Groupes

Énoncés

Exercice 1 – Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $(x, y) \mapsto xy$ associative, avec élément neutre à gauche e (i.e. $ex = x$ pour tout $x \in G$) et telle que tout élément de G possède un inverse à gauche (i.e. pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $yx = 1$). Montrer que G est un groupe.

Exercice 2 – Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$ (ici, e désigne l'élément neutre de G). Montrer que G est abelien.

Exercice 3 – Montrer qu'un groupe fini d'ordre pair possède un élément d'ordre 2.

Exercice 4 – Soit H un sous-ensemble non vide d'un groupe G. Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement si, pour tout $g, h \in H$, on a $g^{-1}h \in H$.

Exercice 5 – Soit G un groupe. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de G est un sous-groupe de G. Que peut-on dire de la réunion de deux sous-groupes de G?

Exercice 6 – Soient G un groupe et H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G. Montrer que H est un sous-groupe de G. Exhiber un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G.

Exercice 7 – Soit G un groupe.

1. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un endomorphisme de G si et seulement si G est commutatif.

2. On suppose G fini. Soit ϕ un endomorphisme involutif de G (i.e. un homomorphisme $\phi : G \to G$ tel que $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_G$) dont le seul point fixe est e (l'élément neutre de G). Montrer que pour tout élément $z \in G$, il existe $t \in G$ tel que

$$z = t\phi(t^{-1}).$$

En déduire l'expression de ϕ puis que G est commutatif.