Exam du cours 3M123

Durée : 2 heures

15 décembre 2016

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 3 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1. On considère l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et l'application affine $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1+\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire A de f et montrer que c'est une isométrie.
2. Déterminer les caractéristiques géométriques de A.
3. Déterminer l'unique vecteur $u \in \ker(A - \mathrm{id})$ tel que $g := t_{-u} \circ f$ admet un point fixe.
4. Déterminer le lieu des points fixes de g.
5. Déterminer les caractéristiques géométriques de f.

[Des approches qui répondent aux questions dans un ordre différent sont permises.]

Solution.

1. La partie linéaire de f est l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}.$$

   L'identité ${}^tAA = \mathrm{id}_3$ est laissée au lecteur.

2. On a

$$\operatorname{signe}\begin{vmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} \neq \operatorname{signe}(3).$$

Donc $\det A = -1$ et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie indirecte. La matrice A est symétrique, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$. Il suit que $\overrightarrow{f}$ est une projection orthogonale d'axe $V_{-1} = \ker(A + \mathrm{id})$. Explicitons ce dernier : pour simplifier les calculs on remarque

$$\ker(A + \mathrm{id}) = \ker(4A + 4\,\mathrm{id})$$

et il s'agit donc de calculer le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & 4 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 7 \end{pmatrix}.$$

On remarque $C_1 + \sqrt{6}C_2 + C_3 = 0$ donc on a

$$\ker(A + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix},$$

car on sait a priori que $\ker(A + \mathrm{id})$ est de dimension 1.

3. On calcule tout d'abord $\ker(A - \mathrm{id})$. Comme ci-dessus pour simplifier les calculs on remarque

$$\ker(A - \mathrm{id}) = \ker(4A - 4\,\mathrm{id})$$

et on calcule le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -6 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus a clairement rang 1 (comme il faut) et son noyau est engendré par les vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 + \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de trouver les points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)} \in \ker(A - \mathrm{id})$, ou de manière équivalente, les points M tels que

$$(A - \mathrm{id})M = \alpha v + \beta w - B,$$

pour des nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour simplifier les calculer, on cherche plutôt à résoudre le système

$$4(A - \mathrm{id})M = 4\alpha + \beta w - 4B,$$

dans les indéterminées α et β. On a

$$\begin{cases} -x - \sqrt{6}y - z = -4\sqrt{6}\alpha + 4\beta + 4 \\ -\sqrt{6}x - 6y - \sqrt{6}z = 4\alpha - 28 \\ -x - \sqrt{6}y - z = -4\beta - 4(1+\sqrt{6}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(L_3 - L_1)/4 \to L_3]{(L_2 - \sqrt{6}L_1)/4 \to L_2} \begin{cases} -x - \sqrt{6}y - z = -4\sqrt{6}\alpha + 4\beta - 4 \\ 7\alpha - \sqrt{6}\beta = 7 + \sqrt{6} \\ \sqrt{6}\alpha - 2\beta = 2 + \sqrt{6}. \end{cases}$$

On a donc

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1.$$

Le vecteur u est

$$u = \alpha v + \beta w = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} - 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Le lieu des points fixes de g est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ appartient $\ker(A - \mathrm{id})$: c'est le plan P d'équation

$$x + \sqrt{6}y + z = -4\sqrt{6}.$$

5. Le lieu des points fixes de g est le plan P, donc g est la symétrie orthogonale par rapport au plan P. L'application f est une symétrie glissée par rapport au plan P et vecteur de translation u. $\square$

Exercice 2. Soit A_0, A_1, A_2 un repère affine de $\mathbb{R}^2$. Pour $i = 1, 2, 3$, soit $\mathcal{D}_i$ une droite de $\mathcal{E}$ d'équation barycentrique

$$a_0^{(i)}x_0 + a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 = 0,$$

par rapport au repère affine A_0, A_1, A_2.

1. Citer (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $a_j^{(i)}$ pour que les trois droites soient parallèles ou concourantes.

Soit M_0 (resp. M_1, resp. M_2) le milieu de A_1 et A_2 (resp. A_0 et A_2, resp. A_0 et A_1) et, pour $i = 0, 1, 2$, soit $\mathcal{L}_i$ la droite passant par A_i et M_i. [Représenter la situation avec un dessin.]

2. Écrire des équations barycentriques des droites $\mathcal{L}_i$.
3. Démontrer à l'aide de la question 1. que les droites $\mathcal{L}_i$ sont concourantes.

Solution. Vu en cours. □

Exercice 3. Soit λ un nombre réel. On considère les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ donnés par les équations suivantes :

$$\mathcal{P}_\lambda : \lambda x + y - z = 1,$$
$$\mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

1. Déterminer une base de l'espace directeur de $\mathcal{P}_\lambda$ et une de celui de $\mathcal{Q}_\lambda$.

Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ en fonction du paramètre λ en étudiant le rang des matrices

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \qquad A'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les nombre réels λ tels que l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est :

2. vide.
3. un point M_λ qu'on explicitera.
4. une droite $\mathcal{D}_\lambda$ dont on donnera un vecteur directeur.

