Examen du cours 2M271

Durée : 2 heures

16 mai 2017

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 4 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Dire sans calculs, en énonçant un résultat du cours, pourquoi la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Déterminer une base orthonormée dans laquelle A se diagonalise. [Indication : pour calculer le polynôme caractéristique on pensera à faire la somme de toutes les lignes ou toutes le colonnes. Les valeurs propres sont des entiers.]
3. Déterminer la signature de la forme quadratique associée à A.

Solution.

1. La matrice est symétrique donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. On calcule le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 3-X & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & -5 & -X \\ 1 & 3-X & 1 & -X \\ -5 & 1 & 3-X & -X \\ 1 & -5 & 1 & -X \end{pmatrix} && C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \to C_4 \\
&= \det \begin{pmatrix} 2-X & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 8-X & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 2-X & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -X \end{pmatrix} && \begin{matrix} L_1 - L_4 \to L_1 \\ L_2 - L_4 \to L_2 \\ L_3 - L_4 \to L_3 \end{matrix} \\
&= -X(8-X) \det \begin{pmatrix} 2-X & -6 \\ -6 & 2-X \end{pmatrix} \\
&= X(X-8)^2(X+4).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres $0, -4$ ont multiplicité 1 et la valeur propre 8 a multiplicité 2. On calcule les espaces propres correspondants.

Valeur propre 0 : on remarque qu'on faisant la somme des colonnes on obtient 0. Donc

$$V_0 = \ker(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Valeur propre -4 : on remarque que l'opération $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ sur les colonnes de $A + 4\,\mathrm{id}$ donne 0. Donc

$$V_{-4} = \ker(A + 4\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Valeur propre 8 : on calcule le noyau de $A - 8\,\mathrm{id}$.

$$\begin{aligned}
A - 8\,\mathrm{id} &= \begin{pmatrix}-5 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -5 & 1 & -5\\ -5 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -5 & 1 & -5\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -5 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_3 - L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_2 \to L_2 \\ \dfrac{L_1 + L_2}{-4} \to L_1 \end{array} \\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} && \begin{array}{l} \dfrac{L_2 - L_1}{-6} \to L_2 \\ L_1 - L_2' \to L_1 \end{array}
\end{aligned}$$

où L_2' désigne la deuxième ligne qu'on vient d'obtenir. En particulier,

$$V_8 = \ker(A - 8\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

On remarque que la base de V_8 qu'on a choisi est orthogonale.

Une base orthonormée de vecteurs propres de A est :

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

3. La signature de la forme quadratique associée est (2, 1). □

Exercice 2. On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 - 3x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

1. Écrire la matrice B associée à q, déterminer son rang et son noyau.
2. Écrire q comme somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
3. Déterminer la signature de q.
4. Déterminer une base orthogonale pour la forme quadratique q.
5. Déterminer un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^4$ tel que $q(v) = 0$?
6. Déterminer un sous-espace isotrope maximal. Quelle est sa dimension ?
7. $(*)$ Sur $\mathbb{F}_3$ déterminer des coordonnées $z_1, \ldots, z_4$ en fonction des x_i et $\lambda \in \mathbb{F}_3$ telles que q s'écrit sous la forme $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \lambda z_4^2$.

Solution.

1. La matrice associée à q est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

   On a $\det B = \frac{1}{4}$ donc le rang de B est 4.

2. On applique la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + x_2 - 2x_4)^2 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_4)^2 + (x_2 + x_4)(x_3 + x_4) - x_4^2. \end{aligned}$$

   Si on pose

$$y_1 = x_1 + x_2 - 2x_4, \qquad y_2 + y_3 = x_2 + x_4, \qquad y_2 - y_3 = x_3 + x_4, \qquad y_4 = x_4,$$

   on obtient $q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

3. La signature de q est $(2, 2)$.

4. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Une base orthogonale pour q est donnée par les colonnes de l'inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Une base orthogonale pour q est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. En regardant la matrice de q il est évident que e_3 est isotrope.

