2M271 – Examen du 16 juin 2016

Deuxième session, durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 4 exercices indépendants et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soient e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base orthonormée

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. On considère l'unique application linéaire $\phi_{\lambda\mu} \colon E \to E$ telle que

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda\mu}(v_1) &= 0,\\ \phi_{\lambda\mu}(v_2) &= \lambda v_2 + \mu v_3,\\ \phi_{\lambda\mu}(v_3) &= -\mu v_2 + \lambda v_3.\end{aligned}$$

1. Écrire la matrice $A_{\lambda\mu}$ de $\phi_{\lambda\mu}$ et la matrice $A^*_{\lambda\mu}$ de l'adjointe de $\phi^*_{\lambda\mu}$ dans la base v_1, v_2, v_3.
2. Justifier pourquoi, en citant un résultat du cours, la matrice $A_{\lambda\mu}$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$.

Soit P la matrice de passage de la base e_1, e_2, e_3 à la base v_1, v_2, v_3. Avec ces notations, la matrice de $\phi_{\lambda\mu}$ dans la base canonique est

$$B_{\lambda\mu} = PA_{\lambda\mu}P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\lambda & -4\lambda - 3\mu & -2\lambda + 6\mu\\ -4\lambda + 3\mu & 5\lambda & -2\lambda - 6\mu\\ -2\lambda - 6\mu & -2\lambda + 6\mu & 8\lambda\end{pmatrix}$$

(On acceptera ce résultat sans faire des calculs.)

3. Calculer le polynôme caractéristique de $B_{\lambda\mu}$.
   (Indication : on utilisera l'invariance du polynôme caractéristique par conjugaison).
4. Déterminer les λ, μ tels que $B_{\lambda\mu}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$.
5. Pour les λ, μ déterminés à la question précédente, citer un résultat du cours assurant que $B_{\lambda\mu}$ est en fait diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et expliciter une telle base.
6. Diagonaliser B_{01} dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$.

Solution. (1) La matrice de l'application linéaire ϕ dans la base v_1, v_2, v_3 est

$$A_{\lambda\mu}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \mu\\ 0 & -\mu & \lambda\end{pmatrix}.$$

Puisque les coefficients de $A_{\lambda\mu}$ sont réels l'adjointe $A^*_{\lambda\mu}$ est la transposée ${}^tA_{\lambda\mu}$ de $A_{\lambda\mu}$.

(2) La matrice $A_{\lambda\mu}$ est normale, *i.e.* elle commute avec son adjointe. En effet,

$$A_{\lambda\mu}A_{\lambda\mu}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_{\lambda\mu}^*A_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème spectrale (versione complexe), la matrice $A_{\lambda\mu}$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$.

(3) Puisque le polynôme caractéristique est invariant par conjugaison, on a

$$P_{B_{\lambda\mu}}(X) = P_{A_{\lambda\mu}}(X) = -X(X^2 - 2\lambda X + 1).$$

(4) Puisque la matrice $B_{\lambda\mu}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}^3$, pour qu'elle soit diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$ il faut et il suffit que le polynôme caractéristique $P_{B_{\lambda\mu}}(X)$ soit scindé dans $\mathbb{R}$. Or les racines de $P_{B_{\lambda\mu}}(X)$ sont 0 et les racines du polynôme

$$Q(X) = X^2 - 2\lambda X + 1.$$

Il s'agit de déterminer quand le polynôme $Q(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Le discriminant de Q est

$$\Delta = 4(\lambda^2 - 1) = -4\mu^2,$$

donc il est toujours négatif ou nul. Les uniques possibilités pour que Q ait deux racines réelles est donc

$$\lambda = \pm 1, \quad \mu = 0,$$

et dans ces cas on a $Q(X) = (X - \lambda)^2$.

(5) On a

$$B_{1,0} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$
$$B_{-1,0} = -B_{1,0}.$$

En particulier, les matrices $B_{1,0}$ et $B_{-1,0}$ sont symétriques, donc diagonalisables dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Clairement on n'a pas besoin de faire des calculs pour trouver une base orthonormée qui diagonalise $B_{\pm 1,0}$ parce que par définition on a

$$B_{\pm 1,0} = PA_{\pm 1,0}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Donc les matrices $B_{1,0}$ et $B_{-1,0}$ se diagonalisent sur la base orthonormée v_1, v_2, v_3.

