
TD n° 1 – Divisibilité, nombres premiers, valuations

Exercice 1

Soient $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Montrer les implications suivantes :

1. Si $c|a$ et $c|b$, alors $c|(a + b)$.
2. Si $c|a$ et $c|b$, alors $c|(a - b)$.
3. Si $a|c$, alors $a|bc$.
4. Si $a|c$ et $b|c$, alors $ab|c^2$.

Exercice 2

Soient $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en les démontrant ou en donnant un contre-exemple suivant le cas.

1. Si $a|b^2$, alors $a|b$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a^2|bc$.
3. Si $a|bc$, alors $a|b$ ou $a|c$.
4. 3 divise 4 car il existe $k = 4/3$ tel que $4 = 3k$.
5. 3 divise 0 car il existe $k = 0$ tel que $0 = 3k$.
6. $a|b$ si et seulement si $a^2|b^2$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbf{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^2 est pair.

Remarque : cela revient à montrer que a est impair si et seulement si a^2 est impair. Autrement dit, un nombre et son carré sont toujours de la même parité.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbf{Z}$ un entier impair. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 5

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $n|n + 8$.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n|n + 9$.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 6

Résoudre dans \mathbf{Z}^2 les équations suivantes :

1. $x^2 + y^2 = 2$.
2. $x^2 + y^2 = 3$.
3. $x^2 - y^2 = 2$.

Exercice 7

Faire la liste des nombres premiers compris entre 1 et 100.

Exercice 8

Décomposer 2000, 2001, 2002, 2003, ..., 2015 en produit de nombres premiers.

Exercice 9

Faire la liste des diviseurs positifs de 12 et de 2^8 .

Exercice 10

1. Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 56789 par 23?
2. Montrer que 14443 est divisible par 101.

Exercice 11

Soit n un entier ≥ 2 et soit $N = n!$.

1. Montrer qu'aucun des entiers $N + 2, N + 3, \dots, N + n$ n'est premier.
2. Donner un exemple de liste de 10 nombres consécutifs non premiers.

Exercice 12

L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si l'on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Quel est l'effectif de l'école ?

Exercice 13

Quel est le plus grand entier naturel dont le cube divise $2^4 \cdot 3^6 \cdot 7$?

Exercice 14

Soit $a \in \mathbf{Z}$.

1. Montrer que $a - 1$ divise $a^n - 1$.
2. Montrer que l'entier $\sum_{i=0}^{26} 2^i$ n'est pas premier.

Exercice 15

1. Soient p un nombre premier et $k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire, pour tout entier a , que p divise $a^p - a$ (procéder par récurrence sur a). *C'est le petit théorème de Fermat.*
3. En utilisant le résultat précédent, déterminer tous les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$.

Exercice 16

Soient n un entier et p un nombre premier.

1. Rappeler la définition de $v_p(n)$ (valuation p -adique de n).
2. Calculer $v_2(60), v_3(60), v_5(60), v_7(60), v_2(1024), v_3(30720)$.

Exercice 17

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Plus généralement, si $a \in \mathbf{Z}$ (resp. $a \in \mathbf{Q}$), donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$.