Examen du cours 2M271

Durée : 2 heures

16 mai 2017

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 4 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Dire sans calculs, en énonçant un résultat du cours, pourquoi la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Déterminer une base orthonormée dans laquelle A se diagonalise. [Indication : pour calculer le polynôme caractéristique on pensera à faire la somme de toutes les lignes ou toutes les colonnes. Les valeurs propres sont des entiers.]
3. Déterminer la signature de la forme quadratique associée à A.

Exercice 2. On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 - 3x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

1. Écrire la matrice B associée à q, déterminer son rang et son noyau.
2. Écrire q comme somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
3. Déterminer la signature de q.
4. Déterminer une base orthogonale pour la forme quadratique q.
5. Déterminer un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^4$ tel que $q(v) = 0$?
6. Déterminer un sous-espace isotrope maximal. Quelle est sa dimension ?
7. $(*)$ Sur $\mathbb{F}_3$ déterminer des coordonnées $z_1, \ldots, z_4$ en fonction des x_i et $\lambda \in \mathbb{F}_3$ telles que q s'écrit sous la forme $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \lambda z_4^2$.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit $\phi \colon E \to E$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que ϕ est une isométrie.
2. Déterminer si ϕ est directe ou indirecte.
3. Déterminer les caractéristiques géométriques de l'isométrie (type, axe D et cosinus de l'angle θ de rotation).
4. On oriente l'axe D par un vecteur $v \in D$ tel que $(v \mid e_2) > 0$. Calculer le signe de $\sin\theta$.

Exercice 4. On considère la matrice symétrique

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique associée q sur $\mathbb{R}^2$. Le but de cet exercice est d'étudier les groupes d'isométries par rapport à q :

$$\mathrm{O}(q,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : {}^t AJA = J\},$$
$$\mathrm{SO}(q,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}(q,\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A \in \mathrm{O}(q,\mathbb{R})$ si et seulement si $a^2 - b^2 = 1$, $d^2 - c^2 = 1$ et $ac - bd = 0$.

Dorénavant on suppose $A \in \mathrm{O}(q,\mathbb{R})$.

2. Déduire de la question 1 que a, d sont non nuls et $a^2 = d^2$.
3. Montrer que $\det A = 1$ si et seulement si $a = d$, et que dans ce cas on a
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
4. Déduire que le groupe $\mathrm{SO}(q,\mathbb{R})$ est commutatif.

Pour tout nombre réel θ on pose $\cosh(\theta) := \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ et $\sinh(\theta) := \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$. Ces fonctions s'appellent *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*.

5. En utilisant les définitions, pour tous réels θ, ω montrer les relations suivantes :
   (a) $\cosh(\theta + \omega) = \cosh(\theta)\cosh(\omega) + \sinh(\theta)\sinh(\omega)$;
   (b) $\sinh(\theta + \omega) = \cosh(\theta)\sinh(\omega) + \sinh(\theta)\cosh(\omega)$;
   (c) $\cosh(\theta)^2 - \sinh(\theta)^2 = 1$.
   [Indication : pour la dernière on remarquera $\cosh(-\theta) = \cosh(\theta)$].

On admet que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geq 0$ et $a^2 - b^2 = 1$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cosh(\theta)$ et $b = \sinh(\theta)$.

6. Montrer que tout élément de $\mathrm{SO}(q,\mathbb{R})$ est de la forme $\pm R_\theta$ avec
$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$
7. Déduire de la question 5 la relation $R_\theta R_\omega = R_{\theta+\omega}$ pour tout $\theta, \omega \in \mathbb{R}$.