UPMC 2013-2014
Cours de *Séries et intégrales* (2M 250)
9 octobre 2014

Contrôle Continu

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Donner la définition des locutions suivantes :

1. "La série $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à un nombre réel $x \in \mathbb{R}$".
2. "La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge à un nombre réel $S \in \mathbb{R}$".

Supposons $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le critère de convergence à un nombre réel pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Exercice 2. Pour tout $m, n \geq 1$ on considère les suites suivantes :

$$S_m := \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}, \qquad T_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Pour tout $m \geq 1$ montrer que $S_{m+1} - S_m \geq 1/2$.
2. En déduire $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = +\infty$.
3. Conclure $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$.

Exercice 3. Par définition, la *partie entière* d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est le plus grand nombre entier n tel que $n \leq x$. On la désigne par $[x]$. Par exemple on a,

$$[1.3] = 1, \quad [\pi] = 3, \qquad [-2.5] = -3.$$

En formule, on a :

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x \leq [x+1]$.
2. On considère les fonctions $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{[x]}.$$

   Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f(x) \leq g(x)$.
3. Pour tout nombre entier $n \geq 1$ montrer, par récurrence sur n, l'égalité suivante :

   $$\int_1^{n+1} g(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

4. Pour tout nombre réel $R \geq 1$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^R f(x)\ dx$.
5. En rappelant la monotonie de l'intégrale, montrer :

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

   (c'est-à-dire, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ne converge pas).

6. (*) La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$? Si oui, le démontrer ; sinon, expliciter un point ou elle ne l'est pas.

Exercice 4. Soit α un nombre réel et soient $f_\alpha, g_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = x^\alpha, \qquad g_\alpha(x) = [x]^\alpha.$$

Ici, comme dans l'exercice précédent, $[x]$ désigne la partie entière de x.

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est croissante, décroissante ou constante ? Calculer sa dérivée.
2. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α se prolonge par continuité en 0 ?
3. **Dorénavant on suppose** $\alpha < -1$.
   En utilisant la question (1) de l'exercice précédent, montrer pour tout nombre réel $x > 0$ on a $g_\alpha(x+1) \leq f_\alpha(x)$.
4. Pour tout nombre entier $n \geq 1$ montrer, par récurrence sur n, l'égalité suivante :
   $$\int_1^{n+1} g_\alpha(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$
5. Pour tout nombre réel $R \geq 1$, calculer l'intégrale
   $$\int_1^R f_\alpha(x)\ dx.$$
   Est-il un nombre réel positif ou négatif ?
6. En rappelant la monotonie de l'intégrale, montrer :
   $$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha < +\infty.$$
   Conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha$ converge. (Pourquoi ?)