

Feuille d'exercices du Chap. 2

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours. Les exercices marqués (*) sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Exercice 1 (Exam 7/6/11). Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 1 \\ 1-t & 2t-1 & -1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 & t-1 \\ -1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Échelonner cette matrice en faisant des opérations sur les colonnes et calculer en fonction de t le déterminant et le rang de A_t ; lorsque $\text{rang}(A_t) < 4$, donner une base de $\text{Im}(A_t)$ et de $\text{Ker}(A_t)$.

Exercice 2 (Exam 28/6/11). Idem pour $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -t-1 & 0 \\ -1 & t-1 & 2 & 2-t \\ 2 & 4 & t & t-1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Déterminant de Vandermonde). Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in k$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule :

$$(*) \quad V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(\dagger) \quad V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{i=2}^n (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.
5. Autre méthode pour (\dagger) . Soit X une indéterminée, vérifier que $V(X, a_2, \dots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $n - 1$. Calculer son coefficient dominant et remarquer ses racines évidentes, retrouver ainsi la formule (\dagger) .

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice A_x ci-dessous soit inversible :

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 5. Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{c} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$T_n := \det \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & a_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et $T_0 := 1$.

1. Pour tout $n \geq 2$ montrer la relation de récurrence suivante :

$$T_n = a_{n-1}T_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}T_{n-2}.$$

On suppose que les suites \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} soient constantes, c'est-à-dire $a_n = a$, $b_n = b$ et $c_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose de plus $a^2 - bc \neq 0$.

2. Soient $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $\theta^2 = a^2 - bc$ et

$$\zeta_1 = \frac{a + \theta}{2}, \quad \zeta_2 = \frac{a - \theta}{2}.$$

À l'aide de l'exercice 7 de la feuille 1, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T_n = \frac{1}{\theta} (\zeta_1^{n+1} - \zeta_2^{n+1}).$$

Exercice 6 (CC 2011-12). Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.
- 2) Peut-on dire si A est diagonalisable? Justifier votre réponse.
- 3) Déterminer une base de chaque espace propre V_λ en faisant des opérations sur les colonnes de $A - \lambda I_3$.

Exercice 7 (CC 2011-12). Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

- 1) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
- 2) Compte tenu du résultat obtenu en 1), quel calcul faut-il faire pour savoir si B est diagonalisable?
- 3) Effectuer ce calcul, et déterminer si B est diagonalisable ou non.

Exercice 8 (Examen du 28/6/11). Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $c \neq 0$, et soient \mathcal{S} le \mathbb{C} -espace vectoriel des suites complexes $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$(*) \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Dites, en le justifiant, quelle est la dimension de E .
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.
3. Soit $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ (i.e. $D(\mathbf{u})_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que E est stable par D .
4. On suppose que P a trois racines distinctes, non nulles, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Montrer que les suites $\mathbf{u} = (\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{v} = (\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (\lambda_3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes. (On pourra soit utiliser l'endomorphisme D , soit considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $x\lambda_1^i + y\lambda_2^i + z\lambda_3^i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$). Que peut-on en déduire dans ce cas ?
5. On suppose que $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 4 = t_2$. Déterminer t_{99} et t_{100} .

Exercice 9 (Examen du 7/6/11). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in$

$M_n(\mathbb{R})$, i.e. les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent -1 , ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2 , et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \det(A_n)$.

1. En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.
2. Quelle est la forme générale des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant cette relation de récurrence linéaire $u_n = bu_{n-1} + cu_{n-2}$? En utilisant les valeurs $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$ en déduire, en résolvant un système linéaire, une formule exacte donnant la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer D_8 et D_9 .

Exercice 10. (extrait de l'examen du 7/6/11) Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1) Écrire la matrice $A - XI_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, montrer que le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \right).$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P (on ne demande pas de calculer λ). En utilisant le calcul précédent (remplaçant X par λ), montrer que l'espace propre $V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension 1 et en donner un générateur.

