Université Paris 6
Année universitaire 2014-2015
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Feuille d'exercices numéro 2.

Exercice 1. Montrez que deux espaces affines de même dimension finie n sur un corps k donné sont toujours isomorphes.

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2 et soit E son espace directeur. Soit $O \in \mathcal{E}$, soit (e_1, e_2) une base de E et soit $\mathcal{R}$ le repère (O, e_1, e_2) de $\mathcal{E}$.

i) Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ donnée en coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y + 5, 7x - 2y + 3).$$

Donnez la matrice de f dans $\mathcal{R}$.

ii) Soit O' le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(2, -1)$; posons $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Vérifiez que (e'_1, e'_2) est une base de E. Soit $\mathcal{R}'$ le repère (O', e'_1, e'_2) de $\mathcal{E}$; donner la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$; en déduire la matrice de f dans le repère $\mathcal{R}'$, puis une définition de f par une formule en coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.

iii) Trouvez le repère $\mathcal{R}'' = (O'', e''_1, e''_2)$ de $\mathcal{E}$ caractérisé par la propriété suivante : *si M est un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées dans $\mathcal{R}''$ sont $(x - y + 3, 2x + y - 6)$.*

iv) Trouvez un repère $\mathcal{R}'''$ de $\mathcal{E}$ dans lequel f peut être définie par une formule sans termes constants.

Exercice 3. Soit k un corps, soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F, et soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Si $u \in E$ et si $v \in F$, montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $t_v \circ f = f \circ t_u$;
ii) il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $t_v(f(M)) = f(t_u(M))$;
iii) $\vec{f}(u) = v$.

Cas particulier. On suppose (seulement pour cette question) que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. À quelle condition sur u la translation de vecteur u commute-t-elle à f ?

Question subsidiaire. Démontrer directement l'équivalence entre i) et ii) sans le moindre calcul, en vous fondant sur un résultat du cours.

Une application. Soit g une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\vec{f} = \vec{g}$. Montrez que f est surjective si et seulement si g est surjective ; si c'est le cas, montrez qu'il existe u dans E tel que $f = g \circ t_u$. Cela reste-t-il vrai en général sans hypothèse de surjectivité ?

Exercice 4. Si O, A et A' sont trois points d'une droite affine et si $A \neq O$, on se permettra de noter $\dfrac{\vec{OA'}}{\vec{OA}}$ l'unique scalaire λ tel que $\vec{OA'} = \lambda \vec{OA}$.

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur un corps k et soit O, A et B trois points affinement indépendants de $\mathcal{E}$. Soit A' (resp. B') un point de la droite (OA) (resp. (OB))

qui diffère de O. On note h l'unique homothétie de centre O qui envoie A sur A' (justifiez brièvement l'existence et l'unicité de h). Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$;

ii) $h(B) = B'$;

iii) les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Remarque. L'équivalence entre i) et iii) est ce qu'on appelle usuellement *le théorème de Thalès.*

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps k d'espace directeur E. Soit h une homothétie de $\mathcal{E}$ dont on note O le centre et λ le rapport ; on suppose que $\lambda \neq 1$. Soit $v \in E$; décrire aussi précisément que possible les applications $h \circ t_v$ et $t_v \circ h$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps k et soit E son espace directeur. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit π la projection de E sur G parallèlement à F et soit p une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est π.

a) Déterminez $\mathrm{Ker}\,(\pi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(\pi - \mathrm{Id})$ et vérifiez que

$$E = \mathrm{Ker}\,(\pi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(\pi - \mathrm{Id}).$$

Qu'en déduit-on à propos de l'application p ?

b) Montrez qu'une application linéaire ℓ de E dans lui-même est une projection (vectorielle) si et seulement si $\ell^2 = \ell$; montrez qu'une application affine f de $\mathcal{E}$ dans lui-même est une projection si et seulement si $f^2 = f$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps k de caractéristique différente de 2 et soit E son espace directeur. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit σ la symétrie par rapport à G et parallèlement à F et soit s une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est σ.

a) Déterminez $\mathrm{Ker}\,(\sigma - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(\sigma - \mathrm{Id})$ et vérifiez que

$$E = \mathrm{Ker}\,(\sigma - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(\sigma - \mathrm{Id}).$$

Qu'en déduit-on à propos de l'application s ?

b) Montrez qu'une application linéaire ℓ de E dans lui-même est une symétrie (vectorielle) si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}$; montrez qu'une application affine f de $\mathcal{E}$ dans lui-même est une projection si et seulement si $f^2 = \mathrm{Id}$.

Exercice 8. Soit ℓ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminez Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ et Im $(\ell - \mathrm{Id})$; montrez que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de ces deux sous-espaces.

b) Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même donnée par la formule

$$(x, y, z) \mapsto (y + 1, x + 2, -z + 3).$$

Déterminez l'unique couple (u, g), où $u \in$ Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ et où g est une application affine ayant un point fixe, tel que $f = t_u \circ g$; donnez un point et l'espace directeur de l'ensemble des points fixes de g.

Exercice 9. Soit ℓ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie (x, y) sur $(x + y, y)$.

a) Déterminez Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ et Im $(\ell - \mathrm{Id})$; l'espace $\mathbb{R}^2$ est-il somme directe de ces deux sous-espaces ?

b) Donnez un exemple d'une application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'application linéaire associée est ℓ et telle que pour tout $u \in$ Ker $(\ell - \mathrm{Id})$ l'application $t_u \circ f$ soit sans point fixe.