

Université Paris 6
 Année universitaire 2013-2014
 Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
 Feuille d'exercices numéro 3.

Exercice 1. Soit \mathcal{E} un espace affine sur un corps k d'espace directeur E . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, et soit \mathcal{G} un sous-espace affine de \mathcal{E} dirigé par G ; soit u un vecteur de F , et soit \mathcal{G}' le sous-espace $t_u(\mathcal{G})$.

- i) Quel est l'espace directeur de \mathcal{G}' ? Que peut-on dire de $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$?
- ii) Soit s (resp. s') la symétrie par rapport à \mathcal{G} (resp. \mathcal{G}') et parallèlement à F . Décrire aussi précisément que possible la composée $s' \circ s$.
- iii) Soit v un vecteur de E . Démontrer sans calcul que $t_v \circ s$ a une unique écriture de la forme $t_w \circ \xi$, où $w \in G$ et où ξ est une symétrie par rapport à un sous-espace \mathcal{G}'' de \mathcal{E} dirigé par G , et parallèlement à F . Explicitiez w et \mathcal{G}'' en fonction des données.
- iv) Reprendre les questions ii) et iii) en remplaçant partout «symétrie par rapport à» par «projection sur».

Exercice 2. Soit \mathcal{E} un espace affine réel de dimension 4, et soit $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_4)$ un repère cartésien de \mathcal{E} . Soient A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points de \mathcal{E} de coordonnées respectives

$$(1, 2, -1, 3); (0, -2, 1, 4); (3, 1, -2, 1); (2, -4, 1, 3) \text{ et } (5, 1, 2, -3)$$

dans \mathcal{R} . Soit G' le barycentre de $((A_0, 1), (A_1, 3), (A_2, 7))$ et soit G'' le barycentre de $((A_3, 6), (A_4, -3))$; déterminez les coordonnées de G' et G'' dans \mathcal{R} . Soit G le barycentre de $((A_0, 1), (A_1, 3), (A_2, 7), (A_3, 6), (A_4, -3))$; déterminez les coordonnées de G dans \mathcal{R} .

Exercice 3. Soit \mathcal{P} un plan affine sur un corps k de caractéristique différente de 2 et 3, et soit (ABC) un repère affine de \mathcal{P} ; on travaille en coordonnées barycentriques dans (ABC) . Soit G l'isobarycentre de (ABC) et soit H le point de coordonnées $(1, 1, -1)$.

- 1) Justifiez que $G \neq H$ et donnez une équation de la droite (GH) .
- 2) Soit P un point de \mathcal{P} de coordonnées (a, b, c) . Donnez en fonction de a, b et c une équation de la droite passant par P et parallèle à (GH) .

Exercice 4. Théorème de Menelaüs. Soit \mathcal{P} un plan affine sur un corps k , et soit (ABC) un repère affine de \mathcal{P} . Soit A' (resp. B' , resp. C') un point de (BC) différent de B et C (resp. un point de (AC) différent de A et C , resp. un point de (AB) différent de A et B). Montrez que A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\vec{A'B}}{\vec{A'C}} \cdot \frac{\vec{B'C}}{\vec{B'A}} \cdot \frac{\vec{C'A}}{\vec{C'B}} = 1.$$

Exercice 5. Soit k un corps et soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 sur k ; on fixe un repère affine de \mathcal{E} et l'on travaille en coordonnées barycentriques dans celui-ci.

1) Soit \mathcal{P} un sous-ensemble de \mathcal{E} . Montrez que \mathcal{P} est un plan si et seulement si il peut être défini par une équation de la forme $ax + by + cz + dt = 0$ avec a, b, c et d non tous nuls; à quelle condition deux telles équations définissent-elles le même plan?