Solution.

1. Soient P_λ, Q_λ respectivement les espaces directeurs de $\mathcal{P}_\lambda$, $\mathcal{Q}_\lambda$. On a :

$$P_\lambda = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right), \qquad Q_\lambda = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On étudie le rang des matrices A et A' en même temps. En faisant des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - L_2 - \lambda L_3 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -(\lambda - 2)(\lambda + 1) & 2 - \lambda \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{array}\right).$$

On obtient :

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = -1, 2, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$\operatorname{rg} A' = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = 2, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ si et seulement si $\lambda \neq -1$. D'après le cours le système linéaire

$$\Sigma : \begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

a une solution si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$. Si cette condition est vérifiée la dimension de l'espace affine des solutions est $3 - \operatorname{rg} A$. Ceci permet de répondre aux questions suivantes :

2. $\lambda = -1$.
3. $\lambda \neq -1, 2$. En terminant la résolution du système Σ on trouve que le point d'intersection est

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \\ -1 + \frac{3}{\lambda+1} \\ \frac{1}{\lambda+1} \end{pmatrix}.$$

4. $\lambda = 2$. La droite $\mathcal{D}_2$ est donnée par le système

$$\begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

La direction de $\mathcal{D}_2$ est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(-1, 3, 1)$.

$\square$

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ un entier et A_1, A_2 deux points distincts de $\mathbb{R}^n$. Soient λ_1, λ_2 des nombres réels. Pour $i = 1, 2$ on considère l'application affine $h_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$h_i(A_i + \overrightarrow{v}) = A_i + \lambda_i \overrightarrow{v}.$$

On pose $h_3 := h_2 \circ h_1$.

1. Pour $i = 1, 2$ déterminer la partie linéaire de h_i.
2. Déterminer la partie linéaire de h_3.

Soit $(A_1 A_2)$ l'unique droite de $\mathcal{E}$ qui passe par A_1 et A_2. Les coordonnées barycentriques d'un point M (dans le repère A_1, A_2) sont l'unique couple (x_1, x_2) de nombres réels tels que $x_1 + x_2 = 1$ et

$$x_1 \overrightarrow{MA_1} + x_2 \overrightarrow{MA_2} = 0.$$

Dans la suite on suppose $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$.

3. Montrer que h_3 a un unique point fixe.
4. Pour un point M de $(A_1 A_2)$ déterminer les coordonnées barycentriques de $h_3(M)$ en fonction de celles de M.
5. Montrer que l'unique point fixe de h_3 appartient à la droite $(A_1 A_2)$ et déterminer ses coordonnées barycentriques.

Solution.

1. La partie linéaire de h_i est $\lambda_i \cdot \mathrm{id}_E$. L'application h_i est clairement affine.

2. La partie d'une composée d'applications affines est la composée des parties linéaires. Donc,

$$\overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{h_2} \circ \overrightarrow{h_1} = \lambda_2\lambda_1 \,\mathrm{id}_E\,.$$

3. Puisque $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, 1 n'est pas valeur propre de la partie linéaire de h_3. D'après un résultat du cours, le lieu des points fixes de h_3 est un point.
4. Par définition,

$$\overrightarrow{A_1M} = x_2\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Donc,

$$h_1(M) = h_1(A_1 + x_2\overrightarrow{A_1A_2}) = A_1 + \lambda_1 x_2\overrightarrow{A_1A_2}.$$

On obtient

$$\overrightarrow{A_2h_1(M)} = \overrightarrow{A_2A_1} + \lambda_1 x_2\overrightarrow{A_1A_2} = (1-\lambda_1 x_2)\overrightarrow{A_2A_1}.$$

On conclut :

$$h_3(M) = h_2(A_2 + \overrightarrow{A_2h_1(M)}) = A_2 + \lambda_2(1-\lambda_1 x_2)\overrightarrow{A_2A_1}.$$

Si (y_1, y_2) désignent les coordonnées barycentriques de $h_3(M)$ on a

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_2(1-\lambda_1 x_2),\\ y_2 &= 1-\lambda_2(1-\lambda_1 x_2). \end{aligned}$$

5. Soit M un point de (A_1A_2) de coordonnées barycentriques (x_1, x_2). Pour que M soit un point fixe de h_3 il faut et il suffit

$$x_1 = \lambda_2(1-\lambda_1 x_2).$$

En utilisant $x_1 + x_2 = 1$, ceci est équivalent à

$$1-\lambda_2 = x_2(1-\lambda_1\lambda_2).$$

Donc,

$$x_1 = \lambda_2\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1\lambda_2}, \qquad x_2 = \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}.$$

□