# Partiel du 8 novembre 2018

Durée : 1h30

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite.

**Exercice 1 :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, On considère la matrice suivante

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ -3 & 9 & -5-\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})\,.$$

1. Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda$ la matrice $A(\lambda)$ est inversible.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A(0))$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A(-1))$.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A(1))$.

**Exercice 2 :** Soient $A_1, A_2$ deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Pour $i = 1, 2$ on considère l'application affine $h_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$h_i(A_i + v) = A_i + iv.$$

On pose $h_3 := h_2 \circ h_1$.

1. Pour $i = 1, 2$ déterminer la partie linéaire de $h_i$.
2. Déterminer la partie linéaire de $h_3$.
3. Déterminer les points $P \in \mathbb{R}^2$ tels que $h_3(P) = P$.
4. Déterminer l'unique couple de nombres réels $(x_1, x_2)$ tels que $x_1 + x_2 = 1$ et

$$x_1\overrightarrow{PA_1} + x_2\overrightarrow{PA_2} = 0.$$

**Exercice 3 :** Soit $V = \mathbb{R}^4$. Pour $1 \leq i < j \leq 4$ on considère l'application $p_{ij} \colon V \times V \to \mathbb{R}$ définie par $p_{ij}(x, y) = x_i y_j - x_j y_i$, où $x = (x_1, \ldots, x_4)$ et $y = (y_1, \ldots, y_4)$.

1. Montrer que $p_{ij}$ est bilinéaire alternée.
2. Pour $1 \leq \ell < m \leq 4$, montrer que

$$p_{ij}(e_\ell, e_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \ell \text{ et } j = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   En déduire que les formes bilinéaires alternées forment une famille libre.

3. Soit $\phi \colon V \times V \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire alternée. Montrer la formule

$$\phi(x, y) = \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\phi(e_i, e_j).$$

   En déduire que les formes bilinéaires alternées $p_{ij}$ forment une famille génératrice de l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $V$.

4. Déduire la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $V$.

On considère l'application $P \colon V \times V \to \mathbb{R}$ donnée par

$$P(x, y) = (p_{12}(x, y), p_{13}(x, y), p_{14}(x, y), p_{23}(x, y), p_{24}(x, y), p_{34}(x, y)).$$

5. Montrer que $P$ est bilinéaire alternée.
6. Montrer que $P(x, y) = 0$ si et seulement si $x, y$ sont liés.

Soient $x, y, x', y' \in V$ tels que $x, y$ ainsi que $x', y'$ ne sont pas liés.

7. Supposons $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(x', y')$. Montrer que
$$P(x', y') = \delta P(x, y),$$
où $\delta = \det_{(x,y)}(x', y')$ est le déterminant des vecteurs $x', y'$ dans la base $x, y$.
8. $(*)$ Montrer que si les vecteurs $P(x, y), P(x', y') \in \mathbb{R}^6$ sont liés, alors $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(x', y')$.