- 3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
 4) Soient $n = 4$, $a_0 = 0$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$; est-ce que A est diagonalisable ?

Exercice 11. Soient $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $M_a \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont a , sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls et soit $P_a(X)$ le polynôme caractéristique de M_a :

$$P_a(X) = \det \begin{pmatrix} -X & a & a & \cdots & a \\ a & -X & a & \ddots & a \\ a & a & -X & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & -X & a \\ a & \cdots & a & a & -X \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes puis les lignes de $M_a - XI_n$ (ou vice-versa), calculer $P_a(X)$ et $\det(M_a) = P_a(0)$.

Exercice 12 (*). Soit M_a la matrice de l'exercice précédent, voici une autre méthode pour déterminer, sans calculs, son polynôme caractéristique $P_a(X)$. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n , et u l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par M_a , i.e. tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = M_a$.

1. Montrer que l'espace propre $V_{-a} = \text{Ker}(M_a + aI_n)$ est de dimension $n - 1$.
2. En calculant $\text{Tr}(M_a)$, trouver la dernière valeur propre de M_a . En déduire que M_a est diagonalisable et déterminer $P_a(X)$ et $\det(M_a) = P_a(0)$.

Exercice 13 (CC 2011-12). Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base

canonique de \mathbb{C}^4 .

- 1) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, exprimer les vecteurs Je_i dans la base \mathcal{B} , puis calculer J^2e_i , J^3e_i et J^4e_i .
- 2) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4 .
- 3) Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$; on suppose que $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?
- 4) Appliquer alors le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 14. 1) On considère les matrices suivantes, à coefficients dans \mathbb{R} (pour B , on a $t \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dites lesquelles sont diagonalisables, et trouvez pour celles-ci une base de vecteurs propres. Expliquez pourquoi les autres ne sont pas diagonalisables.

- 2) Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $G_t = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$?

Exercice 15. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base de diagonalisation \mathcal{C} choisie.

Exercice 16 (* CC 2010–11). Soit (e_0, e_1, \dots, e_9) la base canonique de \mathbb{C}^{10} et soit u l'endomorphisme défini par $u(e_j) = e_{j+2}$ pour $j = 0, 1, \dots, 7$ et $u(e_8) = e_0$, $u(e_9) = e_1$, c.-à.-d., qui envoie $e_{j \bmod 10}$ sur $e_{j+2 \bmod 10}$.

1. Montrer, **sans calculer les espaces propres** et en citant un résultat du cours, que u est diagonalisable.
2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de u est contenu dans un ensemble E à 5 éléments, que l'on précisera.
3. On note ξ le nombre complexe $\exp(2i\pi/5)$ (où $i = \sqrt{-1}$). Calculer l'image par u des vecteurs $v_0 = e_0 + e_2 + e_4 + e_6 + e_8$ et $v_1 = e_0 + \xi^{-1}e_2 + \xi^{-2}e_4 + \xi^{-3}e_6 + \xi^{-4}e_8$.
4. Construire des vecteurs propres v_2, \dots, v_9 de u , similaires aux précédents, et montrer qu'ils forment une base de \mathbb{C}^{10} , puis écrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 17 (* CC 2010–11). Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soient $f \in \text{End}_k(V)$, λ une valeur propre de f , V_λ l'espace propre et $V_{(\lambda)}$ l'espace caractéristique associés. Si $g \in \text{End}_k(V)$ commute à f (i.e. $f \circ g = g \circ f$), montrer que $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_N\}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux (i.e. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout i, j). Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{F} est diagonale. **Indication** : considérer d'abord le cas où tous les f_i sont des homothéties ; puis, si f_1 n'est pas une homothétie, considérer les espaces propres de f_1 et procéder par récurrence sur $n = \dim V$.
3. On prend $k = \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\text{GL}(V)$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable (on rappelle que pour tout élément g d'un groupe fini G de cardinal N , g^N égale l'élément neutre de G), puis qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de G est diagonale.