UPMC 2013-2014
Cours de *Séries et intégrales* (2M 250)
9 octobre 2014

Contrôle Continu

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Donner la définition des locutions suivantes :

1. "La série $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à un nombre réel $x \in \mathbb{R}$".
2. "La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge à un nombre réel $S \in \mathbb{R}$".

Supposons $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le critère de convergence à un nombre réel pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Solution. Il s'agit de définitions du cours. On renvoie au poly sur la page Jean-Lin Journé. □

Exercice 2. Pour tout $m, n \geq 1$ on considère les suites suivantes :

$$S_m := \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}, \qquad T_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Pour tout $m \geq 1$ montrer que $S_{m+1} - S_m \geq 1/2$.
2. En déduire $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = +\infty$.
3. Conclure $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$.

Solution. C'est l'exercice numéro 7 de la feuille 1. On renvoie aux solutions sur la page de Jean-Lin Journé. □

Exercice 3. Par définition, la *partie entière* d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est le plus grand nombre entier n tel que $n \leq x$. On la désigne par $[x]$. Par exemple on a,

$$[1.3] = 1, \quad [\pi] = 3, \qquad [-2.5] = -3.$$

En formule, on a :

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x \leq [x+1]$.
2. On considère les fonctions $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{[x]}.$$

   Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f(x) \leq g(x)$.
3. Pour tout nombre entier $n \geq 1$ montrer, par récurrence sur n, l'égalité suivante :

   $$\int_1^{n+1} g(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

4. Pour tout nombre réel $R \geq 1$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^R f(x)\ dx$.
5. En rappelant la monotonie de l'intégrale, montrer :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

(c'est-à-dire, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ne converge pas).
6. (*) La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$? Si oui, le démontrer ; sinon, expliciter un point ou elle ne l'est pas.

Solution. (1) C'est une tautologie : soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Considérons l'ensemble $\mathcal{N}_x := \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. Par définition, on a $n \leq x$ pour tout $n \in \mathcal{N}_x$ et donc

$$[x] = \max_{n\in\mathcal{N}_x} n \leq x.$$

Pour l'inégalité $x \leq [x+1]$ il suffit de remarquer qu'on a $[x+1] = [x]+1$ (pourquoi ?) et qu'il y a forcément un nombre entier entre x et $x+1$.

(2) C'est trivial d'après la question (1). En effet, pour tout $x \geq 1$ on a

$$[x] \leq x \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}.$$

(3) Supposons $n = 1$. La fonction g est constante sur l'intervalle $[1, 2[$ et elle prend la valeur 1 (en effet $[x] = 1$ pour tout $x \in [1, 2[$). En $x = 2$ la fonction g prend la valeur $1/2$, mais peu importe : changer la valeur en un seul point d'une fonction (intégrable à la Riemann) ne change pas la valeur de l'intégrale. Donc,

$$\int_1^2 g(x)\ dx = \int_1^2 1\ dx = 1.$$

Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$ et montrons-le pour n. Par hypothèse de récurrence on a

$$\int_1^{n+1} g(x)\ dx = \int_1^{n} g(x)\ dx + \int_n^{n+1} g(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \int_n^{n+1} g(x)\ dx.$$

Or même discours qu'avant. La fonction g est constante de valeur $1/n$ sur l'intervalle $[n, n+1[$. En $n+1$ elle prend la valeur $1/(n+1)$, mais changer la valeur en un seul point ne change pas la valeur de l'intégrale. On en tire,

$$\int_n^{n+1} g(x)\ dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\ dx = \frac{1}{n}.$$

En reprenant le calcul commencé avant, on trouve :

$$\int_1^{n+1} g(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(4) Une primitive de la fonction $1/x$ est la fonction $\log x$. Donc, pour tout nombre réel $R \geq 1$ on a :

$$\int_1^R \frac{1}{x}\ dx = \log x\Big|_{x=1}^{R} = \log R.$$

(5) Pour tout nombre entier $n \geq 1$ posons

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad T_n := \log n + 1.$$

Il s'agit de suites croissantes, donc S_n admet une limite finie si et seulement si elle bornée supérieurement (c'était le critère à énoncer dans l'exercice 1). D'après la question (2), par la monotonie de l'intégrale, pour tout nombre entier $n \geq 1$ on a

$$\int_1^{n+1} g(x)\ dx \geq \int_1^{n+1} f(x)\ dx.$$

D'après les questions (3) et (4) on obtient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1) = T_n.$$

La suite T_n est strictement croissante et elle n'est pas bornée supérieurement. En particulier, par monotonie de la limite,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Autrement dit, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ne converge pas (ce qui avait déjà été démontré dans l'exercice 2).