6. La signature de q est $(2,2)$ donc la dimension d'un sous-espace isotrope maximal est 2. Un sous-espace isotrope maximal est le plan

$$\mathrm{Vect}\left(\frac{v_1}{q(v_1)}+\frac{w_1}{q(w_1)}, \frac{v_2}{q(v_2)}+\frac{w_2}{q(w_2)}\right).$$

7. Le changement de coordonnées fait à la question 2 est valable aussi sur $\mathbb{F}_3$, donc le discriminant de q est $(-1)^2 = 1$. En particulier on peut prendre $\lambda = 1$.
   D'après la question 2 on est ramené à écrire la forme quadratique $q'(y_3, y_4) = -y_3^2 - y_4^2$ sur $\mathbb{F}_3^2$ sous la forme $z_3^2 + z_4^2$. On remarque que la base de $\mathbb{F}_3^2$,

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

   est orthogonale par rapport à la forme q' et $q'(u_1) = q'(u_2) = 1$. Le changement de coordonnée qui correspond à cette base est donné par les lignes de la matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}.$$

   On peut prendre $z_3 = -y_3 - y_4$ et $z_4 = -y_3 + y_4$. $\square$

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit $\phi\colon E \to E$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & \sqrt{6} & 1\\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6}\\ -1 & \sqrt{6} & -3\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que ϕ est une isométrie.
2. Déterminer si ϕ est directe ou indirecte.
3. Déterminer les caractéristiques géométriques de l'isométrie (type, axe D et cosinus de l'angle θ de rotation).
4. On oriente l'axe D par un vecteur $v \in D$ tel que $(v \mid e_2) > 0$. Calculer le signe de $\sin\theta$.

Solution.

1. On vérifie ${}^tCC = \mathrm{id}$.
2. On a

$$\mathrm{sign}\left(\det\begin{pmatrix}3 & \sqrt{6}\\ -\sqrt{6} & 2\end{pmatrix}\right) \neq \mathrm{sign}(-3),$$

   donc $\det C = -1$.
3. Puisque C est indirecte, on a $\mathrm{Tr}\, C = 2\cos\theta - 1$. Puisque $\mathrm{Tr}\, C = \frac{1}{2}$ on obtient $\cos\theta = \frac{3}{4}$.
   On calcule l'axe $D = \ker(C+\mathrm{id})$. Pour simplifier on remarque $\ker(C+\mathrm{id}) = \ker(4C+4\,\mathrm{id})$:

$$\begin{aligned} 4C + 4\,\mathrm{id} &= \begin{pmatrix}7 & \sqrt{6} & 1\\ -\sqrt{6} & 6 & \sqrt{6}\\ -1 & \sqrt{6} & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0 & \sqrt{6} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\frac{L_1+\sqrt{6}L_2+L_3}{8} \to L_1\\ L_2 - \sqrt{6}L_3 \to L_2\\ L_3 - L_1' \to L_3\end{matrix}\end{aligned}$$

où L_1' désigne la première ligne qu'on vient d'obtenir. En particulier

$$D = \ker(C + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

L'isométrie ϕ est une rotation gauche d'angle satisfaisant $\cos\theta = \frac{3}{4}$ et axe D.

4. On peut prendre

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

car $(v \mid e_2) = 1 > 0$. Soit $x = e_1$, alors

$$\det(x, Ax, v) = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{5}{4} > 0.$$

En particulier $\sin\theta > 0$. □

Exercice 4. On considère la matrice symétrique

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique associée q sur $\mathbb{R}^2$. Le but de cet exercice est d'étudier les groupes d'isométries par rapport à q :

$$\mathrm{O}(q, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : {}^t\!AJA = J\},$$
$$\mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}(q, \mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A \in \mathrm{O}(q, \mathbb{R})$ si et seulement si $a^2 - b^2 = 1$, $d^2 - c^2 = 1$ et $ac - bd = 0$.

Dorénavant on suppose $A \in \mathrm{O}(q, \mathbb{R})$.

