2M271 – Examen du 11 mai 2016

Première session, durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 4 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et la matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 16 & 8 \\ 16 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Dire sans calcul, en citant un résultat du cours, pourquoi la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer une base orthonormée dans laquelle A se diagonalise.
3. Déterminer la signature de la forme quadratique associée à la matrice A.

Exercice 2. On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_4 + x_2x_3.$$

1. Écrire la matrice A associée à q, déterminer son rang et son noyau.
2. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
3. Déterminer la signature de q.
4. Déterminer une base orthogonale pour q.
5. Existe-t-il un vecteur $v \notin \ker q$ tel que $q(v) = 0$? Si oui, en exhiber un ; sinon, justifier pourquoi.

Exercice 3. On considère l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de l'orientation donnée par la base canonique. Soit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Déterminer sa nature et ses caractéristiques géométriques.
3. Chercher les points $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. Calculer le vecteur $u = \overrightarrow{Mf(M)}$.
4. Soit t_{-u} la translation par le vecteur $-u$. Trouver les points fixes de l'application $g := t_{-u} \circ f$ et déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 4. Soient $n \geqslant 1$ un entier positif et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrés de taille n à coefficients réels. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^tAB). \end{array}$$

1. Montrer que l'application ϕ est bilinéaire.

On considère la base canonique $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ et le produit scalaire standard $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. Étant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ montrer que pour tout $i, j = 1, \ldots, n$ on a

$$a_{ij} = (e_i \mid Ae_j).$$

3. Déduire de la question (2) que pour toute matrice A on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid Ae_i).$$

4. Montrer que pour tout vecteur $v, w \in \mathbb{R}^n$ et toutes matrices A, B on a
$$({}^tBAv \mid w) = (v \mid {}^tABw).$$
5. Déduire des questions (3) et (4) que la forme bilinéaire ϕ est symétrique.
6. Montrer que pour tout vecteur $v \notin \ker A$ on a
$$(v \mid {}^tAAv) > 0.$$
Déduire que l'application bilinéaire symétrique ϕ est définie positive.
7. Soit A une matrice symétrique et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres. Montrer l'égalité
$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$