(6) Par définition on a

$$B_{0,1} = PA_{0,1}P^{-1},$$

donc il suffit de diagonaliser la matrice $A_{0,1}$ tout en se rappelant qu'on trouvera les coordonnées dans la base v_1, v_2, v_3. On pourrait procéder en faisant des calculs. On laisse cette approche au lecteur, en expliquant ici un raisonnement qui les évitent complètement.

Tout d'abord on a
$$P_{A_{0,1}}(X) = -X(X^2+1)$$
et il est évident que le noyau de $A_{0,1}$ est engendré par v_1. Puisque les espaces propres sont orthogonaux entre eux, il suffit de diagonaliser la matrice de l'application induite sur le plan orthogonal à v_1,
$$F = \mathrm{Vect}(v_1)^{\perp} = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$$
(on utilise ici que v_2, v_3 est une base orthonormée). L'application induite $\phi_{|F}\colon F \to F$ a comme matrice dans la base v_2, v_3,
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et $P_C(X) = X^2+1$. Les valeurs propres de C sont donc $\pm\boldsymbol{i}$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Un calcul rapide montre
$$\ker(C \mp \boldsymbol{i}\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \pm\boldsymbol{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Celles-ci sont les coordonnées dans la base v_2, v_3. Dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ le vecteur $(\pm\boldsymbol{i}, 1)$ correspond au vecteur
$$\pm\boldsymbol{i}v_2 + v_3.$$
En particulier une base de vecteurs propres de $B_{\lambda\mu}$ est
$$v_1, \boldsymbol{i}v_2 + v_3, -\boldsymbol{i}v_2 + v_3.$$
On conclut en les normalisant pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres :
$$v_1, \frac{\boldsymbol{i}v_2 + v_3}{\sqrt{2}}, \frac{-\boldsymbol{i}v_2 + v_3}{\sqrt{2}},$$
ce qui termine l'exercice. □

Exercice 2. On considère l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de l'orientation donnée par la base canonique. Soit
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Déterminer sa nature et ses caractéristiques géométriques.
3. Chercher les points $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. Calculer le vecteur $u = \overrightarrow{Mf(M)}$.
4. Soit t_{-u} la translation par le vecteur $-u$. Trouver les points fixes de l'application $g := t_{-u} \circ f$ et déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Solution. (1) La partie linéaire de f est l'application linéaire associée à la matrice
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) On laisse au lecteur de vérifier $A^t A = \mathrm{id}_3$. On a

$$\text{signe}\begin{vmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} \neq \text{signe}(3),$$

donc dét $A = -1$ et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie indirecte. De plus la matrice A est symétrique, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$. Il suit que $\overrightarrow{f}$ est une projection orthogonale d'axe $V_{-1} = \ker(A + \mathrm{id})$. Explicitons ce dernier : pour simplifier les calculs on remarque

$$\ker(A + \mathrm{id}) = \ker(4A + 4\mathrm{id})$$

et il s'agit donc de calculer le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & 4 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 7 \end{pmatrix}.$$

On remarque $C_1 + \sqrt{6}C_2 + C_3 = 0$ donc on a

$$\ker(A + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix},$$

car on sait *a priori* que $\ker(A + \mathrm{id})$ est de dimension 1.

(3) On calcule tout d'abord $\ker(A - \mathrm{id})$. Comme ci-dessus pour simplifier les calculs on remarque

$$\ker(A - \mathrm{id}) = \ker(4A - 4\mathrm{id})$$

et on calcule le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -6 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus a clairement rang 1 (comme il faut) et son noyau est engendré par les vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de trouver les points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(A - \mathrm{id})$, ou de manière équivalente, les points M tels que

$$(A - \mathrm{id})M = \alpha v + \beta w - B$$

pour des nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour simplifier les calculer, on cherche plutôt à résoudre le système

