Contrôle continu du 12 décembre 2018

Durée : 1h

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite.

Exercice 1 : Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $\phi \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application définie par

$$\phi(e_1) = e_2, \quad \phi(e_2) = e_3, \quad \dots \quad \phi(e_n) = e_1,$$

où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Calculer ϕ^n.
2. Soit $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ avec $i^2 = -1$. Pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ montrer que ω^k est racine de $X^n - 1$.
3. Déduire que ϕ est diagonalisable.
4. Montrer que le vecteur $(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ est un vecteur propre pour ϕ de valeur propre ω^{n-1}.
5. Que dire pour $(1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(n-1)})$ pour $k = 0, \dots, n-1$?

Question pour la route.[1] Soient n et $\phi \colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ définie comme plus haut.

1. Quelles sont les valeurs propres de ϕ ?
2. Est-ce que ϕ est diagonalisable ? Trigonalisable ?
3. Trigonaliser ϕ.

Exercice 2 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
3. Pour toute valeur propre λ de A calculer une base de l'espace propre V_λ.
4. Déterminer le polynôme minimal de A. Est-ce A diagonalisable ?
5. Pour toute valeur propre λ de A déterminer un vecteur

$$v_\lambda \in \ker{(A - \lambda\,\mathrm{id})^2} \smallsetminus \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}).$$

   Calculer $(A - \lambda\,\mathrm{id}) v_\lambda$.

6. Trigonaliser A.

Question pour la route : refaire l'exercice sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Faites ça chez vous, à l'école ou n'importe où, mais pas ici !