2) Soient $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}''$ et \mathcal{P}''' quatre plans de \mathcal{E} , définis par les équations

$$ax + by + cz + dt = 0, a'x + b'y + c'z + d't = 0, \text{ etc.}$$

Interpréter géométriquement (en termes de la configuration des plans étudiés) les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit \mathcal{E} un espace affine réel. On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathcal{E} est *convexe* si pour toute famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de \mathcal{C} et pour toute famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de scalaires positifs ou nuls et non tous nuls, le barycentre de $((A_i, \lambda_i))$ appartient à \mathcal{C} .

1) Montrez que l'intersection d'une famille de parties convexes de \mathcal{E} est convexe; en déduire que si \mathcal{C} est une partie *quelconque* de \mathcal{E} il existe une plus petite partie convexe contenant \mathcal{C} , que l'on appelle *l'enveloppe convexe* de \mathcal{C} .

2) Si (A_1, \dots, A_n) est une famille finie de points de \mathcal{P} , montrez que l'enveloppe convexe de $\{A_1, \dots, A_n\}$ est égale à l'ensemble des points de la forme $\text{Bar}((A_i, \lambda_i))$ où (λ_i) est une famille de scalaires positifs non tous nuls.

Si A et B sont deux points de \mathcal{P} , on appelle *segment* reliant A à B , et l'on note $[AB]$, l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$; d'après ce qui précède, on a $[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B\}_{\lambda \in [0,1]}$.

3) Montrez qu'une partie \mathcal{C} de \mathcal{P} est convexe si et seulement si pour tout couple (A, B) de point de \mathcal{C} le segment $[AB]$ est contenu dans \mathcal{C} .

4) Si \mathcal{C} est une partie convexe de \mathcal{P} , on dit qu'un point x de \mathcal{C} est *extrémal* s'il possède la propriété suivante : *pour tout couple de points (A, B) de \mathcal{P} tels que $x \in [AB]$ et $[AB] \subset \mathcal{C}$ l'on a $A = x$ ou $B = x$.*

Déterminez les points extrémaux des parties suivantes de \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, y), |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \quad \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Montrez que si (A_0, \dots, A_n) est une famille de points affinement indépendants de \mathcal{E} l'ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe des A_i est exactement $\{A_i\}_{0 \leq i \leq n}$. Cela reste-t-il vrai en général sans hypothèse d'indépendance affine?

Exercice 7. Théorème de Carathéodory. Soit \mathcal{E} un espace affine réel de dimension finie n et soit (A_1, \dots, A_p) une famille finie de points de \mathcal{E} . Soit \mathcal{C}

l'enveloppe convexe des A_i et soit Γ l'ensemble des points de \mathcal{E} pouvant s'écrire comme le barycentre d'une famille d'au plus $n + 1$ points parmi les A_i , affectés de coefficients positifs. On dispose d'une inclusion naturelle $\Gamma \subset \mathcal{C}$; le but de ce qui suit est de prouver l'inclusion réciproque. On procède par récurrence sur p .

1) Que dire si $p \leq n + 1$?

2) On suppose que $p > n + 1$ et que la propriété a été démontrée au rang p . Soit $x \in \mathcal{C}$; on écrit $x = \sum \lambda_i A_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ quel que soit i et $\sum \lambda_i = 1$.

Prouvez qu'il existe j tel que A_j soit un barycentre des A_i pour $i \neq j$; on renumérote éventuellement les A_i de sorte que $j = 1$ et l'on écrit $A_1 = \sum_{i \geq 2} t_i A_i$ avec $\sum t_i = 1$. On pose $\mu_1 = 1$ et $\mu_i = -t_i$ pour tout $i > 2$.

3) Montrez qu'il est licite d'écrire pour tout ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$ l'égalité

$$a_\ell = \sum_{i \neq \ell} -\frac{\mu_i}{\mu_\ell} a_i.$$

4) Soit ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$. Donnez une expression de x comme barycentre des A_i pour $i \neq \ell$; montrez qu'il est possible de choisir ℓ de sorte que les coefficients apparaissant dans cette écriture soient tous positifs, et conclure.