Révisions

Solutions

Exercice 1 –

1. Pour $n = 1$, on a bien l'identité $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Supposons que la propriété est vérifiée pour un entier $n \geq 1$, i.e. que
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
On obtient alors les relations
$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
ce qui montre que la formule est valable pour $n+1$ et conclut la démonstration.

2. On a bien $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Soit $n \geq 1$ un entier et supposons que
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
ce qui amène aux l'identités
$$1^2 + 2^2 \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
et permet de conclure.

Exercice 2 – Si c divise a et b, en posant $a = uc$ et $b = vc$, on obtient les identités $a + b = (u+v)c$ et $a - b = (u-v)c$, ce qui montre les points 1 et 2. Si a divise c, soit $c = ua$, alors on a la relation $bc = uab$, ce qui donne le point 3. Si, de plus b divise c, en posant $c = vb$, on a l'identité $c^2 = uvab$, d'où le point 4.

Exercice 3 –

1. Faux (il suffit de prender $a = 4$ et $b = 2$).
2. Vrai (c'est le point 4 de l'exercice précédent).
3. Vrai (en posant $b = ua$ et $c = va$, on obtient l'identité $bc = uva^2$).
4. Faux (en considérant, par exemple, le cas $a = 4$ et $b = c = 2$).
5. Vrai (on a l'identité $0 = 0 \cdot 3$).

6. Vrai (a divise b si et seulement si, pour tout nombre premier p, on a l'inégalité $v_p(b) \leq v_p(a)$, ce qui se traduit par $2v_p(b) \leq 2v_p(b)$. En remarquant que, pour tout entier n, on a l'identité $2v_p(n) = v_p(n^2)$, cette dernière inégalité est équivalente à la divisibilité de b^2 par a^2).

Exercice 4 – La propriété est clairement vraie pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$ un entier et supposons que 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$, soit $a^{2^n} - 1 = 2^{n+1}u$. En remarquent que $a^{2^n} + 1 = 2v$ est pair, on obtient alors les identité

$$a^{2^{n+1}} - 1 = (a^{2^n} - 1)(a^{2^n} + 1) = 2^{n+2}uv,$$

ce qui montre que 2^{n+2} divise $a^{2^{n+1}} - 1$ et conclut la démonstration.

Exercice 5 – On procède par récurrence sur l'entier n : pour $n = 0$, on a l'identité $3^3 - 27 = 0 \cdot 169$. Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 0$ et posons $3^{n+3} - 26n - 27 = 169m$. avec m entier. On obtient alors les identités

$$3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 = 3^3(3^{3n+3} - 26n - 27) + 676(n+1) = 169(27m + 4n + 4),$$

et la propriété est donc vraie pour $n + 1$, ce qui conclut la démonstration.

Exercice 6 – En général, un entier n divise un entier a si et seulement s'il divise $a + mn$ pour tout entier m. Dans le cas présent, l'entier n divise $n + 8$ si et seulement s'il divise $n + 8 - n = 8$. On a donc $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Exercice 7 – En procédant comme pour l'exercice précédent, l'entier $n+1$ divise n^2+1 si et seulement s'il divise $n^2+1-(n-1)(n+1) = 2$, ce qui donne $n+1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, ou encore $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$.

Exercice 8 – On remarquera que pour tout entier n avec $|n| \geq 2$, on a l'inégalité $n^2 \geq 4$. Il s'en suit que pour les deux premières équations, on a les relations $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. Une vérification directe montre que les seules solutions de la première équation sont $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ et que la deuxième n'admet pas de solutions. Finalement, la troisième équation se traduit par la relation $(x + y)(x - y) = 2$. Les entiers $x - y$ et $x + y$ ayant la même parité (leur différence étant égale à $-2y$, ils sont simultanément pairs ou impairs), leur produit est soit impair, soit divisible par 4 et on n'a donc pas de solutions.

Exercice 9 – On procède par l'absurde, en supposant que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ est rationnel, avec n et m entiers premiers entre eux. On obtient alors l'identité $n^2 = 2m^2$ et l'entier n est donc pair, soit $n = 2u$, avec u entier. Dans ce cas, on obtient la relation $4u^2 = 2m^2$, ou encore $m^2 = 2u^2$, ce qui implique que m est lui aussi pair, ce qui contredit la coprimalité de n et m.