2M271 – Examen du 11 mai 2016

Première session, durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 4 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et la matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 16 & 8 \\ 16 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Dire sans calcul, en citant un résultat du cours, pourquoi la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer une base orthonormée dans laquelle A se diagonalise.
3. Déterminer la signature de la forme quadratique associée à la matrice A.

Solution. (1) La matrice est symétrique, donc diagonalisable d'après le théorème spectrale.

(2) Pour simplifier les calculs il est commode de calculer le polynôme caractéristique de la matrice $9A$. On utilisera ensuite l'égalité

$$9^3 P_A(X) = P_{9A}(9X)$$

pour déduire les valeurs propres de A. On a

$$\begin{aligned}
P_{9A}(X) &= \begin{vmatrix} 7-X & 16 & 8 \\ 16 & 7-X & 8 \\ 8 & 8 & -5-X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2-L_1\to L_2}{=} \begin{vmatrix} 7-X & 16 & 8 \\ X+9 & -X-9 & 0 \\ 8 & 8 & -5-X \end{vmatrix} \\
&= (X+9)\begin{vmatrix} 7-X & 16 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 8 & -5-X \end{vmatrix} \\
&\overset{8L_3+(X+5)L_1\to L_3}{=} \frac{X+9}{8}\begin{vmatrix} 7-X & 16 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ -X^2+2X+99 & 16(X+9) & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Avant de continuer avec le calcul, on remarque l'égalité $X^2-2X-99 = (X-11)(X+9)$, d'où on obtient, en développant par rapport à la première ligne et troisième colonne,

$$P_{9A}(X) = (X+9)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -X+11 & 16 \end{vmatrix} = -(X+9)^2(X-27).$$

Les valeurs propres de $9A$ sont donc -9 avec multiplicité 2 et 27 avec multiplicité 1. Les valeurs propres de A sont donc -1 avec multiplicité 2 et 3 avec multiplicité 1.

On calcule les espaces propres. On commence par calculer l'espace propre V_{-1} de la valeur propre -1. À nouveau, pour simplifier les calculer, il est commode de remarquer

$$V_{-1} = \ker(A + \mathrm{id}) = \ker(9A + 9\mathrm{id}).$$

On alors

$$9A + 9\mathrm{id} \quad = \quad \begin{pmatrix} 16 & 16 & 8 \\ 16 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3/4 \to L_3]{\substack{L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_1 - 2L_3 \to L_1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'espace propre V_{-1} est le plan $2x + 2y + z = 0$, dont une base est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, une base orthnormée est donc donnée par

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On pourrait procéder de manière analogue et calculer l'espace propre V_3. En réfléchissant, on n'en a pas besoin : l'espace propre V_{-1} donné par l'équation $2x + 2y + z = 0$, donc c'est l'orthogonal de droite engendrée par le vecteur

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème spectrale on sait que les espaces propres de A sont à deux à deux orthogonaux, donc V_3 est l'orthogonal de V_{-1}, c'est-à-dire $V_3 = \mathrm{Vect}(v_3)$.

Finalement, une base orthonormée de vecteur propres pour A est

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) La signature de la forme quadratique associée à A est donnée par le signe des vecteurs propres de A. La signature de q est donc $(1, 2)$. □

Exercice 2. On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_4 + x_2x_3.$$

1. Écrire la matrice A associée à q, déterminer son rang et son noyau.
2. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
3. Déterminer la signature de q.
4. Déterminer une base orthogonale pour q.
5. Existe-t-il un vecteur $v \notin \ker q$ tel que $q(v) = 0$? Si oui, en exhiber un ; sinon, justifier pourquoi.

Solution. (1) La matrice de q est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son rang est 3 car on a au moins 3 pivots et la relation $2C_1 + 4C_3 - C_4 = 0$. En particulier le noyau est

$$\ker A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) En appliquant la méthode de Gauss on a

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 - x_2 + 2x_4)^2 + x_2x_3 + 4x_2x_4 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_4)^2 + x_2(x_3 + 4x_4). \end{aligned}$$

Il suffit de poser

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 2x_4 \\ y_2 + y_3 &= x_2 \\ y_2 - y_3 &= x_3 + 4x_4, \end{aligned}$$

pour obtenir $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(3) La signature de q est $(2, 1)$.

(4) Puisque la forme quadratique n'est pas de rang maximal on doit compléter la famille de formes linéaires indépendantes en une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^4)^*$. Par exemple, on peut prendre

$$y_4 = x_4.$$

Un calcul rapide montre que $y_1, \ldots, y_4$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes, donc une base du dual. Pour trouver la base de $\mathbb{R}^4$ associée à $y_1, \ldots, y_4$ il suffit d'inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul montre :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthogonale pour q est donc :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(On remarquera que $v_4 = y_4^*$ est un générateur du noyau : c'est forcément comme ça car y_4 n'apparait pas dans l'écriture de q.)

