci équivaut à dire que, pour tout $P, Q \in \mathcal{C}$, le segment $[P, Q]$ est contenu dans $\mathcal{C}$.
On prend $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1\}$ est convexe et faire une figure représentant $\mathcal{C}$.

Exercice 18 ($*$)**.** (Enveloppes convexes) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, $t_1, \dots, t_n$ et $s_1, \dots, s_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 = \sum_{j=1}^{n} s_j$, on considère les points $G = t_1A_1 + \cdots + t_nA_n$ et $G' = s_1A_1 + \cdots + s_nA_n$; enfin, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $I = (1-\lambda)G + \lambda G'$. Montrer que I est le barycentre des points $A_1, \dots, A_n$ affectés respectivement des poids $(1-\lambda)t_1 + \lambda s_1, \dots (1-\lambda)t_n + \lambda s_n$.
2. Pour tout $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, on définit
$$\mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_n) = \{t_1A_1 + \cdots + t_nA_n \mid t_i \in \mathbb{R}_+, \quad t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$
En utilisant la question précédente, montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_n)$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$, contenant $A_1, \dots, A_n$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ est la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant $A_1, \dots, A_n$, c.-à.-d., que toute partie convexe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{E}$ contenant $A_1, \dots, A_n$ contient $\mathcal{C}$. Indication : procéder par récurrence sur n et utiliser la question 1.
4. Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$. Considérons les points $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ et $D = (-1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Conv}(A, B, C, D)$ est le carré $ABCD$ et son intérieur.