(6) La fonction g est continue par morceaux mais elle n'est pas continue. En effet, pour tout nombre entier n on a

$$\lim_{x\to n^-} g(x) = n - 1, \qquad \lim_{x\to n^+} g(x) = n. \qquad \square$$

Exercice 4. Soit α un nombre réel et soient $f_\alpha, g_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f_\alpha(x) = x^\alpha, \qquad g_\alpha(x) = [x]^\alpha.$$

Ici, comme dans l'exercice précédent, $[x]$ désigne la partie entière de x.

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est croissante, décroissante ou constante ? Calculer sa dérivée.
2. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α se prolonge par continuité en 0 ?
3. **Dorénavant on suppose** $\alpha < -1$.
   En utilisant la question (1) de l'exercice précédent, montrer pour tout nombre réel $x > 0$ on a $g_\alpha(x+1) \leq f_\alpha(x)$.
4. Pour tout nombre entier $n \geq 1$ montrer, par récurrence sur n, l'égalité suivante :

$$\int_1^{n+1} g_\alpha(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

5. Pour tout nombre réel $R \geq 1$, calculer l'intégrale
$$\int_1^R f_\alpha(x)\ dx.$$
Est-il un nombre réel positif ou négatif ?
6. En rappelant la monotonie de l'intégrale, montrer :
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha < +\infty.$$
Conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha$ converge. (Pourquoi ?)

Solution. (1) La dérivée de la fonction f_α est
$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$
pour tout $x > 0$. En particulier f_α est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) si et seulement si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$, resp. $\alpha = 0$).

(2) Si $\alpha > 0$ la fonction f_α se prolonge en 0 par la valeur 0. Si $\alpha = 0$ la fonction f_0 est constante de valeur 1 et donc elle prolonge en 0 par la valeur 1. Si $\alpha < 0$, alors f_α a un singularité en 0 et on a
$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = +\infty.$$

(3) En effet, pour tout $x \geq 1$ et tout $\alpha < -1$ on a
$$x \leq [x+1] \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{[x+1]^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

(4) La preuve est tout à fait similaire à celle de la question 3 de l'exercice précédent. On laisse les détails au lecteur (celle-ci n'est pas une formule acceptée dans les copies !).

(5) Puisque $\alpha < -1$, une primitive de la fonction f_α est donnée par la fonction $x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ (remarquer que $\alpha+1$ est non-nul). Donc
$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_{x=1}^{R} = \frac{1}{\alpha+1}(R^{\alpha+1} - 1).$$
C'est un nombre positif car $R^{\alpha+1} \leq 1$.

(6) Pour tout nombre entier $n \geq 1$ posons
$$S_{\alpha,n} := \sum_{k=1}^{n} k^\alpha, \qquad T_{\alpha,n} := 1 + \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}.$$
La suite $S_{\alpha,n}$ est croissante en n et donc elle admet une limite réelle si et seulement si elle est bornée supérieurement. Pour tout $x > 0$ et tout α posons
$$\tilde{f}_\alpha(x) := \min\{1, f_\alpha(x)\}.$$
Pour tout $x \geq 1$ on a $g_\alpha(x) \leq 1$ car $\alpha+1 < 0$. D'après la question (3) on obtient pour tout $x \geq 1$,
$$g_\alpha(x) \leq \tilde{f}_\alpha(x+1).$$

Par la monotonie de l'intégrale, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int_1^{n+1} g_\alpha(x)\ dx \leq \int_1^{n+1} \tilde{f}_\alpha(x-1)\ dx = \int_0^1 1\ dx + \int_1^n f_\alpha(x)\ dx.$$

D'après les questions (4) et (5), on trouve

$$S_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \leq 1 + \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} = T_{\alpha,n}.$$

La suite $T_{\alpha,n}$ est croissante : en effet, pour tout $n \geq 1$ on peut écrire

$$T_{\alpha,n} = 1 + \frac{f_{\alpha+1}(n+1) - 1}{\alpha+1},$$

et on rappelle que $f_{\alpha+1}$ est décroissante (question (1) et $\alpha+1 < 0$) et $\alpha+1$ est négatif. On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$T_{\alpha,n} \leq \lim_{m\to\infty} 1 + \frac{(m+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} = 1 - \frac{1}{\alpha+1}$$

(pourquoi ?). En particulier, pour tout $n \geq 1$ on a,

$$S_{\alpha,n} \leq 1 - \frac{1}{\alpha+1}.$$

La suite S_n est bornée supérieurement et, en étant une suite croissante, elle converge à un nombre réel. En particulier, la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha$ converge. $\square$