CORRIGÉ PARTIEL 8 NOVEMBRE

Ex. 1

(1)

$$\det A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ -3 & 9 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$c_1 + c_2 + c_3 \to c_1$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 9 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$L_3 - L_1 \to L_3$
$L_2 - L_1 \to L_2$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 10 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[-(5+\lambda)(4-\lambda) + 20\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda\right] = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1).$$

(2) $A(\lambda)$ est inversible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.

(3)

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2L_3 + 3L_1}{5} \to L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\ker A(0) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A(-1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 9 & -46 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{L_2}{2} \to L_2]{L_1 + L_3 + 2L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ker A(-1) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(5)

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{L_3}{3} + L_1 + L_2 \to L_3]{\frac{L_2}{2} \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ker A(1) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Ex. 2</u>

(1) La partie linéaire $\overrightarrow{h_i}$ de h_i est $i \cdot id$ $(i=1,2)$.

(2) $\overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{h_2} \circ \overrightarrow{h_1} = 2 \cdot id$.

(3) Puisque $h_1 = id$, on a $h_3 = h_2$.

On cherche $P = A_2 + v$ t.q. $h_3(P) = P$.

$$\begin{aligned} h_3(P) &= h_2(A_2 + v) = A_2 + 2v \\ \parallel \\ P &= A_2 + v. \end{aligned}$$

En particulier,

$$h_3(P) = P \iff v = 0.$$

Donc l'unique $P \in \mathbb{R}^2$ t.q. $h_3(P) = P$ est $P = A_2$.

(4) $P = A_2 = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2$.

$$\Longrightarrow (x_1, x_2) = (0, 1).$$

Ex. 3

(1) Laissé au lecteur.

(2) $p_{ij}(e_l, e_m) = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$

$$\text{où } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Comme $i<j$, on ne peut pas avoir $l=j$ et $m=i$ car $l<m$ par hypothèse.

Si $i \neq l$ ou $j \neq m$ on a donc

$p_{ij}(e_l, e_m) = \delta_{il}\delta_{jm} = 0$.

Si $i=l$ et $j=m$ on a $p_{ij}(e_i, e_j) = 1$.

Soient $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{34} \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\sum_{i<j} \lambda_{ij}\, p_{ij} = 0.$$

En évaluant sur e_l, e_m on obtient:

$$0 = \sum_{i<j} \lambda_{ij}\, p_{ij}(e_l, e_m) = \lambda_{lm} p_{lm}(e_l, e_m) = \lambda_{lm}$$

En particulier, $\lambda_{lm} = 0$ pour tout $l<m$.

(3) On écrit

$$x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \qquad y = \sum_{j=1}^{4} y_j e_j.$$

$$\varphi(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilinéarité}}}{=} \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j\, \varphi(e_i, e_j)$$

Puisque φ est alternée

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \quad \text{si } i = j.$$

$$\varphi(e_i, e_j) = -\varphi(e_j, e_i). \quad \text{si } i > j.$$

On obtient :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i \neq j} x_i y_j \, \varphi(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i<j} (x_i y_j - y_i x_j)\, \varphi(e_i, e_j).$$

$$= \sum_{i<j} p_{ij}(x,y) \cdot \varphi(e_i, e_j).$$

D'après la dernière écriture,

$$\varphi = \sum_{i<j} \varphi(e_i, e_j)\, p_{ij},$$

i.e. φ est combinaison linéaire des p_{ij}.

4. Les formes $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ forment une famille libre et génératrice, i.e. une base. L'espace des formes bilinéaires alternées sur V est 6.

5. Laissé au lecteur.

6. $P(x,y) = 0 \iff x_i y_j = x_j y_i \quad \forall i < j.$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

$$\iff \exists\, (\lambda_{ij}, \mu_{ij}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ t.q.}$$

$$\lambda_{ij} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} + \mu_{ij} \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \end{pmatrix} = 0.$$

On suppose $x_1 \neq 0$. Alors

$$y_2 = \frac{y_1}{x_1} x_2 \qquad y_3 = \frac{y_1}{x_1} x_3 \qquad y_4 = \frac{y_1}{x_1} x_4.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{y_1}{x_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = \frac{y_1}{x_1} x.$$

$\Longrightarrow$ x, y sont liés.

Si $x \neq 0$, il existe $x_i \neq 0$ et un argument similaire montre que $y = \frac{y_i}{x_i} x$. Si $x = 0$, il n'y a rien à prouver.

7. $x' = ax + by \qquad y' = cx + dy$

$$P(x', y') = P(ax+by, cx+dy)$$
$$= (ad-bc) P(x,y) = \underbrace{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\det_{(x,y)}(x',y')} P(x,y).$$

$\uparrow$ P alternée

8. On remarque deux choses:

(a) $P(x,y) = \lambda P(x', y')$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ $\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ t.q.

$\varphi(x,y) = \lambda \varphi(x', y')$ pour toute forme bilinéaire alternée φ.

$(\Longleftarrow)$ clair car $P(x,y) = (p_{ij}(x,y))$.

$(\Longrightarrow)$ suit de la formule

$$\varphi(x,y) = \sum p_{ij}(x,y)\, \varphi(e_i, e_j).$$

(b) Soit $v_1, \dots, v_4$ une base de $\mathbb{R}^4$. On pose pour $i < j$,

$$q_{ij}(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad x = \sum_{i=1}^{4} x_i v_i, \quad y = \sum_{i=1}^{4} y_i v_i$$

Alors q_{ij} est une forme bil. alternée.

Supposons que $P(x,y)$ et $P(x',y')$ soient liés $\left(P(x',y') = \lambda P(x,y) \right)$
$\lambda \neq 0$
et complétons la famille libre x, y à une base
Pourquoi?

$v_1 = x$, $v_2 = y$, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^4$.

Par (a) et (b) on a

$$q_{ij}(x', y') = \lambda\, q_{ij}(x, y)$$

Un calcul similaire à celui de la question (2) montre que, pour $1 \leq i < j \leq 4$,

$$q_{ij}(x,y) = \begin{cases} 1 & i=1,\ j=2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier,

$$q_{ij}(x',y') = \begin{cases} \lambda & i=1,\ j=2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On écrit $x' = \sum_{i=1}^{4} x_i' v_i$, $y' = \sum_{i=1}^{4} y_i' v_i$. Puisque

$$q_{12}(x', y') = \lambda \neq 0$$

on a que x_1' ou x_2' est non nul.

Puisque $v_1 = x$, $v_2 = y$ par définition, il s'agit de montrer $x_3' = x_4' = y_3' = y_4' = 0$.

Supposons par exemple $x_3 \neq 0$. Alors

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_3'}{x_3'} \cdot x_1' \\[2ex] y_2' = \dfrac{y_3'}{x_3'} \cdot x_2' \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}}_{=\, q_{12}(x',y')} = 0 \quad \text{Absurde!}$$

Le cas $x_4' \neq 0$ se fait de manière similaire.