2. Déduire de la question 1 que a, d sont non nuls et $a^2 = d^2$.
3. Montrer que $\det A = 1$ si et seulement si $a = d$, et que dans ce cas on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

4. Déduire que le groupe $\mathrm{SO}(q, \mathbb{R})$ est commutatif.

Pour tout nombre réel θ on pose $\cosh(\theta) := \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ et $\sinh(\theta) := \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$. Ces fonctions s'appellent *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*.

5. En utilisant les définitions, pour tous réels θ, ω montrer les relations suivantes :
   (a) $\cosh(\theta + \omega) = \cosh(\theta)\cosh(\omega) + \sinh(\theta)\sinh(\omega)$;
   (b) $\sinh(\theta + \omega) = \cosh(\theta)\sinh(\omega) + \sinh(\theta)\cosh(\omega)$;
   (c) $\cosh(\theta)^2 - \sinh(\theta)^2 = 1$.

(Indication : pour la dernière on remarquera $\cosh(-\theta) = \cosh(\theta)$).

On admet que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geq 0$ et $a^2 - b^2 = 1$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cosh(\theta)$ et $b = \sinh(\theta)$.

6. Montrer que tout élément de $\mathrm{SO}(q, \mathbb{R})$ est de la forme $\pm R_\theta$ avec

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

7. Déduire de la question 5 la relation $R_\theta R_\omega = R_{\theta+\omega}$ pour tout $\theta, \omega \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

1. On a :

$${}^tAJA = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

2. On a $a^2 = 1 + b^2$ et $d^2 = 1 + c^2$. Puisque a, b, c, d sont des réels, $a, d \geq 1$. En employant la relation $ac = bd$ dans l'égalité $d^2 - c^2 = 1$ on trouve

$$1 = d^2 - \left(\frac{bd}{a}\right)^2 = \frac{d^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \frac{d^2}{a^2},$$

d'où $a^2 = d^2$.

3. D'après la question 2 on a $a = \pm d$. Si $a = d$, $\det A = 1$, $c = b$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Si $a = -d$, $\det A = -1$.

4. Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix},$$

on a

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + ba' \\ ab' + ba' & aa' + bb' \end{pmatrix} = A'A.$$

5. (a) : on a

$$4\cosh(\theta)\cosh(\omega) = (e^\theta + e^{-\theta})(e^\omega + e^{-\omega}) = e^{\theta+\omega} + e^{\theta-\omega} + e^{\omega-\theta} + e^{-(\theta+\omega)},$$
$$4\sinh(\theta)\sinh(\omega) = (e^\theta - e^{-\theta})(e^\omega - e^{-\omega}) = e^{\theta+\omega} - e^{\theta-\omega} - e^{\omega-\theta} + e^{-(\theta+\omega)},$$

d'où

$$\cosh(\theta)\cosh(\omega) + \sinh(\theta)\sinh(\omega) = \frac{e^{\theta+\omega} + e^{-(\theta+\omega)}}{2} = \cosh(\theta + \omega).$$

(b) : on a

$$4\cosh(\theta)\sinh(\omega) = (e^\theta + e^{-\theta})(e^\omega - e^{-\omega}) = e^{\theta+\omega} - e^{\theta-\omega} + e^{\omega-\theta} - e^{-(\theta+\omega)},$$
$$4\sinh(\theta)\cosh(\omega) = (e^\theta - e^{-\theta})(e^\omega + e^{-\omega}) = e^{\theta+\omega} + e^{\theta-\omega} - e^{\omega-\theta} - e^{-(\theta+\omega)},$$

d'où
$$\cosh(\theta)\sinh(\omega)+\sinh(\theta)\cosh(\omega)=\frac{e^{\theta+\omega}-e^{-(\theta+\omega)}}{2}=\sinh(\theta+\omega).$$
(c) : on applique (a) avec $\omega=-\theta$:
$$\cosh(\theta)^2-\sinh(\theta)^2=\cosh(\theta-\theta)=\cosh(0)=1.$$

6. D'après la question 3, tout élément de A de $(q,\mathbb{R})$ est de la forme
$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$
avec $a^2-b^2=1$. On conclut en prenant $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $a=\cosh(\theta)$ et $b=\sinh(\theta)$.
7. C'est une conséquence immédiate des questions 5 et 6. $\square$