

Université Paris 6  
 Année universitaire 2014-2015  
 Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)  
 Feuille d'exercices numéro 3.

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur un corps  $k$  d'espace directeur  $E$ . Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ , et soit  $\mathcal{G}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $G$ ; soit  $u$  un vecteur de  $F$ , et soit  $\mathcal{G}'$  le sous-espace  $t_u(\mathcal{G})$ .

- i) Quel est l'espace directeur de  $\mathcal{G}'$ ? Que peut-on dire de  $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ ?
- ii) Soit  $s$  (resp.  $s'$ ) la symétrie par rapport à  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{G}'$ ) et parallèlement à  $F$ . Décrire aussi précisément que possible la composée  $s' \circ s$ .
- iii) Soit  $v$  un vecteur de  $E$ . Démontrer sans calcul que  $t_v \circ s$  a une unique écriture de la forme  $t_w \circ \xi$ , où  $w \in G$  et où  $\xi$  est une symétrie par rapport à un sous-espace  $\mathcal{G}''$  de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $G$ , et parallèlement à  $F$ . Explicitiez  $w$  et  $\mathcal{G}''$  en fonction des données.
- iv) Reprendre les questions ii) et iii) en remplaçant partout «symétrie par rapport à» par «projection sur».

**Exercice 2.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de dimension 4, et soit  $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_4)$  un repère cartésien de  $\mathcal{E}$ . Soient  $A_0, A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  les points de  $\mathcal{E}$  de coordonnées respectives

$$(1, 2, -1, 3); (0, -2, 1, 4); (3, 1, -2, 1); (2, -4, 1, 3) \text{ et } (5, 1, 2, -3)$$

dans  $\mathcal{R}$ . Soit  $G'$  le barycentre de  $((A_0, 1), (A_1, 3), (A_2, 7))$  et soit  $G''$  le barycentre de  $((A_3, 6), (A_4, -3))$ ; déterminez les coordonnées de  $G'$  et  $G''$  dans  $\mathcal{R}$ . Soit  $G$  le barycentre de  $((A_0, 1), (A_1, 3), (A_2, 7), (A_3, 6), (A_4, -3))$ ; déterminez les coordonnées de  $G$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine sur un corps  $k$  de caractéristique différente de 2 et 3, et soit  $(ABC)$  un repère affine de  $\mathcal{P}$ ; on travaille en coordonnées barycentriques dans  $(ABC)$ . Soit  $G$  l'isobarycentre de  $(ABC)$  et soit  $H$  le point de coordonnées  $(1, 1, -1)$ .

- 1) Justifiez que  $G \neq H$  et donnez une équation de la droite  $(GH)$ .
- 2) Soit  $P$  un point de  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(a, b, c)$ . Donnez en fonction de  $a, b$  et  $c$  une équation de la droite passant par  $P$  et parallèle à  $(GH)$ .

**Exercice 4. Théorème de Menelaüs.** Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine sur un corps  $k$ , et soit  $(ABC)$  un repère affine de  $\mathcal{P}$ . Soit  $A'$  (resp.  $B'$ , resp.  $C'$ ) un point de  $(BC)$  différent de  $B$  et  $C$  (resp. un point de  $(AC)$  différent de  $A$  et  $C$ , resp. un point de  $(AB)$  différent de  $A$  et  $B$ ). Montrez que  $A', B'$  et  $C'$  sont alignés si et seulement si

$$\frac{\vec{A'B}}{\vec{A'C}} \cdot \frac{\vec{B'C}}{\vec{B'A}} \cdot \frac{\vec{C'A}}{\vec{C'B}} = 1.$$

**Exercice 5.** Soit  $k$  un corps et soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension 3 sur  $k$ ; on fixe un repère affine de  $\mathcal{E}$  et l'on travaille en coordonnées barycentriques dans celui-ci.

1) Soit  $\mathcal{P}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$ . Montrez que  $\mathcal{P}$  est un plan si et seulement si il peut être défini par une équation de la forme  $ax + by + cz + dt = 0$  avec  $a, b, c$  et  $d$  non tous nuls; à quelle condition deux telles équations définissent-elles le même plan?

