Arithmétique des entiers

Solutions

Exercice 1 – On a les identités $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ et $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Exercice 2 – Les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6$ et 12, ceux de 8 sont $1, 2, 4$ et 8.

Exercice 3 –

1. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k \in \{2, \ldots, , n\}$ on a les inégalités $N+k \geq n+2 > k$. L'entier N étant divisible par k, il en est de même pour $N + k$, qui possède alors un diviseur autre que 1 et lui-même et n'est donc pas premier.

2. D'après le point précédent, les dix entiers entiers consécutifs $11! + 2, \ldots, 11! + 11$ ne sont pas premiers. En fait, une recherche explicite montre que les plus petits entiers consécutifs non premiers sont $114, \ldots, 123$ (on vérifie de plus qu'il en est de même pour $124, 125$ et 126, ce qui donne 13 entiers consécutifs composés).

Exercice 4 – En notant n l'effectif de l'école, l'entier $n - 2$ est divisible par $3, 5$ et 7. Les entiers $3, 5$ et 7 étant premiers entre eux deux à deux, on en déduit que leur produit divise $n - 2$, soit $n - 2 = 105m$, avec m entier, ou encore $n = 105m + 2$. Les inégalités $100 \leq n \leq 200$ impliquent alors que $m = 1$, d'où $n = 107$.

Exercice 5 – Pour tout entier $b > 0$, l'entier b^3 divise a si et seulement si, pour tout nombre premier p, on a l'inégalité $v_p(b^3) \leq v_p(a)$. L'identité $v_p(b^3) = 3v_p(b)$ amène alors aux relations $v_2(b) \leq \frac{4}{3}, v_3(b) \leq 2, v_7(b) \leq \frac{1}{3}$ et $v_p(b) = 0$ pour tout $p > 7$. Tenant compte du fait que $v_p(b)$ est un entier, on en déduit que la plus grande valeur de b est $18 = 2 \cdot 3^2$.

Exercice 6 – Le petit théorème de Fermat affirme que p divise $2^p - 2$. On en déduit que p divise $2^p + 1$ si et seulement s'il divise $2^p + 1 - (2^p - 2) = 3$, d'où l'identité $p = 3$.

Exercice 7 – On a les factorisations $165 = 3 \cdot 5 \cdot 13$ et $143 = 11 \cdot 13$. Le ppcm de ces deux entiers est donc égal à $2145 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$.

Exercice 8 –

1. On commence par déterminer une solution particulière (x_0, y_0). Dans le cas présent, sans utiliser l'algorithme d'Euclide, on remarque que les valeurs $x_0 = 2$ et $y_0 = -1$ conviennent. Les entiers 4 et 9 étant premiers entre eux, la solution générale est donnée par $x = 2 + 36n$ et $y = -1 - 36n$, avec n entier.

2. On procède en suivant la méthode présentée en cours : on commence par déterminer une identité de Bézout pour les entiers 18 et 7. Pour ce faire, on utilise l'algorithme d'Euclide, qui amène à l'identité $2\cdot 18-5\cdot 7=1$. On en déduit la solution particulière $x_0=4=2\cdot 2$ et $y_0=-10=-5\cdot 2$. Les entiers 7 et 18 étant premiers entre eux, leur ppcm est égal à $7\cdot 18=126$ et la solution générale est donnée par $x=4+126n$ et $y=-10-126n$, avec n entier.

Exercice 9 – Supposons que l'entier $d=ax+by>0$ divise a et b. Si c est un diviseur commun à a et b, soit $a=cu$ et $b=cv$, on obtient les identités $d=cux+cvy=c(ux+vy)$ et donc c divise d, d'où le résultat.

Exercice 10 –

1. L'entier cd divise ac et bc. Si x et y sont deux entiers tels que $d=ax+by$, on obtient l'identité $cd=acx+bcy$ et l'exercice précédent permet de conclure.

2. Par contraposée si p est un nombre premier divisant $\mathrm{pgcd}(a,bc)>1$, il divise b ou c. L'entier a étant un multiple de p, on en déduit que p divise $\mathrm{pgcd}(a,b)$ ou $\mathrm{pgcd}(a,c)$, qui ne peuvent donc pas être tous deux égaux à 1.

3. Comme pour le point précédent, si p est un diviseur premier de $\mathrm{pgcd}(a^n,b^m)>1$, il divise a^n (respectivement b^m) et donc a (respectivement b). Il s'en suit que $\mathrm{pgcd}(a,b)$ est un multiple de p et ne peut être égal à 1.

4. Posons $u=\frac{a}{d}$ et $v=\frac{b}{d}$. Le point 1 amène aux identités
$$d=\mathrm{pgcd}(a,b)=\mathrm{pgcd}(du,dv)=d\mathrm{pgcd}(u,v').$$
Les entiers u' et v' sont donc premiers entre eux et, en appliquant le point 3, il en est de même pour u'^n et v'^n. Finalement, en utilisant une fois de plus le point 1, on obtient les relations
$$\mathrm{pgcd}(a^n,b^n)=\mathrm{pgcd}(d^nu^n,d^nv^n)=d^n\mathrm{pgcd}(u^n,v^n)=d^n.$$

Exercice 11 – Pour tout nombre premier p divisant m, on a l'identité
$$v_p(m)=\max\{v_p(a),v_p(b)\}.$$
En posant
$$e_p=\begin{cases}v_p(a) \text{ si } v_p(a)\geq v_p(b),\\ \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\qquad \text{et}\quad f_p=\begin{cases}v_p(b) \text{ si } v_p(a)<v_p(b),\\ \\ 0 \text{ sinon,}\end{cases}$$
les entiers $a'=\prod_{p|m}p^{e_p}$ et $b'=\prod_{p|m}p^{e_f}$ sont des diviseurs respectifs de a et b, premiers entre eux et vérifiant l'identité $m=a'b'$.

Exercice 12 – Si m et n sont deux entiers, on a l'identité
$$\max\{n,m\}+\min\{n,m\}=n+m.$$
La propriété découle alors des identités
$$\mathrm{pgcd}(a,b)=\prod_{p|ab}p^{\min\{v_p(a),v_p(b)\}}\quad \text{et}\quad \mathrm{ppcm}(a,b)=\prod_{p|ab}p^{\max\{v_p(a),v_p(b)\}},$$
les produits ci-dessus étant étendus à tous les diviseurs premiers p de ab.