Feuille d'exercices du Chap. 1

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Exercice 1 (CC 2009-10)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8/3 & 5 & 22/3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et des bases de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 2 (CC 2009-10)**.** Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (CC 2009-10)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Déterminer A^{-1}.

Exercice 4 (Partiel 2009-10)**.** En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 5 $(*)$**.** Soient V un k-espace vectoriel, E et F deux sous-espaces vectoriels, de dimension p et q respectivement. Soit $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_r)$ une base de $E \cap F$, on la complète en une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{p-r}, v_1, \dots, v_r)$ de E et en une base $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{q-r})$ de F.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{p-r}, v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{q-r})$ est libre. (Considérer une égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{p-r} e_{p-r} + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r = t_1 f_1 + \cdots + t_{q-r} f_{q-r}$.)
2. Montrer que $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.

Exercice 6. On considère dans $\mathbb{R}^5$ le sous-espace L, resp. M, engendré par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations sur les colonnes de la ou les matrice(s) appropriée(s), donner des bases de L, M, $L + M$ et de $L \cap M$.

Exercice 7 (tiré de l'examen du 28/6/11)**.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{S}(a, b)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

1. Montrer que $\mathcal{S}(a, b)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes.
2. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{S}(a, b) \to \mathbb{C}^2$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $\mathcal{S}(a, b)$.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}(a, b)$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 que l'on déterminera.
4. On suppose que P a deux racines distinctes λ_1, λ_2. Montrer que les suites $\mathbf{u} = (\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{v} = (\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes. (Considérer, pour $x, y \in \mathbb{C}$, le système $x \lambda_1^i + y \lambda_2^i = 0$ pour $i = 0, 1$). Que peut-on en déduire dans ce cas ?

5. On suppose que $a = 1$ et $b = 2$. Déterminer deux suites géométriques $\mathbf{u} = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{v} = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ formant une base de $\mathcal{S}(1, 2)$. Soit $\mathbf{w}$ l'élément de $\mathcal{S}(1, 2)$ défini par $w_0 = -1$ et $w_1 = 4$. Exprimer $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, puis donner la valeur de w_{99} et w_{100}.

Exercice 8. 1. Écrire la matrice A de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

2. Même question pour l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -x + \sqrt{2}y + z \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - z \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et ϕ l'endomorphisme de E qui à tout $P \in E$ associe $P + P'$ (où P' est le polynôme dérivé de P). Montrer que ϕ est surjectif. (Indication : montrer d'abord que ϕ est injectif.)

Exercice 10 $(*)$**.** Soit D (resp. L) l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme dérivé P' (resp. le polynôme XP).

1. Calculer l'image et le noyau de L, puis de D. Que constatez-vous ?
2. En utilisant 1., montrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 11 $(*)$**.** Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et soit Δ l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $\Delta(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$. Montrer que Δ est surjectif mais n'est pas injectif. En déduire que $\mathcal{E}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 12. Soit k un corps. Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, on définit sa *trace* $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (somme des coefficients diagonaux).

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $M_n(k)$.
2. Soient $A, B \in M_n(k)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 13 (CC 2011-12)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^*$ s'annule-t-elle sur P ?
2. Déterminer une base $(f_1, \dots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
3. Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\psi = e_1^* + e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace $E = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 = \psi(v)\}$ de V.

Exercice 14 $(*)$**.** Soit $V = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \dots, X^n)$ de V. Soit ∂ l'endomorphisme de V qui à tout $P \in V$ associe son polynôme dérivé P'. On pose $\partial^i = \partial \circ \cdots \circ \partial$ (i facteurs) pour $i \in \mathbb{N}^*$, et $\partial^0 = \mathrm{id}_V$. On fixe $n = 4$ (mais on peut faire l'exercice pour n arbitraire).

1. Pour $i = 0, \dots, n$, on considère la forme linéaire $\phi_i : V \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \dfrac{(\partial^i P)(0)}{i!}$; montrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de V.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrire la matrice A_λ exprimant la famille de vecteurs $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C}_\lambda$ est une base de V.
3. Soit u_λ l'endomorphisme de V tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_\lambda) = A_\lambda$. Si $\mu \in \mathbb{R}$, pouvez-vous déterminer sans calcul la matrice de $u_\mu \circ u_\lambda$ puis celle de u_λ^{-1} ? Sinon, calculez A_λ^{-1}.

4. Soit $\mathcal{C}_\lambda^*$ la base duale de $\mathcal{C}_\lambda$. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*)$.

Exercice 15 $(*)$**.** Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout $v \in V$ on considère la fonction $\epsilon_x : V^* \to \mathbb{R}$ définie, pour toute application linéaire $\phi \in V^*$, par

$$\epsilon_v(\phi) := \phi(v).$$

1. Montrer que l'application $\epsilon_v : V^* \to \mathbb{R}$ est linéaire.

Donc l'application ϵ_v est, par définition du dual, un élément du dual $(V^*)^* = V^{**}$ de V^* (c'est-à-dire, V^{**} est le *dual du dual* de V). On définit ainsi une application $F : V \to V^{**}$ par

$$F(x) := \epsilon_x.$$

2. Montrer que l'application $F : V \to V^{**}$ est linéaire et injective.
3. En déduire que F est bijective, donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de V et soit $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ la base de V^* duale à $\mathcal{B}$.

4. On considère $\mathcal{B}^{**} = (v_1^{**}, \dots, v_n^{**})$ la base de V^{**} duale à $\mathcal{B}^*$. Montrer que pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$F(v_i) = v_i^{**}.$$

5. En déduire à nouveau que F est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exercice 16 $(*)$**.** Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout sous-espace vectoriel $W \subset V$ on considère le sous-ensemble suivant de V^*, dit son *orthogonal*,

$$W^\perp := \{\phi \in V^* : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } v \in W\}.$$

1. Montrer que $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V^* et $\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = n - \dim_{\mathbb{R}} W$.
2. Étant donnés deux sous-espaces vectoriels $W_1, W_2 \subset V$ montrer :
   - $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$
   - $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

   (*Indication :* montrer les inclusions $(W_1 \cap W_2)^\perp \subset W_1^\perp + W_2^\perp$ et $(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Conclure ensuite grâce à la formule des dimensions).

Soient $V = \mathbb{R}^5$ et W_1, W_2 les deux sous-espaces vectoriels de V définis de la manière suivante :

$$W_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad W_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

3. Écrire une base de W_2, $W_1^\perp$, $W_2^\perp$, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, $W_1^\perp + W_2^\perp$ et $W_1^\perp \cap W_2^\perp$.