

Université Paris 6
 Année universitaire 2012-2013
 Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
 Feuille d'exercices numéro 2.

Exercice 1. Montrez que deux espaces affines de même dimension finie n sur un corps k donné sont toujours isomorphes.

Exercice 2. Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2 et soit E son espace directeur. Soit $O \in \mathcal{E}$, soit (e_1, e_2) une base de E et soit \mathcal{R} le repère (O, e_1, e_2) de \mathcal{E} .

i) Soit f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} donnée en coordonnées dans le repère \mathcal{R} par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y + 5, 7x - 2y + 3).$$

Donnez la matrice de f dans \mathcal{R} .

ii) Soit O' le point de \mathcal{E} de coordonnées $(2, -1)$; posons $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Vérifiez que (e'_1, e'_2) est une base de E . Soit \mathcal{R}' le repère (O', e'_1, e'_2) de \mathcal{E} ; donner la matrice de passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}' ; en déduire la matrice de f dans le repère \mathcal{R}' , puis une définition de f par une formule en coordonnées dans le repère \mathcal{R}' .

iii) Trouvez le repère $\mathcal{R}'' = (O'', e''_1, e''_2)$ de \mathcal{E} caractérisé par la propriété suivante : si M est un point de \mathcal{E} de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} , ses coordonnées dans \mathcal{R}'' sont $(x - y + 3, 2x + y - 6)$.

iv) Trouvez un repère \mathcal{R}''' de \mathcal{E} dans lequel f peut être définie par une formule sans termes constants.

Exercice 3. Soit k un corps, soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F , et soit f une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{F} . Si $u \in E$ et si $v \in F$, montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $t_v \circ f = f \circ t_u$;
- ii) il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $t_v(f(M)) = f(t_u(M))$;
- iii) $\vec{f}(u) = v$.

Cas particulier. On suppose (seulement pour cette question) que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. À quelle condition sur u la translation de vecteur u commute-t-elle à f ?

Question subsidiaire. Démontrer directement l'équivalence entre i) et ii) sans le moindre calcul, en vous fondant sur un résultat du cours.

Une application. Soit g une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{F} telle que $\vec{f} = \vec{g}$. Montrez que f est surjective si et seulement si g est surjective; si c'est le cas, montrez qu'il existe u dans E tel que $f = g \circ t_u$. Cela reste-t-il vrai en général sans hypothèse de surjectivité?

Exercice 4. Si O, A et A' sont trois points d'une droite affine et si $A \neq O$, on se permettra de noter $\frac{\vec{OA'}}{\vec{OA}}$ l'unique scalaire λ tel que $\vec{OA'} = \lambda \vec{OA}$.

Soit \mathcal{E} un plan affine sur un corps k et soit O, A et B trois points affinement indépendants de \mathcal{E} . Soit A' (resp. B') un point de la droite (OA) (resp. (OB))

qui diffère de O . On note h l'unique homothétie de centre O qui envoie A sur A' (justifiez brièvement l'existence et l'unicité de h). Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) $\frac{\vec{OB'}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{OA'}}{\vec{OA}}$;
- ii) $h(B) = B'$;
- iii) les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Remarque. L'équivalence entre i) et iii) est ce qu'on appelle usuellement le *théorème de Thalès*.

Exercice 5. Soit \mathcal{E} un espace affine sur un corps k d'espace directeur E . Soit h une homothétie de \mathcal{E} dont on note O le centre et λ le rapport ; on suppose que $\lambda \neq 1$. Soit $v \in E$; décrire aussi précisément que possible les applications $h \circ t_v$ et $t_v \circ h$.

Exercice 6. Soit \mathcal{E} un espace affine sur un corps k et soit E son espace directeur. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit π la projection de E sur G parallèlement à F et soit p une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} dont l'application linéaire associée est π .

- a) Déterminez $\text{Ker}(\pi - \text{Id})$ et $\text{Im}(\pi - \text{Id})$ et vérifiez que

$$E = \text{Ker}(\pi - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\pi - \text{Id}).$$

Qu'en déduit-on à propos de l'application p ?

- b) Montrez qu'une application linéaire ℓ de E dans lui-même est une projection (vectorielle) si et seulement si $\ell^2 = \ell$; montrez qu'une application affine f de \mathcal{E} dans lui-même est une projection si et seulement si $f^2 = f$.

Exercice 7. Soit \mathcal{E} un espace affine sur un corps k de caractéristique différente de 2 et soit E son espace directeur. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit σ la symétrie par rapport à G et parallèlement à F et soit s une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} dont l'application linéaire associée est σ .

- a) Déterminez $\text{Ker}(\sigma - \text{Id})$ et $\text{Im}(\sigma - \text{Id})$ et vérifiez que

$$E = \text{Ker}(\sigma - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\sigma - \text{Id}).$$

Qu'en déduit-on à propos de l'application s ?

- b) Montrez qu'une application linéaire ℓ de E dans lui-même est une symétrie (vectorielle) si et seulement si $\ell^2 = \text{Id}$; montrez qu'une application affine f de \mathcal{E} dans lui-même est une projection si et seulement si $f^2 = \text{Id}$.

Exercice 8. Soit ℓ l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminez $\text{Ker}(\ell - \text{Id})$ et $\text{Im}(\ell - \text{Id})$; montrez que \mathbb{R}^3 est la somme directe de ces deux sous-espaces.

b) Soit f l'application affine de \mathbb{R}^3 dans lui-même donnée par la formule

$$(x, y, z) \mapsto (y + 1, x + 2, -z + 3).$$

Déterminez l'unique couple (u, g) , où $u \in \text{Ker}(\ell - \text{Id})$ et où g est une application affine ayant un point fixe, tel que $f = t_u \circ g$; donnez un point et l'espace directeur de l'ensemble des points fixes de g .

Exercice 9. Soit ℓ l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui envoie (x, y) sur $(x + y, y)$.

a) Déterminez $\text{Ker}(\ell - \text{Id})$ et $\text{Im}(\ell - \text{Id})$; l'espace \mathbb{R}^2 est-il somme directe de ces deux sous-espaces ?

b) Donnez un exemple d'une application affine f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 dont l'application linéaire associée est ℓ et telle que pour tout $u \in \text{Ker}(\ell - \text{Id})$ l'application $t_u \circ f$ soit sans point fixe.