$$4(A - \mathrm{id})M = 4\alpha + \beta w - B$$

dans les indéterminées α et β. On a

$$\begin{cases} -x-\sqrt{6}y-z=-4\sqrt{6}\alpha+4\beta-4 \\ -\sqrt{6}x-6y-\sqrt{6}z=4\alpha-16 \\ -x-\sqrt{6}y-z=-4\beta+4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(L_3-L_1)/4\to L_3]{(L_2-\sqrt{6}L_1)/4\to L_2} \begin{cases} -x-\sqrt{6}y-z=-4\sqrt{6}\alpha+4\beta-4 \\ 7\alpha-\sqrt{6}\beta-4+\sqrt{6}=0 \\ \sqrt{6}\alpha-2\beta+2=0. \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(\sqrt{6}L_2-7L_3)/4\to L_3]{(2L_2-\sqrt{6}L_3)/8\to L_2} \begin{cases} -x-\sqrt{6}y-z=-4\sqrt{6}\alpha+4\beta-4 \\ \alpha-1=0 \\ 2\beta-2-\sqrt{6}=0. \end{cases}$$

On a donc

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1+\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Le vecteur u est

$$u=\alpha v+\beta w=\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 \\ -1-\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

Le lieu des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(A-\mathrm{id})$ est le plan P d'équation

$$x+\sqrt{6}y+z=2\sqrt{6},$$

qui peut être récrit sous la forme

$$P=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

(4) Le lieu des points fixes de g est le plan P, donc g est une symétrie orthogonale par rapport au plan P. L'application f est donc une symétrie glissée par rapport au plan P et vecteur de translation u. $\square$

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0,1]$. On munit E du produit scalaire défini, pour tout fonction $f, g \in E$, par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\; dt.$$

On considère les trois fonctions suivantes :

$$f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = t, \quad f_3(t) = \exp(t).$$

En utilisant le procédé de Gram-Schmidt déterminer une base orthonormée g_1, g_2, g_3 de l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3. (Indication : calculer $(f_2 \mid f_3)$ par parties).

Solution. On applique le procédé de Gram-Schmidt. On traite les trois fonctions en ordre :

1. On a $(f_1 \mid f_1) = \int_0^1 1 \; dt = 1$ et donc on pose
$$g_1 := f_1.$$

2. On a $(f_2 \mid g_1) = \int_0^1 t \; dt = 1/2$, donc la formule de Gram-Schmidt donne
$$\tilde{g}_2 = f_2 - (f_2 \mid g_1) g_1 = t - \frac{1}{2}.$$
D'autre part
$$(\tilde{g}_2 \mid \tilde{g}_2) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \; dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \Bigg|_{t=0}^{1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{12}.$$
Et donc on pose
$$g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} := \sqrt{3}(2t-1).$$

3. D'après la formule de Gram-Schmidt on a
$$\begin{aligned}\tilde{g}_3 &= f_3 - (f_3 \mid g_2) g_2 - (f_3 \mid g_1) g_1 \\ &= f_3 - \frac{(f_3 \mid \tilde{g}_2)}{(\tilde{g}_2 \mid \tilde{g}_2)} \tilde{g}_2 - (f_3 \mid f_1) f_1.\end{aligned}$$
D'autre part
$$\begin{aligned}(f_3 \mid f_1) &= \int_0^1 \exp(t) \; dt = e - 1, \\ (f_3 \mid \tilde{g}_2) &= \int_0^1 \exp(t) t \; dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \exp(t) \; dt = 1 - \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$
On a donc
$$\begin{aligned}\tilde{g}_3 &= \exp(t) - 6(3-e)\left(t - \frac{1}{2}\right) - (e-1) \\ &= \exp(t) - 6(3-e)t + 10 - 4e.\end{aligned}$$
On calcule la norme de $\tilde{g}_3$:
$$\begin{aligned}(\tilde{g}_3 \mid \tilde{g}_3) \quad &= \quad (f_3 \mid f_3) - 12(3-e)(f_3 \mid f_2) + 4(5-2e)(f_3 \mid f_1) + 36(3-e)^2 (f_2 \mid f_2) \\ &\quad\quad -24(3-e)(5-2e)(f_2 \mid f_1) + 4(5-2e)^2 (f_1 \mid f_1) \\ &= \quad \frac{1}{2}(e-1) - 12(3-e) + 4(5-2e)(e-1) + 12(3-e)^2 \\ &\quad\quad -12(3-e)(5-2e) + 4(5-2e)^2 \\ &= \quad 4e^2 + \left(20 + \frac{1}{2}\right) e - 28 - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Finalement on pose
$$g_3 = \frac{\exp(t) - 6(3-e)t + 10 - 4e}{\sqrt{4e^2 + \left(20 + \frac{1}{2}\right) e - 28 - \frac{1}{2}}}.$$

Une base orthonormée est donc donnée par g_1, g_2, g_3. □

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard. Soit A une matrice symétrique de taille n.