2) Soient  $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}''$  et  $\mathcal{P}'''$  quatre plans de  $\mathcal{E}$ , définis par les équations

$$ax + by + cz + dt = 0, a'x + b'y + c'z + d't = 0, \text{ etc.}$$

Interpréter géométriquement (en termes de la configuration des plans étudiés) les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel. On dit qu'un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$  est *convexe* si pour toute famille finie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  de points de  $\mathcal{C}$  et pour toute famille  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  de scalaires positifs ou nuls et non tous nuls, le barycentre de  $((A_i, \lambda_i))$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

1) Montrez que l'intersection d'une famille de parties convexes de  $\mathcal{E}$  est convexe; en déduire que si  $\mathcal{C}$  est une partie *quelconque* de  $\mathcal{E}$  il existe une plus petite partie convexe contenant  $\mathcal{C}$ , que l'on appelle *l'enveloppe convexe* de  $\mathcal{C}$ .

2) Si  $(A_1, \dots, A_n)$  est une famille finie de points de  $\mathcal{P}$ , montrez que l'enveloppe convexe de  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est égale à l'ensemble des points de la forme  $\text{Bar}((A_i, \lambda_i))$  où  $(\lambda_i)$  est une famille de scalaires positifs non tous nuls.

Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $\mathcal{P}$ , on appelle *segment* reliant  $A$  à  $B$ , et l'on note  $[AB]$ , l'enveloppe convexe de  $\{A, B\}$ ; d'après ce qui précède, on a  $[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B\}_{\lambda \in [0,1]}$ .

3) Montrez qu'une partie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{P}$  est convexe si et seulement si pour tout couple  $(A, B)$  de point de  $\mathcal{C}$  le segment  $[AB]$  est contenu dans  $\mathcal{C}$ .

4) Si  $\mathcal{C}$  est une partie convexe de  $\mathcal{P}$ , on dit qu'un point  $x$  de  $\mathcal{C}$  est *extrémal* s'il possède la propriété suivante : *pour tout couple de points  $(A, B)$  de  $\mathcal{P}$  tels que  $x \in [AB]$  et  $[AB] \subset \mathcal{C}$  l'on a  $A = x$  ou  $B = x$ .*

Déterminez les points extrémaux des parties suivantes de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\{(x, y), |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \quad \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Montrez que si  $(A_0, \dots, A_n)$  est une famille de points affinement indépendants de  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe des  $A_i$  est exactement  $\{A_i\}_{0 \leq i \leq n}$ . Cela reste-t-il vrai en général sans hypothèse d'indépendance affine?

**Exercice 7. Théorème de Carathéodory.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de dimension finie  $n$  et soit  $(A_1, \dots, A_p)$  une famille finie de points de  $\mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{C}$

l'enveloppe convexe des  $A_i$  et soit  $\Gamma$  l'ensemble des points de  $\mathcal{E}$  pouvant s'écrire comme le barycentre d'une famille d'au plus  $n + 1$  points parmi les  $A_i$ , affectés de coefficients positifs. On dispose d'une inclusion naturelle  $\Gamma \subset \mathcal{C}$ ; le but de ce qui suit est de prouver l'inclusion réciproque. On procède par récurrence sur  $p$ .

1) Que dire si  $p \leq n + 1$  ?

2) On suppose que  $p > n + 1$  et que la propriété a été démontrée au rang  $p$ . Soit  $x \in \mathcal{C}$ ; on écrit  $x = \sum \lambda_i A_i$  avec  $\lambda_i \geq 0$  quel que soit  $i$  et  $\sum \lambda_i = 1$ .

Prouvez qu'il existe  $j$  tel que  $A_j$  soit un barycentre des  $A_i$  pour  $i \neq j$ ; on renumérote éventuellement les  $A_i$  de sorte que  $j = 1$  et l'on écrit  $A_1 = \sum_{i \geq 2} t_i A_i$  avec  $\sum t_i = 1$ . On pose  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_i = -t_i$  pour tout  $i > 2$ .

3) Montrez qu'il est licite d'écrire pour tout  $\ell$  tel que  $\mu_\ell \neq 0$  l'égalité

$$a_\ell = \sum_{i \neq \ell} -\frac{\mu_i}{\mu_\ell} a_i.$$

4) Soit  $\ell$  tel que  $\mu_\ell \neq 0$ . Donnez une expression de  $x$  comme barycentre des  $A_i$  pour  $i \neq \ell$ ; montrez qu'il est possible de choisir  $\ell$  de sorte que les coefficients apparaissant dans cette écriture soient tous positifs, et conclure.