Groupes

Solutions

Exercice 1 – Il suffit de montrer que tout inverse à gauche est également un inverse à droite et que l'élément neutre à gauche est un élément neutre à droite. Étant donné $x \in G$ fixons $y, z \in G$ tel que $yx = e$ et $zy = e$. On a alors les identités

$$xy = e(xy) = (zy)(xy) = z((yx)y) = z(ey) = zy = e,$$

et, par conséquent,

$$xe = x(yx) = (xy)x = ex = x,$$

ce qui conclut la démonstration.

Exercice 2 – Étant donnés $x, y \in G$, on a les identités

$$xy = y^2xyx^2 = y(yx)^2x = yx$$

et le groupe est donc abélien.

Exercice 3 – Pour tout groupe G, la relation binaire

$$x \sim y \;\Leftrightarrow xy = 1$$

est une relation d'équivalence. L'unicité de l'inverse implique que la classe d'équivalence d'un 'élément $x \in G$ est l'ensemble $\{x, x^{-1}\}$, qui est un singleton si et seulement si $x = x^{-1}$, ou encore $x^2 = e$. Si n désigne le cardinal du sous-ensemble de G formé par les éléments x tels que $x^2 = e$, on en déduit qu'il existe $\frac{1}{2}(|G| - n)$ classes de cardinal 2. Il s'en suit que $|G|$ et n ont la même parité. En particulier, si l'ordre de G est pair, il en est de même pour n. Dans ce cas, ayant $n \geq 1$ (car $e^2 = e$), on en déduit l'inégalité $n > 1$, d'où le résultat.

Exercice 4 – Clairement, si H est un sous-groupe de G, étant donnés $g, h \in H$, on a $g^{-1} \in H$ et, par conséquent $g^{-1}h \in H$. Réciproquement, pour tout élément x de H (qui est non vide), on a les relations $e = x^{-1}x \in H$ (on pose $g = h = x$), ce qui amène ensuite à $x^{-1} = x^{-1}e \in H$ (en posant $g = x$ et $h = e$). Finalement, étant donnés $x, y \in H$, on vient de voir que x^{-1} appartient à H, il en est alors de même pour $xy = (x^{-1})^{-1}y$ (on pose $g = x^{-1}$ et $h = y$) et H est donc un sous-groupe de G.

Exercice 5 – L'intersection de deux sou-groupes H et K de G est non vide (car elle contient lélément neutre) et, étant donnés $g, h \in H \cap K$, l'élément $g^{-1}h$ appartenant à H et K (car ce sont des sous-groupes), il appartient à leur intersection. L'exercice précédent permet d'en déduire que $H \cap K$ est un sous-groupe de G. Montrons maintenant que si $H \cup K$ est un sous-groupe, on a $H \subset K$ ou $K \subset H$. En effet, si aucune de ces deux dernières inclusions était vérifiée, on pourrait choisir un élément $x \in H$ (respectivement $y \in K$) n'appartenant pas à K (respectivement à H). Dans ce cas, l'élément xy appartiendrait à $H \cup K$ (qui est un sous-groupe), mais ne pourrait appartenir ni à H (car, dans ce cas, il en serait de même pour $x^{-1}xy = y$), ni à K (car $x = xyy^{-1} \notin K$), ce qui est absurde.

Exercice 6 – Le sous-ensemble H étant stable pour la loi de groupe de G, il suffit de montrer que $e \in H$ et que, étant donné $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$ (on remarquera que la première assertion est conséquence de la seconde). On peut procédér de deux manières différentes:

1. Tout d'abord, considérons l'application $f : H \to G$ définie par $f(y) = xy$. Le sous-ensemble H étant stable pour la loi de groupe de G, on en déduit que $f(H) \subset H$. De plus, l'application est injective (si $xy = xz$ alors $y = x^{-1}xy = x^{-1}xz = z$), donc surjective (car H est fini). Il existe alors $z \in H$ tel que $f(z) = xz = x$ et l'unicité de lélément neutre implique que $e = z \in H$. Dans ce cas, il existe $y \in H$ tel que $f(y) = xy = e$, ce qui montre que l'inverse de x appartient à H.

2. L'ensemble $\{x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ étant contenu dans H (car ce dernier est stable pour la loi de groupe de G), son cardinal est fini. Il existe alors deux entiers $n < m$ tels que $x^n = x^m$, ce qui implique que $x^d = e$, où l'on a posé $d = m - n > 0$. On en déduit que e et l'inverse de x (qui n'est autre que x^{d-1}) appartiennent à H.

La finitude de H est essentielle. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le sous-ensemble $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ du groupe $\mathbb{Q}^\times$, qui est stable pour la loi de groupe (multiplication) mais n'est pas un sous-groupe.

Exercice 7 –

1. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est un endomorphisme si et seulement si, étant donnés $x, y \in G$, on a $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, ce qui revient à affirmer que $yx(xy)^{-1} = e$ (en multipliant à gauche par yx) ou encore que $yx = xy$ (en multipliant à droite par xy).

2. L'application $f : G \to G$ définie par $f(t) = t\phi(t^{-1})$ est injective. En effet, étant donnés $x, y \in G$, on a $f(x) = f(y)$ si et seulement si $x\phi(x^{-1}) = y\phi(y^{-1})$, ce qui se traduit par les identités
$$y^{-1}x = \phi(y^{-1})\phi(x^{-1})^{-1} = \phi(y^{-1})\phi(x) = \phi(y^{-1}x).$$
En d'autres temes, $y^{-1}x$ est un point fixe de ϕ, d'où $y^{-1}x = e$ et finalement $x = y$. Le groupe G étant fini, l'application f est alors également surjective, d'où le résultat. On remarquera que l'on utilise en aucun moment le fait que ϕ est une involution.

3. D'après le point précédent, pour tout $z \in G$, il existe un élément $t \in G$ tel que $z = t\phi(t^{-1})$. On obtient alors les identités
$$\phi(z) = \phi(t\phi(t^{-1})) = \phi(t)\phi(\phi(t^{-1})) = \phi(t)t^{-1} = (t\phi(t^{-1}))^{-1} = z^{-1}.$$
Le premier point affirme alors que G est abélien.