Anneaux de polynômes sur un corps

Énoncés

Exercice 1 – Déterminer une identité de Bézout entre es polynômes $X^3 + X + 1$ et $X^2 + X + 1$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2 – Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 à coefficients dans un corps K est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine dans K.

Exercice 3 – Soit p un nombre premier et notons K le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le nombre de polynômes unitaires de degré 2 à coefficients dans K.
2. Montrer que si $f \in K[X]$ est unitaire, de degré 2 et réductible alors il s'écrit comme $f = (X - a)(X - b)$, avec $a, b \in K$ et $a \neq b$ ou $f = (X - a)^2$, avec $a \in K$ (indication : utiliser l'exercice précédent).
3. Déduire de la question précédente le nombre de polynômes unitaires, de degré 2 et irréductibles à coefficients dans K. Les énumérer explicitement pour $p = 2$ et $p = 3$.

Exercice 4 – Soient θ un réel et n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + \sin(\theta)X)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 5 – Soient K un corps, $f \in K[X]$ et $a, b \in K$, avec $a \neq b$.

1. Exprimer le reste de la division euclidienne de f par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $a, b, f(a)$ et $f(b)$.
2. Exprimer le reste de la division euclidienne de f par $(X - a)^2$ en fonction de $a, f(a)$ et $f'(a)$ (où f' désigne le polynôme dérivé de f).

Exercice 6 – Soient K et L deux corps, avec $K \subset L$. Considérons deux polynômes $f, g \in K[X]$, avec f irréductible. Montrer que si f et g ont une racine commune dans L alors f divise g.

Exercice 7 – Montrer qu'un polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{R}$ se factorise en produit de polynômes irréductibles de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer la factorisation du polynôme $X^8 - 1$.

Exercice 8– Déterminer la factorisation en produit de facteurs irréductibles du polynôme $X^2 + 3X + 4 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ pour $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Exercice 9– Soit K un corps, $f \in K[X]$ un polynôme et notons A le quotient $K[X]/(f)$.

1. Montrer qu'un élément de A est non inversible si et seulement si c'est un diviseur de 0.
2. Fournir un exemple d'anneau possédant des éléments non inversibles qui ne sont pas des diviseurs de 0.

Exercice 10 – Déterminer les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les nilpotents de l'anneau quotient $A = \mathbb{C}[X]/(X^3 - X^2)$.

Exercice 11 – Soit p un nombre premier et notons $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé par les éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{p}$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, l'écriture $x = a + b\sqrt{p}$ est unique.
3. Vérifier que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
4. Déterminer le noyau et l'image de l'homomorphisme $\phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R}$ défini par $\phi(f) = f(\sqrt{p})$. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ est isomorphe au quotient $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - p)$.
5. Montrer que si p et q sont deux nombres premiers distincts alors les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ ne sont pas isomorphes.