1. Montrer que pour tout vecteur $v \in \ker A$ et $w \in \operatorname{im} A$ on a $(v \mid w) = 0$.
2. En utilisant le théorème du rang et la question (1) montrer que $\ker A$ et $\operatorname{im} A$ sont orthogonaux et on a
$$(\ker A)^{\perp} = \operatorname{im} A.$$
3. Soit B la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{im} A$. Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ on a
$$ABv = Av.$$
(On écrira $v = x + y$ avec $x \in \ker A$ et $y \in \operatorname{im} A$.) Déduire l'égalité $AB = A$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (M, N) & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^t MN). \end{array}$$

On admet les deux faits suivants (qui peuvent être utilisés sans preuve) :

- ⋆ L'application ϕ est une forme bilinéaire définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- ⋆⋆ Pour toute matrice symétrique M on a
$$\phi(M, M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2,$$
où les λ_i sont les valeurs propres de M.

4. Dire pourquoi B se diagonalise sur une base orthonormée. En déduire que B est symétrique et calculer $\phi(B, B)$.
5. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ϕ, montrer l'inégalité
$$(\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^2) \cdot \operatorname{rg} A.$$
Quand a-t-on égalité ?

Démonstration. (1) Soient $v \in \ker A$ et $w \in \operatorname{im} A$. Par définition de l'image il existe $w' \in \mathbb{R}^n$ tel que $Aw' = 0$. On alors

$$(v \mid w) = (v \mid Aw') = ({}^t Av \mid w') = (Av \mid w) = (0 \mid w) = 0,$$

où on a utilisé que A est symétrique.

(2) D'après (1) on a $\operatorname{im} A \subset (\ker A)^{\perp}$. On conclut par un calcul de dimensions

$$\dim \operatorname{im} A = n - \dim \ker A = \dim(\ker A)^{\perp}.$$

(3) Si on écrit $v = x + y$ avec $x \in \ker A$ et $y \in \operatorname{im} A$, par définition de projection orthogonale on a $Bv = y$. En particulier, $ABv = Ay$. D'autre part, par linéarité

$$Av = A(x + y) = Ax + Ay = Ay,$$

car x appartient au noyau de A. On a donc $ABv = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, ce qui revient à dire $AB = A$.

(4) Soit $w_1, \dots, w_r$ une base orthonormée de l'image de A où $r = \operatorname{rg} A$ et soit $v_1, \dots, v_{n-r}$ une base orthonormée de $\ker A$. Par définition

$$\begin{aligned} Bv_i &= 0 \qquad \text{pour tout } i = 1, \dots, n-r \\ Bw_j &= 0 \qquad \text{pour tout } j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

En particulier, B se diagonalise sur la base orthonormée

$$v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_r$$

et elle est donc symétrique. De plus l'unique valeur propre non nulle est 1 avec multiplicité $r = \operatorname{rg} A$. D'après ($\star\star$) on obtient

$$\phi(B,B) = \sum_{i=1}^{r} 1^2 = \operatorname{rg} A.$$

(5) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux matrices A, B. On obtient

$$\phi(A,B)^2 \leqslant \phi(A,A)\phi(B,B),$$

avec égalité si et seulement A et B sont proportionnels. D'autre part on a

$$\phi(A,B) = \operatorname{Tr}({}^t AB) = \operatorname{Tr}(AB) \overset{(3)}{=} \operatorname{Tr}(A).$$

D'après la question précédent on a

$$\phi(B,B) = \operatorname{rg} A,$$

et on conclut donc

$$(\operatorname{Tr}(A))^2 \leqslant \operatorname{Tr}(A^2) \operatorname{rg} A.$$

On a égalité si et seulement si A et B sont proportionnels. Dans ce cas, si A est non nulle, B l'est aussi, donc on a forcément $A = \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Autrement dit, on a égalité si et seulement si A est proportionnelle à une projection orthogonale. $\square$