Feuille de TD n°2 : espaces affines

Exercice 1. Soient a un réel et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les fonctions f de classe C^1 vérifiant l'équation différentielle

$$f' + af = g,$$

admet une structure d'espace affine dirigée par l'ensemble des solutions de l'équation $f' + af = 0$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fixée, et soit

$$\mathcal{E}_c = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = c_n\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}_c$ est un espace affine et déterminer sa direction E.
2. Déterminer $\dim(E)$ et une base $\mathcal{B}$ de E formée de suites géométriques.
3. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $a^2 - a - 2 \neq 0$. On prend pour c la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ tel que la suite μc appartienne à $\mathcal{E}_c$ (i.e. tel qu'on ait $\mu a^{n+2} - \mu a^{n+1} - 2\mu a^n = a^n$ pour tout n).
4. On prend $a = 1$, i.e. c est la suite telle que $c_n = 1$ pour tout n. Soit alors μ comme dans la question précédente, et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de $\mathcal{E}_c$ tel que $x_0 = 3/2$ et $x_1 = 1/2$. Exprimer $w = x - \mu c$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, puis donner une formule pour la valeur de x_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, où O désigne le point $(0, 0)$. Soient I le point de coordonnées $(1, 1)$ et $r = r(I, \pi/4)$ la rotation de centre I et d'angle $\pi/4$.

1. Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$, exprimer ses coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R} = (I, e_1, e_2)$ en fonction de x et y.
2. Exprimer les coordonnées (X', Y') de $M' = r(M)$ en fonction de X et Y, puis de x et y.
3. En déduire les coordonnées (x', y') de M' dans $\mathcal{R}_0$.
4. Justifier que r est une application affine et préciser sa partie linéaire.

Exercice 4.

1. Soit $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. On note $A_0 = O$, $A_1 = O + \vec{e_1}, \dots, A_n = O + \vec{e_n}$. Montrer que pour tous points B_0, $B_1, \dots, B_n$, il existe une unique application affine qui envoie A_i sur B_i pour chaque indice $i = 0, \dots, n$.
2. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une application affine de $\mathbb{R}^2$ qui envoie le triangle ABC sur un triangle équilatéral.
3. Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan affine $\mathbb{R}^2$. A quelle condition existe-t-il une application affine de $\mathbb{R}^2$ qui envoie le quadrilatère $ABCD$ sur un carré.

Exercice 5 (La droite d'Euler)**.** Dans un triangle ABC quelconque, l'orthocentre H, le centre du cercle circonscrit Ω et le centre de gravité G sont alignés. Surprenant, non ?

Pour le démontrer, considérer le point M définit par la relation

$$\overrightarrow{\Omega M} = 3\overrightarrow{\Omega G},$$

montrer que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{\Omega I}$ où I est le milieu du segment $[B, C]$, en déduire que M appartient à la hauteur issue de A et enfin conclure !

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}$ une partie d'un espace affine E vérifiant la propriété suivante :

Pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, la droite passant par A et B est incluse dans $\mathcal{F}$.

Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine.

Exercice 7.

1. A quelle condition, deux équations
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$$
décrivent-elles deux hyperplans affines parallèles ?
2. A quelle condition deux systèmes d'équations
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases}$$
décrivent-ils des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$? la même droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$?
3. A quelle condition deux systèmes d'équations
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$
décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$? la même droite affine de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner l'équation de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0)$ et de direction $D = \mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u} = ae_1 + be_2 \neq 0$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation du plan affine $\mathcal{P}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de direction $P = \mathbb{R}\vec{u} \oplus \mathbb{R}\vec{v}$, où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner les équations de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de direction $D = \mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur ci-dessus.

Exercice 9 (Projections et symétries)**.** Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, de direction respective F. Soit G un supplémentaire de F.

1. L'application $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui a un point A associe l'unique point A' de $\mathcal{F}$ vérifiant $\overrightarrow{AA'} \in G$ s'appelle *projection sur $\mathcal{F}$ dans la direction de G*. Pourquoi est-elle bien définie ? Autrement-dit pourquoi A' est-il uniquement déterminé ? Montrer que π est une application affine. Quelle est sa partie linéaire ? Vérifier que $\pi \circ \pi = \pi$.
2. L'application $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, qui a un point A associe le point $s(A) = A + 2\,\overrightarrow{A\pi(A)}$ est appelée *symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ dans la direction de G*. Jusitifer que s est affine, donner sa partie linéaire et vérifier que s est une involution (c'est à dire $s \circ s = \mathrm{id}$).

Exercice 10 (Un exemple de projection/symétrie)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0, 0)$. Soit $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite affine d'équation $3y - x = 1$ (resp. $x + 2y = 4$) et soit p (resp. s) la projection sur $\mathcal{D}_1$ (resp. la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_1$) parallèlement à $\mathcal{D}_2$.

1. Déterminer la direction D_1 de $\mathcal{D}_1$ (resp. D_2 de $\mathcal{D}_2$).
2. Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{I\}$ pour un point I que l'on déterminera.
3. Déterminer un vecteur v_1 (resp. v_2) engendrant la droite vectorielle D_1 (resp. D_2) puis, notant $\mathcal{C}$ la base (v_1, v_2), écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C})$.
4. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(I, \mathcal{C})$ de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Pour tout point $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, exprimer les coordonnées (X, Y) de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de x et y.
5. Soient (X', Y') les coordonnées de $M' = p(M)$, et (X'', Y'') celles de $M'' = s(M)$, dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer (X', Y') et (X'', Y'') en fonction de X et Y.
6. Dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, déterminer les coordonnées (x', y') de M' et (x'', y'') de M''.