François Lê
francois.le@imj-prg.fr

TD n° 2 – Pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 1
Soient n, m des entiers. Rappeler la définition de $\text{pgcd}(n, m)$ et de $\text{ppcm}(n, m)$. Calculer le pgcd et le ppcm :

1. de 195 et 143 ;
2. de 2233 et 1543 ;
3. de 2014 et 2015.

Exercice 2
Soient a, b, c des entiers non nuls. Montrer que $\text{pgcd}[\text{pgcd}(a, b), c] = \text{pgcd}[a, \text{pgcd}(b, c)]$.

Exercice 3
Soient a, b, a', b', d des entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = d$ si et seulement si $\text{pgcd}(a', b') = 1$.

Exercice 4
Soient a, b, c, d des entiers. Montrer les implications suivantes :

1. Si $\text{pgcd}(a, b) = d$, alors $\text{pgcd}(ac, bc) = dc$.
2. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\text{pgcd}(a, c) = 1$, alors $\text{pgcd}(a, bc) = 1$.
3. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors $\forall m, n \geqslant 1,\ \text{pgcd}(a^m, b^n) = 1$.
4. Si $\text{pgcd}(a, b) = d$, alors $\forall m \geqslant 2,\ \text{pgcd}(a^m, b^m) = d^m$.

Exercice 5
Soient a, b deux entiers et soit $m = \text{ppcm}(a, b)$. Montrer qu'il existe un diviseur a' de a et un diviseur b' de b tels que $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $m = a'b'$.

Exercice 6
Pour quels entiers $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ le $\text{pgcd}(a, 360)$ divise-t-il 12 ? Même question en remplaçant « divise-t-il »par « est-il égal à ».

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ les équations suivantes :

(a) $4x + 9y = 1$.

(b) $4x + 9y = 7$.

(c) $5x - 18y = 4$.

(d) $6x + 15y = 28$.

(e) $56x + 35y = 7$.

(f) $56x + 35y = 10$.

François Lê
francois.le@imj-prg.fr

Exercice 8
C'est les soldes. J'ai dépensé en tout 188 euros, en ayant acheté des CD à 25 euros et des chemises à 21 euros. Combien de CD ai-je acheté ?

Exercice 9
Pour quels entiers $c \in \mathbf{Z}$ l'équation $60x + 18y = c$ admet-elle une solution dans $\mathbf{Z}^2$?

Exercice 10
Déterminer les entiers n tels que $8|15(n+1)$.

Exercice 11
Soient deux entiers a, b. Montrer que $3|\operatorname{pgcd}(a,b) \iff 3|a^2+b^2$.