

UPMC 2013-2014  
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)  
Feuille d'exercices numéro 1.

*On fixe un corps commutatif  $k$ .*

**Exercice 1.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases} ;$$

montrez que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$  (on en donnera un point et l'espace directeur; la réponse dépend en partie de  $a$  et  $b$ ); quelle est sa dimension?

**Exercice 2.** Soit  $u \in \mathbb{Q}$ . Vérifiez que les deux sous-ensembles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{Q}^4$  respectivement définis par les équations

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = u \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ x - y + 2z + 3t = 2u \end{cases}$$

sont des sous-espaces affines de  $\mathbb{Q}^4$ , dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de  $u$  s'intersectent-ils? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{F}$  le sous-espace affine de  $\mathbb{C}^4$  passant par  $(1; 0; i; -1)$  et dont l'espace directeur est engendré par  $(1; 1; i; -i)$  et  $(0; 1 + i; 1; -1)$ ; donnez un système d'équations cartésiennes de  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 4.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un corps  $k$  et soient  $A$  et  $B$  deux points *distincts* de  $\mathcal{E}$ .

i) Montrez qu'il existe une et une seule droite affine de  $\mathcal{E}$  passant par  $A$  et  $B$ ; on la note  $(AB)$ .

ii) Montrez que si  $k$  est de caractéristique différente de 2, un sous-ensemble non vide  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  en est un sous-espace affine si et seulement si  $(AB) \subset \mathcal{F}$  pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments distincts de  $\mathcal{F}$  (en fait, il suffit que  $k$  soit différente de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire ait au moins trois éléments; mais la preuve sous cette hypothèse est plus difficile; vous pouvez essayer d'y réfléchir).

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine sur un corps ayant au moins trois éléments et soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ ; on suppose que  $k$  a au moins trois éléments. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  pour que leur réunion soit un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

**Exercice 6.** On suppose que  $k$  est de caractéristique différente de 2 (autrement dit,  $2 \neq 0$  dans  $k$ ); soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine.

i) Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $\mathcal{E}$ , montrez qu'il existe un unique point  $M$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$ ; on l'appelle le *milieu* de  $AB$ .

ii) Soient  $A, B, C, D$  quatre points de  $\mathcal{E}$ . Montrez que  $\vec{AB} = \vec{CD}$  si et seulement si  $AD$  et  $BC$  ont même milieu.

iii) Donnez un contre-exemple à l'assertion i) lorsque  $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 7.** Soit  $\mathcal{E}$  le  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -espace affine  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ .

i) Combien  $\mathcal{E}$  a-t-il de points? Combien une droite de  $\mathcal{E}$  a-t-elle de points? Combien de droites de  $\mathcal{E}$  passent par un point donné? Combien  $\mathcal{E}$  a-t-il de droites?

ii) On considère le «triangle»  $ABC$  de  $\mathcal{E}$  où  $A = (0,0)$ , où  $B = (1,0)$  et où  $C = (-1,1)$ . Calculez les coordonnées des milieux de  $AB$ ,  $BC$  et  $AC$ , puis l'équation des «médianes» du triangle, c'est-à-dire des droites passant par un sommet et le milieu des deux autres. Montrez que les médianes sont ici ... parallèles!

iii) Traitez à nouveau la question ii) mais en supposant que l'on travaille dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ; vérifiez que les médianes sont cette fois-ci concourantes.

**Exercice 8.** On note  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et soit  $n$  un entier. Montrez que le sous-ensemble de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  formé des fonctions  $g$  telles que  $g^{(n)} = f$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ; donnez son espace directeur, vérifiez qu'il est de dimension finie et donnez sa dimension. L'espace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  est-il lui-même de dimension finie?

**Exercice 9.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine d'espace directeur  $E$  et soit  $\mathcal{F}$  une partie de  $\mathcal{E}$  telle  $\{\vec{MN}\}_{M \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{F}}$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . La partie  $\mathcal{F}$  est-elle nécessairement un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ ?

**Exercice 10.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine et soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ . Discuter des configurations possibles (nature de l'intersection, dimension du sous-espace engendré) de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  dans chacun des cas suivants :

- i)  $\dim \mathcal{E} = 3, \dim \mathcal{F} = 1, \dim \mathcal{G} = 2$ ;
- ii)  $\dim \mathcal{E} = 3, \dim \mathcal{F} = 2, \dim \mathcal{G} = 2$ ;
- iii)  $\dim \mathcal{E} = 4, \dim \mathcal{F} = 2, \dim \mathcal{G} = 2$ ;
- iv)  $\dim \mathcal{E} = 4, \dim \mathcal{F} = 2, \dim \mathcal{G} = 3$ .

**Exercice 11.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine de dimension 3 et soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites de  $\mathcal{E}$  non parallèles et d'intersection vide.

- i) Montrez qu'il existe un unique plan  $\mathcal{P}$  contenant  $\mathcal{D}$  et parallèle à  $\mathcal{D}'$ ; on définit de même  $\mathcal{P}'$ .
- ii) Soit  $M \in \mathcal{E}$ . Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - a) il existe une droite  $\Delta$  contenant  $M$  et rencontrant  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ ;
  - b)  $M \in (\mathcal{E} - (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}')) \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ .

**Exercice 12.** Soit  $n \geq 1$  et soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de points d'un  $k$ -espace affine  $\mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) le sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  engendré par  $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$  (resp.  $\{P_0, \dots, P_n\}$ ). Montrez que l'on a  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  ou  $\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{F} + 1$ . On établira ce résultat par deux méthodes différentes : dans un premier temps, on montrera que  $\mathcal{G}$  est le sous-espace affine engendré par  $\mathcal{F} \cup \{P\}$  et l'on appliquera la formule du cours; dans un second temps, on utilisera la description explicite de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  donnée en cours.

**Exercice 13.** Soit  $n \geq 0$  et soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de points d'un  $k$ -espace affine; soit  $I$  un sous-ensemble non vide de  $\{0, \dots, n\}$ . Montrez que si  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille de points affinement indépendants, alors  $(P_i)_{i \in I}$  est une famille de points affinement indépendants. Là encore, on donnera deux preuves : l'une reposant sur la caractérisation de l'indépendance affine au moyen

de la liberté d'une certaine famille de vecteurs, l'autre utilisant le critère de dimension du sous-espace affine engendré, et l'exercice ci-dessus.

**Exercice 14.** À quelle condition sur le réel  $a$  les quatre points

$$(1; 1; a), (2; 3; 2a), (3; 1 - a; a - 1), (2; 3; 3 + a)$$

de  $\mathbb{R}^3$  sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de  $a$  pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

**Exercice 15.** Soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$  formé des quadruplets  $(x, y, z, t)$  tels que  $x - y + 2z + 3t = 5$  ; montrez que c'est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^4$  dont on donnera l'espace directeur ; donnez un repère affine de  $\mathcal{F}$  ; complétez-le en un repère affine de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 16.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine, soit  $n \geq 0$  et soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de points affinement indépendants de  $\mathcal{E}$ . Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$  ; soit  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) l'espace affine engendré par les  $P_j$  pour  $j \leq i$  (resp.  $j \geq i$ ). Donnez les dimensions de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  ; décrivez leur intersection. Indication : si vous ne voyez pas ce qui se passe, commencez par penser au cas d'un triplet de points dans  $\mathbb{R}^2$  (triangle non aplati) ou d'un quadruplet de points dans  $\mathbb{R}^3$  (tétraèdre non aplati).