UPMC 2014-2015
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Feuille d'exercices numéro 1.

On fixe un corps commutatif k.

Exercice 1. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & a \\ x & - & 2y & + & z & = & b \end{array}\right. ;$$

montrez que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Exercice 2. Soit $u \in \mathbb{Q}$. Vérifiez que les deux sous-ensembles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de $\mathbb{Q}^4$ respectivement définis par les équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & u \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 2u \end{array}\right.$$

sont des sous-espaces affines de $\mathbb{Q}^4$, dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de u s'intersectent-ils ? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

Exercice 3. Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace affine de $\mathbb{C}^4$ passant par $(1; 0; i; -1)$ et dont l'espace directeur est engendré par $(1; 1; i; -i)$ et $(0; 1 + i; 1; -1)$; donnez un système d'équations cartésiennes de $\mathscr{F}$.

Exercice 4. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps k et soient A et B deux points *distincts* de $\mathscr{E}$.

i) Montrez qu'il existe une et une seule droite affine de $\mathscr{E}$ passant par A et B ; on la note (AB).

ii) Montrez que si k est de caractéristique différente de 2, un sous-ensemble non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ en est un sous-espace affine si et seulement si $(AB) \subset \mathscr{F}$ pour tout couple (A, B) d'éléments distincts de $\mathscr{F}$ (en fait, il suffit que k soit différente de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire ait au moins trois éléments ; mais la preuve sous cette hypothèse est plus difficile ; vous pouvez essayer d'y réfléchir).

Exercice 5. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine sur un corps ayant au moins trois éléments et soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$; on suppose que k a au moins trois éléments. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ pour que leur réunion soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

Exercice 6. On suppose que k est de caractéristique différente de 2 (autrement dit, $2 \neq 0$ dans k) ; soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine.

i) Si A et B sont deux points de $\mathscr{E}$, montrez qu'il existe un unique point M de $\mathscr{E}$ tel que $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$; on l'appelle le *milieu de AB*.

ii) Soient A, B, C, D quatre points de $\mathscr{E}$. Montrez que $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si AD et BC ont même milieu.

iii) Donnez un contre-exemple à l'assertion i) lorsque $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit $\mathscr{E}$ le $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-espace affine $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

i) Combien $\mathscr{E}$ a-t-il de points ? Combien une droite de $\mathscr{E}$ a-t-elle de points ? Combien de droites de $\mathscr{E}$ passent par un point donné ? Combien $\mathscr{E}$ a-t-il de droites ?

ii) On considère le «triangle» ABC de $\mathscr{E}$ où $A = (0,0)$, où $B = (1,0)$ et où $C = (-1,1)$. Calculez les coordonnées des milieux de AB, BC et AC, puis l'équation des «médianes» du triangle, c'est-à-dire des droites passant par un sommet et le milieu des deux autres. Montrez que les médianes sont ici ... parallèles !

iii) Traitez à nouveau la question ii) mais en supposant que l'on travaille dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$; vérifiez que les médianes sont cette fois-ci concourantes.

Exercice 8. On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et soit n un entier. Montrez que le sous-ensemble de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ formé des fonctions g telles que $g^{(n)} = f$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$; donnez son espace directeur, vérifiez qu'il est de dimension finie et donner sa dimension. L'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ est-il lui-même de dimension finie ?

Exercice 9. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine d'espace directeur E et soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{E}$ telle $\{\overrightarrow{MN}\}_{M\in\mathscr{F},N\in\mathscr{F}}$ soit un sous-espace vectoriel de E. La partie $\mathscr{F}$ est-elle nécessairement un sous-espace affine de $\mathscr{E}$?

Exercice 10. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. Discuter des configurations possibles (nature de l'intersection, dimension du sous-espace engendré) de $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ dans chacun des cas suivants :

i) $\dim \mathscr{E} = 3, \dim \mathscr{F} = 1, \dim \mathscr{G} = 2$;
ii) $\dim \mathscr{E} = 3, \dim \mathscr{F} = 2, \dim \mathscr{G} = 2$;
iii) $\dim \mathscr{E} = 4, \dim \mathscr{F} = 2, \dim \mathscr{G} = 2$;
iv) $\dim \mathscr{E} = 4, \dim \mathscr{F} = 2, \dim \mathscr{G} = 3$.

Exercice 11. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension 3 et soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de $\mathscr{E}$ non parallèles et d'intersection vide.

i) Montrez qu'il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$ et parallèle à $\mathscr{D}'$; on définit de même $\mathscr{P}'$.

ii) Soit $M \in \mathscr{E}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une droite Δ contenant M et rencontrant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$;
b) $M \in (\mathscr{E} - (\mathscr{P} \cup \mathscr{P}')) \cup \mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$.

Exercice 12. Soit $n \geqslant 1$ et soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de points d'un k-espace affine $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ engendré par $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ (resp. $\{P_0, \ldots, P_n\}$). Montrez que l'on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ ou $\dim \mathscr{G} = \dim \mathscr{F} + 1$. On établira ce résultat par deux méthodes différentes : dans un premier temps, on montrera que $\mathscr{G}$ est le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \{P\}$ et l'on appliquera la formule du cours ; dans un second temps, on utilisera la description explicite de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ donnée en cours.

Exercice 13. Soit $n \geqslant 0$ et soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de points d'un k-espace affine ; soit I un sous-ensemble non vide de $\{0, \ldots, n\}$. Montrez que si $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de points affinement indépendants, alors $(P_i)_{i\in I}$ est une famille de points affinement indépendants. Là encore, on donnera deux preuves : l'une reposant sur la caractérisation de l'indépendance affine au moyen de la liberté d'une certaine famille de vecteurs, l'autre utilisant le critère de dimension du sous-espace affine engendré, et l'exercice ci-dessus.

Exercice 14. À quelle condition sur le réel a les quatre points

$$(1;1;a),\ (2;3;2a),\ (3;1-a;a-1),\ (2;3;3+a)$$

de $\mathbb{R}^3$ sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de a pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Exercice 15. Soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des quadruplets (x, y, z, t) tels que $x - y + 2z + 3t = 5$; montrez que c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera l'espace directeur ; donnez un repère affine de $\mathscr{F}$; complétez-le en un repère affine de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine, soit $n \geqslant 0$ et soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de points affinement indépendants de $\mathscr{E}$. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$; soit $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) l'espace affine engendré par les P_j pour $j \leqslant i$ (resp. $j \geqslant i$). Donnez les dimensions de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$; décrire leur intersection. Indication : si vous ne voyez pas ce qui se passe, commencez par penser au cas d'un triplet de points dans $\mathbb{R}^2$ (triangle non aplati) ou d'un quadruplet de points dans $\mathbb{R}^3$ (tétraèdre non aplati).