(5) La forme quadratique q est de signature $(2, 1)$ donc le cône isotrope ne coïncide pas avec le noyau. Un vecteur isotrope qui n'est pas dans le noyau est e_3 (c'est évident à partir de l'écriture A). □

Exercice 3. On considère l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de l'orientation donnée par la base canonique. Soit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Déterminer sa nature et ses caractéristiques géométriques.
3. Chercher les points $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. Calculer le vecteur $u = \overrightarrow{Mf(M)}$.
4. Soit t_{-u} la translation par le vecteur $-u$. Trouver les points fixes de l'application $g := t_{-u} \circ f$ et déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Solution. (1) La partie linéaire de f est donnée par la matrice :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & -3 \end{pmatrix}.$$

(2) On vérifie aussitôt ${}^tAA = \mathrm{id}$, donc A est une isométrie vectorielle. De plus,

$$\mathrm{signe}(-3) = \mathrm{signe}\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix},$$

donc $\det A = 1$ et A est une isométrie directe. Sans besoin de calculer la trace de A, on sait qu'il s'agit d'un demi-tour, c'est-à-dire une rotation d'angle π, car A est symétrique (donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$). Il reste à calculer l'axe de rotation :

$$\ker(A - \mathrm{id}) = \ker(4A - 4\mathrm{id}).$$

On a

$$4A - 4\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -7 & \sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & -2 & \sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & -7 \end{pmatrix}.$$

On remarque $C_1 + \sqrt{6}C_2 + C_3 = 0$ donc le noyau de $A - \mathrm{id}$ est l'espace vectoriel engendré par

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(On sait *a priori* qu'il est de dimension 1).

(3) Pour simplifier les calculs on pose $B = (0, 0, 8)$. Il s'agit de résoudre l'équation

$$AM - B - M = \alpha v,$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}^3$. On détermine tout d'abord α. L'équation précédente est équivalente á a suivante

$$4(A - \mathrm{id})M = 4\alpha v + 4B.$$

Il s'agit donc de résoudre le systéme

$$\begin{cases} -7x + \sqrt{6}y + z = 4\alpha \\ \sqrt{6}x - 2y + \sqrt{6}z = 4\sqrt{6}\alpha \\ x + \sqrt{6}y - 7z = 4\alpha + 8 \end{cases}$$

En faisant l'opération élémentaire $L_1 + \sqrt{6}L_2 + L_3$ on obtient $32\alpha + 8 = 0$, donc $\alpha = -1$. En particulier,

$$u = -v = -\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(A - \mathrm{id})$ forment la droite D donnée par le système

$$\begin{cases} -7x + \sqrt{6}y + z = -4 \\ \sqrt{6}x - 2y + \sqrt{6}z = -4\sqrt{6} \\ x + \sqrt{6}y - 7z = 4 \end{cases}$$

(le système est de rang 2 donc il décrit bien une droite). En prenant une solution particulière du système précédent on a

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Les points fixes de g sont les points tels $g(M) = M$, c'est-à-dire $f(M) - u = M$, ou encore $\overrightarrow{Mf(M)} = u$. Ils coïncident donc avec la droite D. L'isométrie f est un vissage d'angle π, axe D et vecteur de translation u. □

Exercice 4. Soient $n \geqslant 1$ un entier positif et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrés de taille n à coefficients réels. On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB). \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application ϕ est bilinéaire.

On considère la base canonique $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ et le produit scalaire standard $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. Étant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ montrer que pour tout $i, j = 1, \dots, n$ on a
$$a_{ij} = (e_i \mid Ae_j).$$
3. Déduire de la question (2) que pour toute matrice A on a
$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid Ae_i).$$
4. Montrer que pour tout vecteur $v, w \in \mathbb{R}^n$ et toutes matrices A, B on a
$$({}^tBAv \mid w) = (v \mid {}^tABw).$$
5. Déduire des questions (3) et (4) que la forme bilinéaire ϕ est symétrique.

6. Montrer que pour tout vecteur $v \notin \ker A$ on a
$$(v \mid {}^t AAv) > 0.$$
Déduire que l'application bilinéaire symétrique ϕ est définie positive.
7. Soit A une matrice symétrique et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres. Montrer l'égalité
$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Solution. (1) Laissé au lecteur.

(2) Par définition on a
$$Ae_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k.$$
En particulier,
$$(e_i \mid Ae_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (e_i \mid e_k) = a_{ij},$$
car la base canonique est orthonormée.

(3) La trace est la somme des éléments sur la diagonale de A. Donc par (2),
$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid Ae_i).$$

(4) Pour toute matrice C et tout vecteur $v, w \in \mathbb{R}^n$ on a $(Cv \mid w) = (v \mid {}^t Cw)$. Il suffit d'appliquer cela avec $C = {}^t AB$.

(5) On a
$$\mathrm{Tr}({}^t AB) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid {}^t ABe_i) \overset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} ({}^t BAe_i \mid e_i) = \mathrm{Tr}({}^t BA).$$

□

(6) Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ on a
$$(v \mid {}^t AAv) = (Av \mid Av) = \|Av\|^2.$$
En particulier si v n'appartient pas au noyau de A, le vecteur Av est non nul et $\|Av\| > 0$.

(7) Puisque A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$ avec $P \in O(n)$ et
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Puisque $P^{-1} = {}^t P$ on a
$$\phi(A, A) = \mathrm{Tr}({}^t AA) = \mathrm{Tr}({}^t P^{-1} \cdot {}^t D \cdot {}^t PPDP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P {}^t DDP^{-1}) = \mathrm{Tr}({}^t DD),$$
car la trace est invariante par conjugaison. D'autre part,
$${}^t DD = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix},$$

donc
$$\phi(A, A) = \mathrm{Tr}({}^t DD) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2,$$
ce qui termine l'exercice.