2M271 – Examen du 16 juin 2016

Deuxième session, durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 4 exercices indépendants et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soient e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base orthonormée

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. On considère l'unique application linéaire $\phi_{\lambda\mu} \colon E \to E$ telle que

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda\mu}(v_1) &= 0,\\ \phi_{\lambda\mu}(v_2) &= \lambda v_2 + \mu v_3,\\ \phi_{\lambda\mu}(v_3) &= -\mu v_2 + \lambda v_3.\end{aligned}$$

1. Écrire la matrice $A_{\lambda\mu}$ de $\phi_{\lambda\mu}$ et la matrice $A^*_{\lambda\mu}$ de l'adjointe de $\phi^*_{\lambda\mu}$ dans la base v_1, v_2, v_3.
2. Justifier pourquoi, en citant un résultat du cours, la matrice $A_{\lambda\mu}$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$.

Soit P la matrice de passage de la base e_1, e_2, e_3 à la base v_1, v_2, v_3. Avec ces notations, la matrice de $\phi_{\lambda\mu}$ dans la base canonique est

$$B_{\lambda\mu} = PA_{\lambda\mu}P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\lambda & -4\lambda - 3\mu & -2\lambda + 6\mu\\ -4\lambda + 3\mu & 5\lambda & -2\lambda - 6\mu\\ -2\lambda - 6\mu & -2\lambda + 6\mu & 8\lambda\end{pmatrix}$$

(On acceptera ce résultat sans faire des calculs.)

3. Calculer le polynôme caractéristique de $B_{\lambda\mu}$.
   (Indication : on utilisera l'invariance du polynôme caractéristique par conjugaison).
4. Déterminer les λ, μ tels que $B_{\lambda\mu}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$.
5. Pour les λ, μ déterminés à la question précédente, citer un résultat du cours assurant que $B_{\lambda\mu}$ est en fait diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et expliciter une telle base.
6. Diagonaliser B_{01} dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 2. On considère l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de l'orientation donnée par la base canonique. Soit

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -\sqrt{6} & -1\\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6}\\ -1 & -\sqrt{6} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.

2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Déterminer sa nature et ses caractéristiques géométriques.
3. Chercher les points $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. Calculer le vecteur $u = \overrightarrow{Mf(M)}$.
4. Soit t_{-u} la translation par le vecteur $-u$. Trouver les points fixes de l'application $g := t_{-u} \circ f$ et déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0, 1]$. On munit E du produit scalaire défini, pour tout fonction $f, g \in E$, par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ dt.$$

On considère les trois fonctions suivantes :

$$f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = t, \quad f_3(t) = \exp(t).$$

En utilisant le procédé de Gram-Schmidt déterminer une base orthonormée g_1, g_2, g_3 de l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3. (Indication : calculer $(f_2 \mid f_3)$ par parties).

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard. Soit A une matrice symétrique de taille n.

1. Montrer que pour tout vecteur $v \in \ker A$ et $w \in \operatorname{im} A$ on a $(v \mid w) = 0$.
2. En utilisant le théorème du rang et la question (1) montrer que $\ker A$ et $\operatorname{im} A$ sont orthogonaux et on a
$$(\ker A)^\perp = \operatorname{im} A.$$
3. Soit B la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{im} A$. Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ on a
$$ABv = Av.$$
(On écrira $v = x + y$ avec $x \in \ker A$ et $y \in \operatorname{im} A$.) Déduire l'égalité $AB = A$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (M, N) & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^tMN). \end{array}$$

On admet les deux faits suivants (qui peuvent être utilisés sans preuve) :

- $\star$ L'application ϕ est une forme bilinéaire définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\star\star$ Pour toute matrice symétrique M on a
$$\phi(M, M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$
où les λ_i sont les valeurs propres de M.

4. Dire pourquoi B se diagonalise sur une base orthonormée. En déduire que B est symétrique et calculer $\phi(B, B)$.
5. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ϕ, montrer l'inégalité
$$(\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^2) \cdot \operatorname{rg} A.$$
Quand a-t-on égalité ?