Anneaux

Énoncés

Exercice 1 – Montrer qu'un sous-ensemble non vide $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est un idéal si et seulement si, pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$ et tout $c \in A$, on a $a + bc \in \mathfrak{a}$.

Exercice 2 – Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux d'un anneau A. Posons

$$\begin{cases} \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{c \in A, \mid \exists\, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b} \text{ avec } c = a + b\}, \\ \\ \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{c \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b} \text{ avec } c = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n\}. \end{cases}$$

1. Vérifier que l'on a les inclusions $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ est un idéal de A si et seulement si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
3. Montrer que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un idéal de A et que c'est le plus petit idéal contenant $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$.
4. Montrer que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ sont des idéaux de A et que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est le plus grand idéal de A contenu dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.
5. Montrer que si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ (auquel cas on dit que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont *premiers entre eux*) alors on a l'identité $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Donner un exemple pour lequel l'inclusion $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est stricte.

Exercice 3 – Pour tout anneau A, notons $A^\times$ le groupe de ses éléments inversibles.

1. Déterminer $\mathbb{Z}^\times$ et $\mathbb{Q}^\times$.
2. Montrer que si A et B sont deux anneaux, on a l'identité $(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$.
3. Montrer que si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux alors $f(A^\times)$ est contenu dans $B^\times$. Si f est surjectif, a-t-on $f(A^\times) = B^\times$ (justifier la réponse)?

Exercice 4 – Un élément a d'un anneau A est *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif n tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{a}$ des éléments nilpotents d'un anneau A est un idéal et que le quotient $A/\mathfrak{a}$ ne possède pas d'éléments nilpotents non nuls.
2. Montrer que si $a \in A$ est nilpotent alors $1 + a$ est inversible.

Exercice 5 – Montrer qu'un anneau A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont 0 (l'idéal nul) et A.

Exercice 6 – Montrer qu'un anneau intègre qui ne possède qu'un nombre fini d'idéaux est un corps.

Exercice 7 – Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps.

Exercice 8 – Le but de cet exercice est de montrer que tout automorphisme de corps $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'identité, i.e. que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sigma(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ (indication : utiliser le fait que $x \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si c'est un carré).
3. En déduire que σ est une application croissante, puis qu'elle est continue.
4. Conclure.

Exercice 9 – Un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est *premier* si, étant donnés deux éléments a et b de A, la relation $ab \in \mathfrak{a}$ implique que $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$.

1. Montrer qu'un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est premier si et seulement si le quotient $A/\mathfrak{a}$ est intègre.
2. Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{a}$ de B, l'idéal $f^{-1}(\mathfrak{a})$ de A est premier.

Exercice 10 – Un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est *maximal*, si $\mathfrak{a} \neq A$ et, pour tout idéal $\mathfrak{b}$ de a tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset A$, on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b} = A$. Montrer que $\mathfrak{a}$ est maximal si et seulement si le quotient $A/\mathfrak{a}$ est un corps. En déduire que tout idéal maximal est premier (indication : utiliser le premier point de l'exercice précédent).